

國立彰化師範大學特殊教育學系

特殊教育學報，民 110，53 期，頁 01-30

DOI: 10.3966/207455832021060053001

替換式數學對增進國小數學學習困難 學生在除法計算與文字解題之成效

楊哲宇

高雄市新庄國民小學

王瓊珠

國立高雄師範大學特殊教育學系

摘要

本研究旨在探討替換式數學對增進數學學習困難學生的除法計算與文字題學習之成效。研究方法採跨參與者多探測設計，以三位國小中年級以上有數學學習困難學生為研究對象。研究結果顯示：替換式數學介入後，數學學習困難學生在除法計算及文字題學習表現，具有立即成效與維持成效。進一步觀察計算和文字題的表現，發現三名學生在替換式數學介入之後，除法計算正確率有明顯提升以及時間變短的趨勢，但流暢性受限於估商能力，還是不夠自動化。除法文字題之正確性雖較基線期明顯提升，但時間並沒有明顯減少，當正確性與流暢性發展不一時，應先確保正確性後，時間長短才有意義。三名個案針對原本規劃的教學介入方案反應各不相同，研究者在教學過程中有針對其反應替換不同的教學策略，才讓學生的學習得以有成效，顯示替換適合策略在替換式數學教學中可能是極為重要的一環。根據研究結果建議：包括繼續探討計算速度能否提升，替換策略與個案學習特質的交互關係，學習單的設計和替換策略亦可有更多元的想法。

關鍵字：替換式數學、數學學習困難、除法、計算、文字解題

通訊作者：楊哲宇 Email: yachyu@gmail.com



壹、緒論

數學是生活重要技能，從購物、買賣，打折、比價、看時刻表，算度量衡、做分配等都離不開數學，所以，學校教育也把「算數」作為 3R（即 reading、writing、arithmetic）之一。由經濟合作暨發展組織(the Organisation for Economic Cooperation and Development, OECD)主辦的全球性學生評量(the Programme for International Student Assessment, PISA)，自 2000 年起，每三年舉辦一次，評量對象為 15 歲學生，內容涵蓋閱讀、數學、科學等三個領域的基本素養和問卷調查，以了解學生面對變動快速之社會的能力，作為一個國家／地區未來國力的指標。2018 年 PISA 報告顯示，臺灣學生數學表現平均 531 分，顯著高於 OECD 平均 489 分（教育部，2019），歷次數學表現在世界的排名都有前五名。另一方面，近三年（2018~2020）國中會考成績顯示，數學落入待加強（C 級）的人數也佔了 28% 左右，將近三成，並非少數(<https://cap.rcpet.edu.tw/>)。因此，針對數學低成就學生的補救教學也應當受到重視，我們要使用有實證研究支持的教學方法來幫助學生更有效地學習數學。

數學的學習是有邏輯順序性的，需要有特定的先備能力才能往下學習。數學的基本運算包含加法、減法、乘法以及除法，是數學重要的先備能力，相對其他三者，除法是較為困難的（楊瑞智，

1997）。除法不只是生活中分裝與平分的概念延伸，更是小數、分數、幾何、因數、代數運算甚至是微積分等的基礎（Dubé & Robinson, 2017; West, 2014），故除法的學習不容忽視。在除法的學習中，最容易遇到的第一個問題就是學生的先備能力不足，除法的學習至少必須精熟減法與乘法。第二個問題是學生在學習除法的過程常常淪為模仿計算而不知計算步驟的意義（Dubé & Robinson, 2017），導致計算過程中容易出錯或是無法判斷應用問題應該使用除法。

