《揭諦》第 22 期 2012 年 1 月，頁 89-128

從新邏輯到新系統

傅皓政*

摘　要

邏輯經驗論者R. Carnap在1930年提到，雖然G. Frege的新邏輯出現已逾數十年，但是大部分的教科書仍未意識到新邏輯與Aristotle的舊邏輯有著根本上的差異。有趣的是經過數十年的發展，我發現古典邏輯的演算系統也出現相同情況，截至目前為止，大部分的教科書也未意識到樹枝法的重要性，主要原因在於雖然在限定的範圍中，樹枝法和真值表法同樣能夠提供證明可決定性的程序，卻無法如自然演繹法等以直接證法為主要證明策略的方法一般，呈現如何從前提逐步推論到結論的過程。但是，以直接證法為主要證明策略的演算系統而言，無論是公理法或自然演繹法，要建構這類演算系統的證明其實有個困難之處，因為這些演算系統並未

* 中國文化大學哲學系助理教授

提供如樹枝法般能夠有效率地找到證明的操作程序。不過，在這篇論文中，我要說明的是樹枝法不但具有找到證明的操作程序，而且透過樹枝法的原型，即E. W. Beth提出的語意真值圖，還能夠進一步建構自然演繹法的證明，如果透過Beth的方法能夠成功地建立樹枝法與其他以直接證法為策略的演算系統之間的轉換形式，那麼對於建構以直接證法為策略的演算系統的證明將會有相當大的助益。

關鍵詞：可決定性、自然演繹法、樹枝法、語意真值圖、證明。

【收稿】**2011/09/29** 【接受刊登】 **2011/11/09**

從新邏輯到新系統[1]

前　言

在邏輯史上，Aristotle 被公認為邏輯學的創始者。然而更令人驚訝的是，Aristotle 所提出的三段論(syllogism)，經過兩千多年的考驗，居然沒有出現太多變動。甚至到了十八世紀，德國哲學家 I. Kant 在 *Critique of Pure Reason* 一書的序言中，仍然對 Aristotle 的邏輯賦予極高的評價，認為這個學科已經進入穩定的科學發展步驟，即使有所修改也只是細節上的變動，而不會造成實質上的革命進展。

> 邏輯從最早的時期開始就已在穩固的道路上行進，這個事實非常明顯，因為從 Aristotle 以來，邏輯不曾後退，被認為對邏輯有所改進者，也只是刪除一些不必要的，非常細節的部分；或是提出一些比較清晰或確定的方法而已。時至今日，邏輯不可能再前進一步，因為它已臻完善。(Kant, *Critique of Pure Reason*, B viii)

[1] 本論文承蒙各位匿名審查人的詳實審閱，不但使本文得以避免錯誤，許多具有建設性的意見對於充實本文內容助益甚多，特此表達感謝之意。倘若本文尚有任何疏漏與不足之處，仍屬作者之責。

然而，邏輯在十九世紀末卻出現一場Kant意想不到的革命性轉變，德國數學家G. Frege於 1879 年出版*Begriffsschrift*[2] 一書，引進函映(function)與變量(variables)的觀念，邏輯的演算能力完全超越Aristotle的三段論，當然也超越斯多亞學派(Stoic School)的命題邏輯。相較於邏輯的發展，邏輯課程的反應顯得有點遲緩。回顧 1930 年代，R. Carnap在“The Old and the New Logic”一文中提到雖然新邏輯已發展數十年，但是「大部分的教科書仍未意識到其重要性」(Carnap, 1930: 139)。

時至今日，初階邏輯的演算系統同樣呈現蓬勃發展的情況。從Frege的公理法(Axiom System)開始，歷經G. Gentzen的自然演繹法(Natural Deduction)與序列演算法(Sequent Calculus)，還有以E. W. Beth的語意真值圖(Semantic Tableaux)完原型改良的樹枝法(Tableaux System)等，然而，綜觀大部分的邏輯教科書，不難發現這些演算系統的證明策略各不相同，公理法與自然演繹法偏重「直接證法」[3] (direct

[2] *Begriffsschrift* 為原德文版書名，英文書名則通常翻譯為 *Concept Script*。參照 *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

[3] 如果從系統的完備性來看，自然演繹法的證明當然不僅限於直接證法的策略，通常在邏輯教科書中也會出現條件證明規則(Conditional

proof)的策略，而樹枝法在證明策略上則偏重「間接證法」(indirect proof)。採取間接證法策略的樹枝法，其優點在於證明論證是否為有效論證的能力較強，但是，卻缺乏逐步推論的思考方式，這就是為什麼大部分的邏輯教科書將建構證明的重點放在自然演繹法的原因。因此，在本篇論文中，我將說明樹枝法等間接證法雖然不是逐步推論的直接證法，但卻可以透過樹枝法的原型，即Beth的語意真值圖，對於建構自然演繹法的證明相當有幫助。換句話說，僅將樹枝法看成獨立於直接證法的另一個演算系統的觀點是可疑的。在本篇論文中，首先以Carnap的觀點剖析新、舊邏輯的差異。接著回溯樹枝法的原型，即Beth提出的語意真值圖及其演算規則。然後，藉由可決定性及推論規則的探討，呈現演算系統之間的差異。最後，我將說明雖然語意真值圖的結構是間接證法的觀點，但是藉由這個方法的轉換形式，對於建構自然演繹法的證明有相當重要的啟發。

Proof, CP)以及間接證明規則(Indirect Proof, IP)。不過，我在這篇論文中要強調的自然演繹法系統的大部分證明是依循直接證法的策略，並不是著重在系統是否完備的問題。換言之，我嘗試透過 Beth 的語意真值圖替自然演繹法找到一個更有效率的建構證明的方法。

壹、新邏輯的重要進展

Carnap提到的舊邏輯，就是指以Aristotle的三段論為基礎所發展的傳統邏輯學。相較於傳統的舊邏輯，新邏輯則是指Frege以來所建立的古典邏輯系統。綜觀Carnap的論點，新邏輯超越舊邏輯的地方在於：(1)有更好的描述與分析能力，也更符合我們對日常語言的直覺；(2)新邏輯能夠處理一些紛擾已久的哲學問題。關於第一個部分，Carnap認為新邏輯將處理範圍延伸到關係語句(relational sentences)，例如「大於」、「小於」、「介於…之間」等，可惜的是舊邏輯無法適當描述這些語句。第二個部分則是Carnap的哲學主張，他認為透過新邏輯的發展，可以澄清一些哲學問題，例如，數學命題並非如Kant所主張的是先驗綜合(synthetic *a priori*)命題，而是分析(analytic)命題，原因在於分析命題的判準在於語句的形式而非語詞概念之間的關係，另外新邏輯可以說明形上學命題為何是無意義[4]。在本篇論文中，我將焦點集