詹士宜(2013)提出「替換式數學」，綜合明示教學理論(explicit instruction)，認知負荷理論(cognitive load theory)以及建構式教學(constructivist instruction)。明示教學是仔細分析學生起點行為，循序漸進提供學生符合其程度的內容，讓學生不需要經由太多錯誤嘗試（Archer & Hughes, 2010）。認知負荷理論（Sweller et al., 2003）係考慮學習者工作記憶容量有限性，不宜同時呈現過多新概念，超出認知負荷範圍；除此之外，為避免過渡以教師為中心，灌輸特定解法，降低學生主動學習的樂趣，替換式數學兼採建構式數學的觀點，在教學過程中透過師生互動，從學生的解題歷程中，提供相對應的輔助鷹架，避免學生僅是機械式模仿老師的示範。此外，善用日常生活情境讓學生找出有關解題的要素，促進學生將數學知識轉化為解決日常生活的能力。例如：計程車四人載一臺的情境，配合圖片和簡報動畫，讓學生更能理解為什麼剩下 2 個人仍要再



一臺計程車。在佈題方面，考慮水平與垂直兩個向度，「水平替換」(parallel substitution)是同一難度的問題，僅改變數字大小、詞語、情境等，「垂直替換」(vertical substitution)則是改變問題的難度，逐步增加學習任務的挑戰性。此舉期盼能改善數學學習困難學生在普通班面臨教學速度過快，同類型的練習題又不足的問題。

從 2014 至 2017 年間，有七篇運用替換式數學教學策略之碩博士論文（詳見林和秀，2014；張珮之，2016；許瓊文，2015；郭亭纖，2015；黃美潔，2015；謝妙倖，2015；羅秀珍，2017），其教學對象包括數學學習障礙（如：林和秀，2014；黃美潔，2015）、認知功能輕度缺損（如：張珮之，2016；許瓊文，2015；郭亭纖，2015）、智能障礙（如：謝妙倖，2015；羅秀珍，2017）。介入的主題有整數計算（如：羅秀珍，2017）、分數乘法（如：林和秀，2014；郭亭纖，2014）、小數概念學習（如：張珮之，2016）、乘法文字題（如：許瓊文，2015）、改變類兩步驟加減法文字題（如：謝妙倖，2015）、長度單位化聚（如：黃美潔，2015）等主題，尚未應用到整數除法的介入教學，基於除法是基礎數學運算中比較困難的部分，且將銜接後面諸多數學概念的學習。故本研究以除法作為教學介入的內容。

相對於閱讀障礙，國內在數學障礙無論在鑑定與教學研究受的關注是少的（王宣惠、洪麗瑜，2019；柯華葳，2005）。特殊教育鑑定所引用的《身心障

礙及資賦優異學生鑑定辦法》(2013)，學習障礙將數學困難放在數學運算的層次。而醫療體系在心理衡鑑所依據的《精神疾病診斷與統計手冊》第五版 (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, 5th ed., DSM-5)，在特定型學習障礙所列舉的數學困難則有數感(number sense)，算數實際法則(math fact)，計算正確性或流暢性，數學推理等面向(American Psychiatric Association, 2013)。兩者關於數學困難涉及的範疇並非完全一致。教學實務上的，閱讀障礙學生也可能同時並存數學困難，只是我們賦予次類型時，有的僅標示一項最核心的困難。因此，要確認個案是否為數學障礙，會受到不同專業對數學障礙範疇的影響，也受限於我們標示學習障礙次類型的方式，故本研究以數學學習困難做為參與者的統稱。

綜而言之，本研究旨在探討替換式數學對增進國小數學學習困難學生的除法學習成效。除法內容設定在國小三年級開始引入餘數概念、乘除互逆，數字限制在三位數除以一位數。研究問題有三：

1. 替換式數學對國小數學學習困難學生「三位數除以一位數之除法計算及文字解題」之立即成效為何？
2. 替換式數學對國小數學學習困難學生「三位數除以一位數之除法計算及文字解題」之維持成效為何？
3. 國小數學學習困難學生對本次替換式數學的介入反應個別差異情形為何？