[4] Carnap 後來對於如何從邏輯的觀點處理形上學問題，有更進一步的詳細討論。請參照其原文“Überwindung der Metaphsik durch Logiksche Analyse der Sprach”，此篇文章發表於 *Erkenntnis* vol. II (1932)，後經 A. Pap 翻譯為“The Elimination of Metaphysics Through Logical Analysis of Language”一文，並收錄於 A. J. Ayer 所編纂的 *Logical Positivism* 一書，頁 60-81。

中在第一個部分，說明新邏輯在邏輯課程中的重要性。至於第二個部分是哲學議題，由於並非本篇論文的重點，因此將略而不提。

Carnap 認為 Aristotle 以來的傳統邏輯學，其重要特徵在於對語句採取「主詞—述詞」的分析形式，而且是唯一的形式，這個想法不但忽略了以語句為單位的命題邏輯，也無法適當地處理關係語句。

> 在舊邏輯中唯一的語句形式就是述詞形式(predicative form)：「蘇格拉底是人」、「所有（或有些）希臘人是人」，述詞概念或性質是用來歸屬於主詞概念的。(Carnap, 1930: 137)

舊邏輯的語句分析形式無法處理關係語句，其主要原因在於語句中應該被當作對象(objects)的語詞，會被結合為述詞的一部分，這個分析方法顯然是違反我們直覺上的想法。例如，對「*a* 在 *b* 的右邊」這個語句，應該理解為 *a* 和 *b* 兩個對象之間具有「…… 在 …… 的右邊」的關係，而不是 *a* 具有「在 *b* 的右邊」這個性質。同樣地，語句「*a* 介於 *b* 和 *c* 之間」的意思，則是 *a*、*b* 和 *c* 三個對象具有「…… 介於 …… 和 …… 之間」的關係，而不是 *a* 具有「介於 *b* 和 *c* 之間」之間的關係。

> 舉例來說，「*a* 大於 *b*」是歸屬兩個或更多對象的關係。G. W. Leibniz 對於關係理論的想法在新邏輯中得到解決，然而，舊邏輯認為關係語句也是述詞形式，所以無法處理關係語句的推論。(Carnap, 1930: 137)

如果以傳統邏輯分析語句 *S*：「*a* 大於 *b*」，會將語句 *S* 分成主詞「*a*」和述詞「大於 *b*」兩個部分，這個分析方法會導致一個令人無法接受的後果。一般而言，我們會同意從「*a* 大於 *b*」和「*b* 大於 *c*」兩個前提，加上適當的輔助前提，可以得到「*a* 大於 *c*」的結論。然而，傳統邏輯的語句分析方式對於呈現這個論證是無能為力的。傳統邏輯的缺陷可以從兩個面向來了解：(1)對該論證而言，適當的輔助前提為數學上的遞移律(Law of transitivity)——對任意的三個量 *x*、*y*、*z* 而言，如果 *x* 大於 *y* 而且 *y* 大於 *z*，則 *x* 大於 *z*。但是，由於傳統邏輯缺乏描述關係語句的能力，所以無法正確描述遞移律。(2)經過傳統邏輯將論證形式化之後，雖然可以加入某些輔助前提使該論證成為有效論證，但是，這些輔助前提一旦被翻譯成日常語句，會顯得不倫不類。

讓我從面向(1)開始說明。首先，按照關係述詞的特性，如果要適當的描述關係述詞，其邏輯語言至少要有二元(binary)或二元以上的述詞符號，也就是 *Pxy* 或者如 $P(x_1,$

$x_2,\ldots, x_n$)的符號，Pxy 是指 x 和 y 具有 P 的關係。例如，假設 Pxy 代表「x 大於 y」，那麼當我們在 x 的位置代入 a 且在 y 的位置代入 b，我們就可以得到語句 Pab 代表「a 大於 b」。但是，如果以新邏輯的語言說明三段論的分析方式，語句不會出現二元或二元以上的述詞，只有一元述詞，顯而易見的是，這樣的描述能力顯然無法描述關係語句。因為採取一元述詞的分析方式，遞移律中出現的「x 大於 y」及「y 大於 z」會轉換成如下的形式——只能以 Px 代表「x 大於 y」，以 Qy 代表「y 大於 z」。這個轉換形式的問題在於變量被吸納在述詞符號之中，也就是說，語句 Px 無法呈現變量 x 和 y 之間的關係，同樣地，語句 Qy 也無法呈現變量 y 和 z 之間的關係。

從面向(2)來看，堅持三段論能夠處理上述論證的立場通常是犯了四詞項謬誤(quaterno terminorum)的問題。以「a 大於b」和「b大於c」為例，在這兩個語句出現的語詞其實有四個，這四個語詞分別是「a」、「大於b」、「b」和「大於c」，其中特別需要注意的是「大於b」和「b」顯然是不同的兩個語詞，從Aristotle對範疇的觀點來看，「b」作為一個個體，可以看成是獨立的實體(substance)，但是「大於b」是一個非獨立的性質(accidents)，必須依附在實體之上。舉例來說，

「8」和「大於 8」這兩個集合當然是不一樣的，「8」這個語詞所指涉的集合中只有一個元素，即{8}。相對而言，「大於 8」這個語詞指涉的集合，其元素卻有無限多個，{9, 10, 11, …}。所以上述的兩個語句中出現了四個不同的語詞而非三個。因此，如果以S代表「*a*」、M代表「大於*b*」、N代表「*b*」，P則用來代表「大於*c*」，以「*a*大於*b*」和「*b*大於*c*」為前提，結論為「*a*大於*c*」的論證形式可表示如下[5]：

(A1) SAM

NAP

SAP

由於論證(A1)中出現了四個語詞，因此，論證(A1)顯然是無效論證。從三段論的觀點來看，為了讓論證(A1)成為有效論證，有兩種加入輔助前提的方式，可以達到這個目的——(i)加入輔助前提 MAN，將論證(A1)分析成由兩個三段論論證(A2)及(A3)結合的論證。(ii)加上輔助前提 MAP，此輔助前

[5] 在 Aristotle 的三段論中，通常以 S 代表小詞，M 代表中詞，而 P 代表大詞。另 A、E、I、O 則分別代表全稱肯定(Universal affirmatives)、全稱否定(Universal negatives)、存在肯定(Particular affirmatives)以及存在否定(Particular negatives)等語句形式。因此，SAP 表示是全稱肯定命題，代表的意思就是「所有的 S 都是 P」。

提可以讓我們從 SAM 和 MAP 直接推論得到 SAP，即論證(A4)。

(A2)	SAM		(A3)	SAN
	MAN			NAP
	SAN			SAP

(A4)	SAM
	MAP
	SAP

策略(i)的問題在於雖然加入輔助前提 MAN，使得(A2)和(A3)都成為有效論證，但是「大於 *b* 是 *b*」並非合理的數學陳述。因此，雖然加入輔助前提 MAN 可以消弭四詞項謬誤，卻顯然不是好策略。至於策略(ii)的問題則是無法正確反映論證的主要內容，因為該論證會變成從「*a* 大於 *b*」和「凡是大於 *b* 都會大於 *c*」，推論得到「*a* 大於 *c*」的結論。換言之，「*b* 大於 *c*」是成多餘的，這顯然和原來論證所要表達的內容是不同的。所以，策略(ii)也不是消弭問題的好策略。

相較於傳統邏輯的分析方法，由於新邏輯的語言包含關係述詞的符號，因此，能夠適當地描述遞移律，換言之，新邏輯可以適當地表達輔助前提。設想以 *Rxy* 代表「*x* 大於 *y*」，因此，*Rab* 用來代表語句「*a* 大於 *b*」，*Rbc* 代表語句「*b* 大

於 *c*」，*Rac* 則是「*a* 大於 *c*」。從推論的角度來看，從 *Rab* 和 *Rbc* 兩個前提當然也無法推導出 *Rac* 這個結論，也就是說，論證(A5)是無效論證。

(A5) Rab

$$\frac{Rbc}{Rac}$$

要使上述論證轉變成有效論證的方式，就是加入其他前提，其中最直覺的當然就是加入遞移律，即：

$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \supset Rxz)$

經過加入其他前提所形成的論證(A6)，就會變成有效論證。

(A6) $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \supset Rxz)$

Rab

$$\frac{Rbc}{Rac}$$

建構論證(A6)的重要性在於如何適當地表達數學陳述，從論證(A2)-(A4)的形式，雖然每個都是有效論證，但無法適當表達數學陳述。不過，值得注意的是，雖然上述的論證是以數學陳述作為例子，但是日常語言的論證也會出現相同的問題，因為在日常語言中也會出現關係述詞，例如：「甲坐在乙的右邊」、「丙比丁高」等等。而在上述的分析中也可以了解，由於新邏輯能夠適當地描述包含關係述詞的語

句的內容，因此 Carnap 主張新邏輯處理論證的能力，遠遠超過傳統邏輯所能做到的。

貳、樹枝法的原型

在Carnap的時代，雖然新邏輯的發展已經歷時數十年，但是Carnap聲稱大多數的教科書並未意識到新邏輯的重要性。事實上，新邏輯並不是如Kant所預言的，只能修改原有的傳統邏輯而已，而是一場革命性的轉變。同樣地，從Frege建立公理法演算系統以來，為了尋求演算技術上的進步，對於古典邏輯的演算系統也紛紛出現，其中L. Wittgenstein的真值表法以及源自Gentzen的自然演繹法[6]，對於如何建構證明有著長足的進步。不過，就我所知，目前大多數國內外邏輯教科書的主要內容,卻甚少以樹枝法作為建構證明的主要演算系統,主要的原因就在於樹枝法的證明並未呈現從前提逐步推論得到結論的過程。但是，在另一方面，樹枝法同時

[6] 我要特別註明是「源自」Gentzen 的自然演繹法，是因為嚴格來說，自然演繹法的演算系統其實是有許多不同的系統,只是大部分邏輯教科書作者都是綜合不同系統整理出他自認為最佳的推論規則組合。雖然自然演繹法有許多不同的演算系統，不過，其差別只是在是否接受一些不同的推論規則的細節而已。另外，在邏輯史上，我們都會同意將自然演繹法的創始者是 Gentzen，因此這裡所說的自然演繹法就是泛指 Gentzen 之後發展的自然演繹法。

具備有一些獨特的面向是其他演算系統所缺乏的，尤其是在證明步驟的簡潔特性，以及判斷某論證是否為有效論證的能力，都較其他演算系統為優。簡言之，樹枝法在邏輯教學上可以說是非常有效率的方法。可惜的是，樹枝法無法呈現逐步推論過程的缺點，使得樹枝法在邏輯教學上一直處於次要的地位，甚至是被刻意忽略的。對於樹枝法與自然演繹法之間的優缺點比較，將在下一節做詳細的討論。現在，我要先回溯樹枝法的原型。

樹枝法的原始構想來自荷蘭數學家 E. W. Beth 語意真值圖(semantic tableaux)，經過 R. M. Smullyan 修改為分析圖(analytic tableaux)，也就是目前大家熟知的樹枝法。不過，正由於大部分教科書僅提到 Smullyan 的分析圖，忽略了 Beth 的語意真值圖，由此，語意真值圖的優點，在建構樹枝法或分析圖的過程中，很不幸地被隱藏起來，其中最重要的就是 Beth 所提到的轉換形式(transformation)的建構。對 Beth 而言，他發展語意真值圖的真正目的除了更容易掌握無效論證的反例之外，還試圖在已證明該論證為有效論證的情況下，提供從語意真值圖建構自然演繹法證明的過程。我們不難想見，如果 Beth 的想法是可行的，那麼語意真值圖對於在邏輯教學上引導學生思考如何建構證明，將會帶來很

大的突破。接著，我要詳細介紹 Beth 的如何建構論證的語意真值圖。

Beth 所建構的語意真值圖，基本的想法就是設法找到可以證明論證無效的反例，從語意的觀點而言，前提語意上不蘊涵結論的意思就是：**可以找到某個可能情況，使得前提皆為真而結論為假**。根據這個想法，先將語句分成「成立(valid)」與「不成立(invalid)」兩個部分，其中前提放在「成立」的一邊（左邊），而結論則放在「不成立」的那一邊（右邊）。當然，前提有可能是空的，例如要證明某個語句是否為恆真句(tautology)或者是否一致(consistent)時。