貳、文獻探討

本研究乃係探討替換式數學對國小數學學習困難學生在除法計算與文字解題之成效，以下將先從替換式數學的理論與教學設計談起，然後說明數學學習困難學生的意涵及其在數學學習常見的困難，特別是除法方面。最後，則是分析學者對除法內涵的看法與教學策略，並參酌國內數學課程中除法單元之安排順序，形成本研究之替換式數學除法教學內容。

一、替換式數學

替換式數學教學是詹士宜(2013)所提出的數學教學模式，他認為數學教學應該將概念與技能以細膩的教材設計與教學的結構分析安排才能有效進行適性教學。van den Heuvel-Panhuizen (2008)提到教學過程中教師要考慮學習、教學及課程內容三部分，三者教學過程中相互交織，彼此影響。由於學生的學習速度是逐步與變動的，教師無法固著在某個方法，必須因勢利導，彈性調整各種教學策略，才能在教學過程中想方設法引導學生思考。以下將簡述替換式數學的理論依據和設計原則與方法。

(一) 理論依據

替換式數學教學設計結合明確教學、認知負荷理論以及建構式教學，提供教師多元的教學思考以及彈性的教學應用。明確教學是根據行為心理學而來的，教師直接教導學生明確的步驟，課前先仔細分析教材，以設計結構化教材，了解學生能力，設定目標；課中透

過示範解說明確的知識和步驟，引導學生練習並針對其錯誤給予立即的回饋（詹士宜，2013，2014，2017）。教學步驟和模式非常固定，學生不需要經過太多錯誤嘗試。認知負荷理論則係基於人類的工作記憶容量有限，無法同時處理太多的訊息，認為過多的訊息反而造成學生認知負荷過大(Sweller, 2010)。有效的訊息選擇與處理才能提高學習成效。

Paas 與 van Merriënboer (2020)提到在設計複雜學習任務時可運用認知負荷的注意力分散效應(split-attention effect)、示例效應(worked-example effect)、褪除引導效應(guidance-fading effect)。分散效應提醒設計者不要將訊息分得太散，會讓學習需要費心再把散落各處的訊息重新組織起來。示例效應提醒設計者對於初學者可以先給示例，讓學習者比較容易上手，但上手後，教學者要將協助褪除，一直給示例對已經學會的學習者並沒有幫助，反而是干擾。替換式數學在設計學習任務時也考慮到任務難度的安排，對初學者提供示例，透過水平替換相似難度的例題，讓學生降低認知負荷。當他們比較上手之後也會褪除引導，透過垂直替換將問題難度提升，不過若切割太多細項也讓有一定程度的學生造成干擾，反而會覺得無聊，所以針對學生的個別差異，會減少部分基本能力的垂直替換。

明確教學和認知負荷理論都指出教材設計需要考慮學生的能力現況，不要一下子塞入太多學習內容，學生反而無法吸收。明確教學比較偏向由教師主導



教學，直接教學的優點是減少學生摸索的時間，但也可能帶來負向的影響，對於高層次問題似乎有其侷限。首先，高層次問題多不是由固定的單一路徑去解決，再者，學習者也可能有自己的思考路徑，如果硬要他按照教學者示範的方法解題，可能降低學生數學學習的興趣與主動思考的機會。因此，替換式數學也試著融入建構式教學理論。建構式教學認為學生不是被動的學習者，生活中的數學問題也不是只有一種固定的樣態，學生必須能主動選擇與排除無關的因素才能真正解決問題（詹士宜，2014）。在教學過程中，教師扮演的角色是引導學生參與探索數學問題，教師可採取多元的教學方法，讓學生試著找出解決方法，或許該方法不是最快、最有效的解法，但卻是學生能理解的方式。誠如 Bruner 的鷹架理論(scaffolding)和 Vygotsky 的近側發展區間(the zone of proximal development)的觀點，老師僅是提供暫時性的協助鷹架，幫助學生發展問題解決能力，不是單向將知識灌輸到學生的腦中。有效的切入點是找到比學生能力現況再略具挑戰的任務，讓學生的能力得以獲得提升到更高的潛能區（引自詹士宜，2014，頁 10）。