成立(*Valid*)	不成立(*Invalid*)
(1) 前提	(*n*+1) 結論
(2) 前提	
⋮	
(*n*) 前提	

圖 1

接下來，為了能夠比較容易掌握Beth的語意真值圖的推論規則，我稍微做了一些修改，其推論規則如下：(Beth, 1955: 20-21)[7]

(i) 左邊為前提，右邊為結論。

(ii) 如果某邊出現¬φ，則在另一邊填入 φ。

(iii) 當∀*x*φ(*x*)出現在左邊，或者∃*x*φ(*x*)出現在右邊時，則在語句的同一邊填入 φ(*a*)，*a* 是指所有出現過的名稱符號。

(iv) 如果 φ∧ψ 出現在左邊，或者 φ∨ψ 出現在右邊，則 φ 與 ψ 填入同一邊。

(v) 如果 φ→ψ 出現在右邊，則 φ 填入左邊而 ψ 填入右邊。

(vi) 如果(a) φ∨ψ 出現在左邊，(b) φ→ψ 出現在左邊，(c) φ∧ψ 出現在右邊，(d) φ↔ψ 出現在左邊，以及(e) φ↔ψ 出現在右邊的情況下，語意真值表會分成兩個部分，左邊的以(L_1-i)、(L_1-ii)表示第一次出現的

---

[7] E. W. Beth, ‘Semantic entailment and formal derivability’, in J. Hintikka (eds.), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 1969, pp.9-41. 此篇文章原發表於 *Mededeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, *Afdeling Letterkunde*, N. R. vol 18, no. 13 (Amsterdam, 1955), pp. 309-42. 在本篇論文中，引用該篇文章的頁數是出現在 *The Philosophy of Mathematics* 一書中的頁數。

兩個部分，右邊的則以(R_1-i)、(R_1-ii)表示。如果繼續區分，就以(L_2-i)、(L_2-ii)…等方式繼續標示。

(a) 將 φ 填入(L_n-i)，ψ 填入(L_n-ii)中。

(b) 將 ψ 填入(L_n-i)，φ 填入(R_n-ii)中。

(c) 將 φ 填入(R_n-i)，ψ 填入(R_n-ii)中。

(d) 將 φ 與 ψ 均填入(L_n-i)以及(R_n-ii)中。

(e) 將 φ 填入(L_n-i)與(R_n-ii)，ψ 則填入(R_n-i)與(L_n-ii)。

(vii) 當$\exists x\varphi(x)$出現在左邊，或者$\forall x\varphi(x)$出現在右邊時，則填入 $\varphi(a)$，其中 a 必須是新的名稱符號，也就是在之前的推論過程中未出現過的名稱符號。

(viii) 如果同一語句同時出現在左右兩邊同一部分，則在語意真值圖中，該部分是封閉的。

(ix) 如果語意真值圖的每個部分都封閉，那麼整個語意真值圖就是封閉的。[該論證為有效論證]

(x) 如果已經完成(i)-(vii)的每個可能運算的步驟，而尚有未封閉的部分，那麼這個部分就能提供證明該論證無效的適當反例。

接著，讓我以論證的實例，說明Beth的語意真值圖的演算過

程[8]：

(A7)　$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D), (D \vee E) \rightarrow G \qquad /\therefore A \rightarrow G$

(A8)　$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee D \qquad /\therefore B \vee C$

論證(A7)有兩個前提，分別是$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$及$(D \vee E) \rightarrow G$，第一個步驟就將這兩個前提填入左邊，結論$A \rightarrow G$則填入右邊。首先，語句(4)和(5)是根據規則(v)分解語句(3)所得到的；語句(6)和(7)是根據規則(vi)的(b)分解語句(2)而得到的，語句(8)和(9)則是根據規則(iv)分解語句(6)得到的。分解語句(1)時，因為已經有兩個部分，所以需要分別再區分為兩個部分，然後經由規則(vi)的(b)分別在(L_2-i)和(L_3-i)填入條件句的後件$(C \wedge D)$，而在(R_2-ii)及(R_3-ii)中則填入條件句的前件$(A \vee B)$。最後，根據規則(iv)分解語句(10)-(13)，因為已經沒有其他能夠運算的語句，因此語意真值表已完全展開。觀察每個部分，因為在右邊出現G，而且在(L_1-i)也出現G，所以(L_1-i)已封閉；(L_3-i)是屬於(L_1-ii)的部分，所以(L_3-i)出現D，而(R_1-ii)也出現D，因此(L_3-i)也是封閉的；至於(R_2-ii)和(R_3-ii)都出現A，而在左邊也出現A，所以這兩個部分也都

[8] 這兩個例子均取材自林正弘教授的《邏輯》一書，論證(7)出自頁 115，論證(8)則出自頁 131。

封閉。由於每個部分都封閉，所以論證(A7)為有效論證。[9]

<table>
<tr><th colspan="4">成立</th><th colspan="4">不成立</th></tr>
<tr><td colspan="4">(1) $(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$
(2) $(D\vee E)\rightarrow G$
(5) A</td><td colspan="4">(3) $A\rightarrow G$
(4) G</td></tr>
<tr><td colspan="2">(L_1-i)
(7) G</td><td colspan="2">(L_1-ii)</td><td colspan="2">(R_1-i)</td><td colspan="2">(R_1-ii)
(6) $(D\vee E)$
(8) D
(9) E</td></tr>
<tr><td>(L_2-i)
(10)
$(C\wedge D)$
(14) C
(15) D</td><td>(L_2-ii)</td><td>(L_3-i)
(11)
$(C\wedge D)$
(16) C
(17) D</td><td>(L_3- ii)</td><td>(R_2-i)</td><td>(R_2-ii)
(12)
$(A\vee B)$
(18) A
(19) B</td><td>(R_3-i)</td><td>(R_3-ii)
(13)
$(A\vee B)$
(20) A
(21) B</td></tr>
</table>

圖 2

接下來，分析論證(A8)的證明：語句(5)和(6)是根據推論規則(iv)分解語句(4)而得，語句(7)及語句(8)則是根據規則(vi)的(b)分解語句(1)而得，語句(9)和(10)是根據規則(vi)的(a)分解語句(3)而得，最後，語句(11)和(12)則是根據規則(vi)