綜合言之，替換式數學的理論依據有運用直接教學的原則，仔細分析學生起點行為，循序漸進提供學生程度符合的內容。在教材設計時，考慮學生工作記憶容量有限性，不宜同時呈現過多新概念，超出認知負荷範圍；除此之外，為避免單向灌輸特定解法，降低學生主

動學習的樂趣，替換式數學兼採建構式數學的觀點，在教學過程中透過師生互動，從學生的解題歷程中，提供相對應的輔助鷹架，避免學生僅是機械式模仿老師的示範，並不沒有真的理解。

（二）設計原則與替換方法

替換式數學設計分為「水平題型」(horizontal-type problems)與「垂直題型」(vertical-type problems)二種，水平題型是透過相似的題型讓學生不斷的練習和理解，並習得技巧或概念；另一種為垂直題型是一種新的概念或技巧，必須詳細的解釋和說明，甚至更多的例題，直到了解才開始水平題型的練習（詹士宜，2013）。替換式數學透過分析教材和學生能力，比如設定教學目標，把目前學生的能力當作起點，在這兩者之間以最少距離原則設計垂直替換題型與水平替換題型，教學介入是一個不斷「設計——介入——評估——調整設計——再介入」的流程（詹士宜，2017）。

替換方法可從教材上著手，也可以從教學策略做變化。以教材為例，依照水平和垂直替換方式設計題目可做的替換如下：(1)垂直替換主要是考量學生先備能力做概念的替換，學生越有困難需分割的概念越細，或是省略太簡單的概念替換。(2)水平替換，為同類型的題目做略為的變化，比如(a)數字替換，先從小的數值開始，讓學生可以專注於了解計算規則或應用問題的意思，等到了解後再調整數值為適合學生的能力；(b)語詞替換，如人名、物品名稱、動詞替換；(c)語句替換，藉由語句替換可以讓學生



可容易理解題目，或是逐步讓題目由簡單變難，不會因為句子複雜而受影響；(d)情境替換，用學生熟悉的問題情境，增加學生對應用問題的理解。除了教材替換，教學策略也可以替換。教師在教學的過程中須根據學生的學習特性，以及教學後的反應和需求來調整策略和技巧。教學策略包含適切提問、彈性使用策略、營造情境、提供輔助、利用各種表徵、示範解題、解題練習、放聲思考等。

二、數學學習困難

討論數學學習困難學生時，不同研究者常會用不同的詞來命名，比如數學學習障礙、數學障礙、算術障礙或發展性計算障礙(developmental dyscalculia)、數學困難、數學學習困難等；不同研究使用的名稱都有細微差異，不過至少能確定的是這些學生都有學習困難或是低成就(王瓊珠, 2018)。洪儷瑜(2005)把這些學習困難或低成就學生的成因大致上分為障礙和非障礙導致而成，障礙因素可能是個體中樞神經系統損傷或是基因異常等，非障礙因素則可能是環境的剝奪、教育機會的剝奪、個體特質和學習與教學環境的失敗。因此不管是有障礙或是低成就的學生，在學習上都是遇到困難的。在數學上的學習困難，通稱為數學學習困難或數學困難；如果確定是個體因素而導致障礙的話，則稱為數學學習障礙或數學障礙。數學學習困難學生相對數學學習障礙學生的範圍更廣，不過二者所面臨數學的學習困難有相似之處。