[9] 在(A7)的語意真值圖中，其實在(L_1-i)中出現的語句(7)和出現在右邊的語句(4)已經得到矛盾，所以(L_2-i)、(L_2-ii)、(R_2-i)和(R_2-ii)其實是多餘的，當然在建構自然演繹法證明的時候也不必考慮這些語句，所以語句(10)、(14)、(15)以及語句(12)、(18)、(19)其實都可以不必列出。在這裡列出來的目的也只是要顯示在遇到語意真值圖在分割之後應該如何使用推論規則而已。

的(b)分解語句(2)而得。根據整個語意真值表，(L_1-i)和右邊均出現語句 B，因此(L_1-i)這個部分是封閉的；在(L_2-i)這個部分，因為和(R_1-ii)都出現語句 A，所以也是封閉的；但是，與(L_3-i)相關的部分，並未在左右兩邊出現相同的語句，因此這個部分不是封閉的；另外，(R_3-ii)的部分也不是封閉的。按照語意真值表的規則，既然有不是封閉的部分，就表示論證(8)是無效論證，也就是我們可以利用語意真值表建構反例。建構反例的第一步是找到不是封閉的部分，例如(L_3-i)，與其相關的部分包括(L_2- ii)、(L_1-ii)、(R_1- ii)以及(R_3-i)，這個部分出現的語句包括 B、C 及 D，因此，只要指定 D 為真，B 和 C 為假，就是論證(8)的反例。

<table>
<tr><th colspan="4">成立</th><th colspan="3">不成立</th></tr>
<tr><td colspan="4">(1) $A \to B$
(2) $C \to D$
(3) $A \vee D$</td><td colspan="3">(4) $B \vee C$
(5) B
(6) C</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(L_1-i)
(7) B</td><td colspan="3">(L_1-ii)</td><td rowspan="3">(R_1-i)</td><td colspan="2">(R_1-ii)
(8) A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(L_2-i)
(9) A</td><td colspan="2">(L_2- ii)
(10) D</td><td rowspan="2">(R_3-i)</td><td rowspan="2">(R_3-ii)
(12) C</td></tr>
<tr><td>(L_3-i)
(11) D</td><td>(L_3-ii)</td></tr>
</table>

圖 3

毫無疑問地，按照Beth建構的推論規則，可以很容易地將上述的語意真值圖延伸到初階邏輯(first-order logic)，事實上，Beth就是以述詞邏輯的例子來說明語意真值圖(Beth, 1955:14-6)[10]。不過，值得注意的是，語意真值圖和樹枝法並不能提供所有初階邏輯的有效性檢證，因為涉及到關係述詞的部分可能會出現無限且非遞迴的函映[11]。因此，我在這裡僅探討可以決定論證有效與否的部分，而且也只有這個部份的轉換形式能夠發展，不難想像如果在無法決定論證有效與否的情況下，根本就連建構語意真值圖的證明都做不到，更遑論要找到轉換形式建構自然演繹法的證明。

源自Smullyan分析圖(analytic tableaux)的樹枝法，通常很難想像和自然演繹法的證明會有什麼關係，不過，雖然大部分認為樹枝法的原型來自Beth的語意真值圖(semantic tableaux)，但有邏輯學家，例如W. Hodges等人認為樹枝法的思考方式是來自Gentzen自然演繹法的觀點[12]。這個觀察

[10] 請參照第四節的例子，該實例即來自 Beth。

[11] 由於初階邏輯是完備的，因此，如果運用語意真值圖或者是樹枝法，所有的初階邏輯的有效論證均可得到封閉的結果，因為初階邏輯的有效論證是可遞迴枚舉的(recursively enumerable)，但是在無效論證的情況就可能出現無限論域及非遞迴的情況。

[12] Hodges 就是認為分析圖的構想來自 Gentzen(Hodges, 1977:176)。雖然 Hodges 並沒有說明基於甚麼理由宣稱這個觀點，但是，我認為會持

非常值得深究，不過，基於樹枝法和自然演繹法的證明過程的差異，所以，通常很難將這樹枝法與自然演繹法兩個演算系統聯想在一起。進一步說，兩者最大的差異在於樹枝法只有分解規則，也就是將較複雜的語句分解成較簡單的語句，卻沒有組合規則能夠將較簡單的語句組合成較複雜的規則。不過，如果依循Beth建構語意真值圖的方法，會發現他除了想提供一個更有效率的方法決定論證有效與否之外，也希望能夠提供一個方法思考如何更有效率地建構自然演繹法的證明。

参、可決定性與證明

邏輯是系統性地處理論證的學科，這個學科的目的在於讓我們掌握哪些論證是合理的(correct reasoning)或有效(valid)，哪些論證又是不合理的。對於合理的論證，我們還希望能夠進一步證明其道理何在，對於不合理的論證，我們同樣希望能夠解釋為什麼該論證是不合理的。第一個目標通

這個觀點的邏輯學家通常是將樹枝法看成自然演繹法中的刪除規則(Elimination rules)。然而，自然演繹法的刪除規則事實上和樹枝法的規則仍有相當大的差距，因為在證明上很難將兩者聯想在一起。其實，只要想到自然演繹法的選言(disjunction)刪除規則，就不難想像兩者之間的差異。

常稱為可決定性(decidability)的問題，所謂可決定性的意思就是研究是否存在一個機械性的程序能夠用以決定論證的有效性，換言之，只要依照該程序逐步操作，就能證明該論證是否為有效論證。至於第二個目標，就是建構演算系統，提供證明或解釋。

決定性定理(decidability)在邏輯中是非常實用的定理，因為這個定理不但讓人類了解是否能夠證明,而且能夠找到一個不需要依靠任何洞見(insight)或特殊才智的證明程序。不過,決定性定理並不是演算系統的性質,而是邏輯系統的性質，因此，我們會說命題邏輯是可決定的，一元述詞邏輯(monadic predicate logic)是可決定的，初階邏輯是不可決定的等等。

接著,我想對決定性稍做說明是有必要的。基本上,在邏輯教程中出現介紹決定性的方法,都是以真值表法作為標準範例。以命題邏輯為例,真值表法的結構數目是以命題符號的多寡所決定,每個命題都有兩個賦值,即「真」和「假」,因此如果整個論證中出現n個命題符號，則只要將 2^n個結構全部列出,就可以完整地考慮所有可能出現的組合。而在一元述詞邏輯中則可以用展開式,使所有語句變成不包含量詞(quantifier-free)的有限長語句，那麼就可以同樣用真值表的

方法窮盡所有的情況[13]。然而，超過二元述詞以上的邏輯系統，就不具有機械性的程序能夠證明論證是否有效，也就是不可決定的[14]。

有趣的是 Beth 的語意真值圖與樹枝法也都具有和真值表法共同的特性，也就是可以用來證明命題邏輯與一元述詞邏輯是可決定的演算系統，甚至我認為這兩個系統都比真值表法來得更容易掌握。我們之所以能夠透過語意真值圖與樹枝法理解可決定性，是根據推論規則的特性，這兩個系統的推論規則可以從兩方面來看：(1)在語句連接詞的部分，由於這兩個系統都強調分解規則(decomposition)，也就是只有減少語句的連接詞，沒有增加語句連接詞的規則。所以，在語句的連接詞是有限的情況下，分解規則的應用步驟當然就是有限的次數，而證明的步驟同樣會是有限的。因此，對任

[13] 要使展開式是有限長的語句，就必須要確定我們可以僅使用有限的論域(domain)展開含有量詞的語句，這個部分的證明可以參考 Löwenheim-Skolem 在 1915 年提出的論文，該定理聲稱設想 S 是一元述詞的語句，如果有個模型可以滿足語句 S，那麼存在某個有限個體論域的解釋使得 S 為真，該有限論域的個數最大值為 $2^k \times r$，其中 k 是指一元述詞的個數，r 則是變量(variables)的個數。

[14]至於初階邏輯是不可決定的說明，通常會引用丘奇定理(Church's Theorem)，丘奇定理是用以證明初階邏輯的證明是不可決定的，至於證明的策略則可以通過圖靈機的停機問題(halting problem)，該證明請參照 Boolos and Jeffrey, *Computability and Logic*, ch 4-6 及 10。

意有限語句形成的集合 Γ 及某個語句 D 而言，Γ 是否蘊涵 D 是可決定的，因為通過推論規則，我們可以一步一步地減少語句連接詞的個數，使得語句都無法繼續分解為止。(2)當語句集合 Γ 或語句 D 中出現一元述詞的語句時，由於與量詞相關的推論規則也只有個例化(instantiation)規則而沒有一般化(generalization)規則，所以，也能夠將量詞逐步消除。因此，我們能夠在有限步驟中證明 Γ 是否蘊涵 D。當然，這裡所出現的問題就是一元述詞的論域可以無限的，那麼對包含全稱量詞的語句而言，其個例取代的語句不也是無限個？如何能夠在有限步驟中完成證明呢？回到 Löwenheim-Skolem 定理，該定理證明在一元述詞邏輯中，存在一個有限論域能夠證明語句集合 Γ 是否蘊涵 D。或者，我們可以利用在真值表法說明可決定性所引進的展開式的概念，將所有量詞都換成不包含量詞的展開式，再回到語句連接詞的分解規則，同樣可以在有限步驟內完成證明。

不過，儘管真值表法以及樹枝法是用來說明可決定性，但是在教授邏輯的學者們眼中，這些系統都沒有提供從前提「導出」結論的過程。

> 當我們用真值表判斷一個論證為有效之後，雖然相信它是有效的，但在直覺上並不明瞭它何以有效。換言

> 之，我們雖然確信一個論證有效，但仍然不知道這個論證的結論是如何從前提導出的。(林正弘，1973: 96)

> 我們介紹了三種方法[真值表，歸謬真值表及樹枝法]來決定一個論證是否有效。不過，這些決定論證有效性的方法並不能告訴我們，一個有效論證的前提是如何支持結論的，並沒有進一步說明從前提到結論詳細推論過程及其依據的邏輯理由。(彭孟堯，2009: 126)

在這裡，我們必須小心探究「導出」的意思，因為「導出」和「證明」的概念有些差異，林教授及彭教授在這裡提到的「導出」或者「推論出來」，其意為根據公理法或自然演繹法的推論規則從前提逐步推論得到結論的過程。所以，與樹枝法所謂的「間接證法(indirect proof)」相對的公理法、自然演繹法等系統，之所以被認為在邏輯課程中有其不可取代的地位，就在於其證明過程為「直接證法(direct proof)」。但是，公理法與自然演繹法並不能用來證明命題邏輯或一元述詞邏輯具有可決定性的性質，原因這些直接證法的演算系統並沒有提供一個機械性的程序決定蘊涵關係成立與否。

> 只要是語句邏輯的有效論證，一定可以依據這十九個規則推論出來；換言之，依據這十九個規則就足以推論出語句邏輯的有效論證。雖然如此，但是我們依據

這些規則推論不出某一個論證，卻仍不足以證明這個論證是語句邏輯的無效論證，因為很可能實際上可以推論出來，只是我們沒有想出而已。(林正弘，1973: 128)

林教授的說法直接指出這個演算系統的困難,如果採取自然演繹法作為演算系統,從前提推論得到結論的推論過程除了依照推論規則之外，還必須具備一些特別的才智或洞見，才能夠找到正確的路徑完成證明。除此之外，還有一個非常弔詭的問題，在思考如何以公理法或自然演繹法證明之前，是否應該都要先確定該論證是有效論證呢？因為如果該論證是無效的，根本就不存在這類演算系統的「證明」，那麼在不確定該論證是否為有效論證的情況下,思考其證明可能是徒勞無功的。然而，令我感到好奇的是，根據上述的分析結果，語意真值圖或樹枝法具有能夠證明論證是否有效的特性，但是卻沒有從前提「導出」結論的；相反地，自然演繹法雖然可以從前提逐步「導出」結論。那麼，接下來的問題是可不可能建立一個轉換形式(transformation)的系統，能夠將語意真值圖或樹枝法的證明，轉換成自然演繹法的證明。如果這個想法是成功的，那麼我們就可以透過「間接證法」的轉換形式，建構自然演繹法等「直接證法」的證明過程。

肆、Beth 的轉換形式

由於語意真值圖或樹枝法等間接證法的形式，和公理法或自然演繹法的直接證法思考方式相當不同，因此，在邏輯課程中通常都會當作獨立的演算系統。但是，我發現早在Beth建構語意真值圖時，就已經開始注意到這個問題，而且他試圖透過語意真值圖建構自然演繹法的證明[15]。以下是Beth的例子[16]：