教育部 2013 年修訂的《身心障礙及資賦優異鑑定辦法》與美國 2004 年的《身心障礙者教育促進法》(Individuals with Disabilities Education Improvement Act)所定義的數學學習障礙都侷限於數學計算的部分。美國精神醫學會在 DSM-5 中，將數學困難定義為包含難以學會數學事實、計算、數感、和數學推理(利用數學概念、事實、程序去解決問題)(American Psychiatric Association, 2013)。兩者對於數學障礙的問題涵蓋多廣也不一致。最後研究者採取一個較廣泛的數學學習困難的觀點，綜合文獻(如：王雪瑜, 2006；王瓊珠, 2018；郭靜姿, 2002；詹士宜, 2014；趙文崇, 2017)整理出數學學習困難學生在數學學習上經常有以下的问题。

(一) 數學概念不足

對於數學知識不清楚，基礎概念形成或應用有困難，對數學事實的記憶與提取無法自動化，很多名詞的定義當下學完，很快就遺忘或無法應用於解題。如：除數、被除數、商、餘數的概念及其關係是什麼。

(二) 計算錯誤

在基本加減乘除計算過程中，容易出現位值錯誤、基本運算不熟練、數字看錯以及計算程序錯誤，另外可能是學生對於數感、運算符號、數字順序及數量缺乏概念，導致計算上的速度和正確性低落。除法計算失誤可能來自於加減、乘除技能不足，如(1)位值對位、估商、商要補 0、餘數錯誤；(2)加減借位錯誤、大減小等；(3)九九乘法背錯；以



及(4)抄錯數字、忘了寫答等(冷月琴, 2012; 林淑芬、黃建中, 2019; 楊招謨, 2008)。即使計算正確性進步, 但計算所花費的時間也未減少太多, 其原因可能在於無法直接提取一些數學概念, 或是使用一些輔助策略如分解或重組數字(柯華葳, 2005; 洪儷瑜、連文宏, 2017)。

(三) 文字題解題錯誤

文字題解題失誤可能來自四方面, 第一種是理解題意的困難, 第二種是擬定解題計畫的困難, 第三種是不會使用解題策略, 以及第四種執行與校正能力不足。理解題意指的是學生對於題目無法讀懂, 導致無法將題意轉成算式。擬定解題計畫的困難, 常見於題目需要二步驟以上的計算。不會使用解題策略, 無法使用一些解題策略來簡化題目, 比如使用數線、圖形以及畫重點等來幫忙簡化題目。執行與校正能力不足指即使已經列式正確, 仍然無法按照式子計算出來, 或是已經算出正確答案, 在寫答的時候卻寫錯答案或單位。除法文字題常出現的失誤包括: (1)單位數和單位量混淆; (2)被除數與除數分不清楚; (3)盲目使用加法、減法以及乘法; (4)關鍵數字或語詞誤用(冷月琴, 2012; 林淑芬、黃建中, 2019; 楊招謨, 2008)。

(四) 數學焦慮

長期的數學困難可能衍生學生對數學沒有興趣或是高數學焦慮, 以至於想要找各種方法逃避數學課業, 有可能即使會, 仍然不想去答題或覺得困難。

三、除法

(一) 意涵與類型

除法(division)是第一個國小學生所學の間接運算的思考模式, 並非如加法、減法和乘法直接運算即可知道結果; 數學運算上, 除法是乘法的逆運算; 除法包含了「包含除」(quotitive division)以及「等分除」(partitive division); 換成日常情境則分別為分裝(如: 有 40 顆糖果, 每 8 顆分給一位小朋友, 共可分給幾位小朋友?) 以及平分(如: 有 40 顆糖果, 平分給 8 位小朋友, 每位小朋友有幾顆?) 的意思。其中還包含度量為離散量和連續量以及有餘數和無餘數的狀況(李源順, 2013); 除法的運算結果為「單位變化」的過程, 即商的單位與被除數、除數以及餘數的單位意義上皆不同(楊瑞智, 1997)。