(A9) $(\forall x)(Px \wedge \neg Mx)$；$(\exists y)(Sy \wedge My)$ $/\therefore$ $(\exists z)(Sz \wedge \neg Pz)$

根據 Beth 的方法建構語意真值圖，首先將前提填入左邊，即語句(1)和(2)，結論則填入右邊，也就是語句(3)。根據推論規則(vii)，出現在左邊的語句(2)是存在量詞，所以必須以新的名稱符號取代，因此，以 *a* 取代變量出現的位置，

[15] Nieland 在 1966 年的論文中，提到 Beth 的方法可以幫助我們思考公理法證明的過程。但是，這個思考也僅限於如果證明論證無效，那麼我們可以了解不存在證明可以從前提得到結論，至於通過語意真值圖證明的有效論證，還是很難找到語意真值圖和公理法證明之間的關連性。然而，語意真值圖卻能夠提供自然演繹法證明的重要資訊，因此，我在本論文中以發展語意真值圖與自然演繹法證明的轉換形式作為主要目標。

[16] 此處使用的記號與 Beth 有些不同。論證(A9)中的第一個前提$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Mx)$，以 Beth 的符號表示，其句式為$(x)[P(x) \rightarrow \neg M(x)]$；而第二個前提$(\exists y)(Sy \wedge My)$，以 Beth 的記號則記為$(Ey)[S(y) \& M(y)]$；至於結論$(\exists z)(Sz \wedge \neg Pz)$則記為$(Ez)[S(z) \& \neg P(z)]$。

得到語句(4)。再根據規則(iv)分解語句(4)，得到語句(5)和語句(6)。接下來考慮語句(1)，截至目前為止只出現 *a* 這個名稱符號，所以，使用規則(iii)，語句(1)的變量位置以 *a* 取代之，得到語句(7)。然後，轉到語句(3)，因為存在量號出現在右邊，所以必須使用推論規則(iii)，以曾出現過的名稱符號取代變量的位置，所以，以 *a* 取代變量的位置得到語句(8)。接下來，由於在左邊有語句(5)，即 *Sa*，因此，從盡量避免矛盾的觀點來看，出現在右邊的語句(8)，根據推論規則(vi)的(c)，應該分成兩個部分，即 *Sa* 和¬*Pa*，但是因為左右兩邊都出現 *Sa* 的部分顯然是矛盾，因此是封閉的部分，所以只要考慮¬*Pa*，也就是語句(9)，而由於¬*Pa* 出現在右邊，根據推論規則(i)，我們就可以在左邊填入 *Pa*，即語句(10)。然而根據語句(7)和(10)，使用推論規則(iv)的(b)，消除因矛盾而封閉的部分，得到語句(11)。最後，根據推論規則(ii)，就可以得到語句(12)。觀察語句(5)和(12)，我們可以發現兩邊均出現語句 *Ma*，因此，整個語意真值圖是封閉的。

成立(*Valid*)	不成立(*Invalid*)
(1) $(\forall x)(Px \rightarrow \neg Mx)$	(3) $(\exists z)(Sz \wedge \neg Pz)$
(2) $(\exists y)(Sy \wedge My)$	(8) $Sa \wedge \neg Pa$
(4) $Sa \wedge Ma$	(9) $\neg Pa$
(5) Sa	(12) Ma
(6) Ma	
(7) $Pa \rightarrow \neg Ma$	
(10) Pa	
(11) $\neg Ma$	

圖 4

由於論證(A9)的語意真值圖是封閉的，因此，(A9)是有效論證。接著，我將說明 Beth 如何將語意真值圖轉換為自然演繹法的證明。(Beth, 1955: 16-7)

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Mx)$	(prem)
(2)	$\underline{(\exists y)(Sy \wedge My)}$	(prem)
(4)	$Sa \wedge Ma$	(+hyp 1)
(5)	Sa	(4)
(6)	Ma	(4)
(7)	$\underline{\underline{Pa \rightarrow \neg Ma}}$	(1)
(10)	Pa	(+hyp 2)
(11)	$\underline{\underline{\neg Ma}}$	(7) and (10)
(9)	$\neg Pa$	(-hyp 2)

(8)	$\underline{Sa \wedge \neg Pa}$	(5) and (9)
(3)	$(\exists z)(Sz \wedge \neg Pz)$	(-hyp 1)

建構(A9)的自然演繹法證明的方法，就是先列出左邊的語句，從(1)到(11)，而右邊的語句則是由下向上逐步列出，也就是(9)到(3)，語句(12)則是直接從語句(11)推論得到的，或者說是兩邊的連接點，因此，在 Beth 建構的證明中並未列出。不過，連接點的想法在建構自然演繹法證明時相當重要，如果我們按照目前大部分的自然演繹法教材提供的推論規則重新建構論證(A9)的證明，可以得到下列的結果：

1.	$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Mx)$	P
2.	$(\exists y)(Sy \wedge My)$	P
3.	$Sa \wedge Ma$	2, EI
4.	Sa	3, Simp
5.	Ma	3, Simp
6.	$Pa \rightarrow \neg Ma$	1, UI
7.	Pa	AP
8.	$\neg Ma$	6, 7, MP
9.	$\neg Pa$	7-8, IP
10.	$Sa \wedge \neg Pa$	4, 9, Conj
11.	$(\exists z)(Sz \wedge \neg Pz)$	10, EG

回到論證(A7)，根據語意真值圖顯示論證(A7)為有效論證，那麼如何能夠將語意真值圖轉換成自然演繹法證明呢？在圖 2 當中，由於出現在(L_1-i)中的語句 G 和右邊出現的語句 G 使得(L_1-i)是封閉的部分，因此，轉向(L_1-ii)建構論證，先以 Beth 的想法建構論證，先列出左邊的語句，再由下而上列出右邊的語句，可以得到下列的形式：

(1) $(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$ (prem)

(2) $(D\vee E)\rightarrow G$ (prem)

(5) A

(11) $C\wedge D$

(16) C

(17) D

(21) B

(20) A

(13) $A\vee B$

(9) E

(8) D

(6) $D\vee E$

(4) G

(3) $A\rightarrow G$

分析上述的證明提供的思考路徑，有幾個重要的關鍵步驟是

值得仔細觀察的。首先，(*a*)從語句(5)到語句(4)說明這個證明應該使用條件證法(CP)的想法，也就是設法從假設語句 A 成立，推論得到語句 G 成立，就可以完成證明。(*b*)根據語句(11)、語句(16)及(17)顯示，如果得到語句 $C \wedge D$ 成立，那麼可以得到語句 C 成立，語句 D 也成立。(*c*)根據語句(21)、(20)和(13)顯示，只要出現語句 A 或者出現語句 B，就可以得到 $A \vee B$。(*d*)同樣地，語句(9)、(8)和(6)也顯示從語句 E 成立或者語句 D 成立，可以得到語句 $D \vee E$。

如何整理上述的資訊呢？將語句 A 連接起來，可以根據(c)得到 $A \vee B$，接下來透過 MP 規則可以得到 $C \wedge D$，就符合(b)的描述，當然就可以得到 D，再根據(d)的描述，可以得到語句 $D \vee E$。最後，利用 MP 規則就可以得到 G。既然可以從假設 A 成立推論得到 G 成立，我們就完成整個證明。其證明過程如下：

1.	$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$	P
2.	$(D \vee E) \rightarrow G$	P
3.	A	Ass
4.	$A \vee B$	3, Add
5.	$C \wedge D$	1, 4, MP
6.	D	5, Simp

7.	$D \vee E$	6, Add
8.	G	2, 7, MP
9.	$A \rightarrow G$	3-8, CP

從上述的分析可以了解，對於有效論證而言，語意真值圖提供了一個相當有效率的思考路徑，雖然建構論證並不會用到所有的步驟，但至少所有證明所需要的步驟都會出現。因此，只要仔細分析語意真值圖提供的資訊，那麼就可以得到建構自然演繹法所需要的步驟。

語意真值圖提供我們從間接證法到直接證法重要的思考途徑。如何掌握兩者之間的轉換形式？首先，語意真值圖中可能會因為推論規則分割成許多部分，為了獲得完整的推論資訊，找到最後決定該論證是否有效的部分。當然，如果該部分未封閉，則寫出反例說明該論證為無效論證，若是該部分封閉，則以該部分的左右兩邊，從左邊的前提開始由上往下列出，而在右邊的部分則是由下往上依序列出。接下來，注意連接點的資訊，例如在論證(A7)中，重要的連接點是語句(5)和語句(20)，因為兩者均為 A；而語句(17)和語句(8)均為 D，則是另一個重要的連接點。根據連接點提供的資訊，我們可以重新建構證明的線性關係，而適當的線性關係可以滿足直接證法需要逐步推論的要求。由此可知，在邏

輯教學上一向把間接證法與直接證法系統視為各自獨立系統的觀點，可能透過轉換形式的研究產生不小的衝擊，不僅能夠讓我們更容易建構自然演繹法的證明，甚至如果能夠進一步建立轉換形式的系統，那麼不單單是真值表法和樹枝法作為說明可決定性的系統，自然演繹法也有機會發展出某些機械性的操作程序。

伍、結　論

我認為如果能夠建立直接證法與間接證法之間的轉換形式，顯然會對邏輯產生非常重要的影響。原因在於雖然樹枝法等間接證法在決定論證的有效性非常有用，但是無法滿足大部分邏輯學家追求直接證法能夠逐步呈現推論的過程的思考過程。但是，早在樹枝法的原型，即 Beth 的語意真值圖，就已經提供了一個思考如何建構直接證法的證明過程的方向，可惜的是並未應用在說明如何建構直接證法的技巧上。基本上，對大部分的論證而言，根據語意真值圖分析能夠呈現論證是否有效。如果是無效論證，當然是建構反例說明該論證無效；反之，如果該論證是有效論證，則至少語意真值圖提供了一個建構證明的框架。

參考文獻

1. 林正弘，《邏輯》，臺北市：三民書局，1973。
2. 林照田、蔡承志，《邏輯學入門》，臺北市：雙葉書廊，2004。
3. 陳瑞麟，《邏輯與思考》臺北市：學富文化，2005。
4. 彭孟堯，《基礎邏輯》臺北市：學富文化，2009。
5. Beth, E. W., Semantic Entailment and Formal Derivability, in *The Philosophy of Mathematics* (1969), eds. by Jaakko Hintikka, Oxford University Press, 9-41, 1955.
6. Boolos G. S. and Jeffrey, R. C., *Computability and Logic*, 3rd edition, New York: Cambridge University Press, 1989.
7. Carnap, R. The Old and the New Logic. in *Logical Positivism*. A. J. Ayer (eds.), The Free Press, 1959, 133-45, 1930.
8. Cauman, L. S., *First-order Logic: An Introduction*, New York: de Gruyter, 1998.
9. Church, A. A Note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic* (1), 40–41, 1936.
10. Copi, I. M. and Cohen, C., *Introduction to Logic*, 10th edition, Prentice-Hall, 1998.
11. Frege, G. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert. Translated as *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, by S. Bauer-Mengelberg in J. van Heijenoort (ed.), *From*

Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

12. Hodges, W., *Logic: an introduction to elementary logic*, London: Penguin Books, 1977.
13. Kant, I.(1998). *Critique of Pure Reason*, translated by P. Guyer and A.W. Wood, Cambridge University Press, 1998. (Oringinal work published 1787).
14. Nieland, J. J. F., Beth's Tableau-Method. *Synthese 16* (1), 7-26, 1966.
15. Smullyan R. M., *First-order Logic*, New York: Springer-Verlag, 1968.

From the New Logic to the New System

Hao-Cheng Fu

Abstract

The prominent empiricist R. Carnap mentioned in 1930 that most logic textbooks were still unaware of the essential difference between traditional logic and the new one though the latter has been developed for half century since G. Frege. It is surprising that the same situation happens today in calculus systems in classical logic. From an inferential point of view, these systems can be divided into two different main strategies, one is called direct proof as axiom system and natural deduction but the other is indirect as tableaux system. The advantage of indirect proof is to provide a decision procedure to decide whether an argument is valid or not. But on the other side, direct proof could represent the derivation step by step. What I am curious is it possible to combine these two advantages via transformation between different systems. So far, most textbooks of elementary logic presented these systems as independent to each other but I found it might be a way to connect indirect proof to direct one. In this essay, I suggest that Beth's semantic tableaux method indeed inspired us to characterize the connection of two strategies of proof.

Keywords: decidability, natural deduction, tableaux system, semantic tableaux, proof