許多學者有各自的乘除法語意結構, 其中較為簡潔扼要地為 van de Walle (2001/2005) 的語意結構, 它包含了等值群組、倍數比較、組合與面積測量問題四種題型。Greer 在 1992 年時將乘除法問題依情境模式分為 10 類: 等組(equal groups), 等量(equal measures), 比率(rate), 數量轉換(measure conversion), 乘法比較(multiplicative comparison), 部分 / 全體(part/whole), 乘法改變(multiplicative change), 笛卡爾積(Cartesian product), 面積(rectangular area), 以及數量乘積(product of measures) (引自李源順, 2013, 頁 180) 目前在國小中年級的數學課本中比較常看到等值群組中的等分除與包含除。本



研究主要依照 van de Walle (2001/2005) 等分除與包含除的分類，使用 Greer 十種情境中的等組和等量，配合康軒課本中三年級上下學期的生活情境題，如買東西的情境，「3 罐飲料賣 30 元和原本的 1 罐飲料賣 15 元，哪一種划算？」以及餘數的應用；如「10 個人搭車，一車載 3 人，需要幾輛車？」算起來商是 3，其實還要加一輛才夠。

(二) 教學順序與重點

除法的教學有許多需要留意的重點，綜合李源順(2013)和 van de Walle (2001/2005)的看法，以下從教學順序和教學重點討論之。

1. 教學順序

教學除法時，應先從包含除開始，從概念性知識內化為程序知識，最後進行解題性知識，必要可以混和加法、減法以及乘法。

(1) 概念性知識

除法的基本概念可以從加法、減法以及乘法慢慢推論。在使用加法和減法語意轉換要確定學生是否能連結至乘法。等分除用加法和減法來推論會涉及語意轉換，如果學生會乘法，可以直接連結除法概念就好。

在三位數除以一位數的題目類型中，商可以用幾個百、幾個十以及幾個一的方式來讓學生逐步做除法，幾個百除完剩下的數，可以轉換單位變成幾個十依序算下去。計算過程可以用具體的表徵可能是積木或金錢來表示，讓學生覺得每個步驟是有意義的，再漸漸轉變成抽象表徵，解決學生只知道程序性知

識不知道算式意義的錯誤(Milton et al., 2018)；另一種方式是直接用原本的量值去做，如 $240 \div 3$ ，在直式運算時依照九九乘法來做，3 最多乘到 10 等於 30，一直重複這樣的步驟，240 重複一直減 30，最後減 8 個 30，答案就是 8 乘於 10 等於 80，這種方法適合學生無法理解 2 個百為何不能除以 3 的另一種理解方式。

(2) 程序性知識

除法計算建立在乘法的概念性知識，最重要的就是九九乘法，如何讓學生快速記憶九九乘法有兩個方式，第一個要讓學生了解乘數加一，就要增加一個被乘數；第二個讓學生進行反背，給一個數讓學生答出是哪兩個數相乘或是用某一個數練習乘到最接近且不超過的數字。在教授除法時，強調每個步驟都使用九九乘法來估商，被除數為多位的時候，從最高位一位數慢慢判斷是否能除，有可能會有最高位不夠，要繼續看到下一位，中間不夠的時候需要補 0 的程序性知識。另外必須判斷是否除盡，沒有除盡有兩種方式，繼續寫在商上面或擦掉重新估商。

(3) 解題性知識

解題性知識可分為情境結構、語意結構以及運算結構。情境結構就是所謂的量可以分為一維連續量(繩子)、二維連續量(蛋糕)以及離散量(蘋果)的情境，其中離散量是最容易理解除法的意義的。語意結構指的就是除法文字題可分為等分除(總量 \div 單位數=單位量)和包含除(總量 \div 單位量=單位數)。運



算結構就是配合語意結構，有總量未知的題型、單位數未知的題型以及單位量未知的題型。

2. 教學重點

除法的教學有五個重點，包含九九乘法的記憶、估商的技巧、0 的除法、除法的用語以及餘數的意義，分述如下。

(1)九九乘法的記憶

除了練習精熟九九乘法外，觀察九九乘法中的規則，如乘法的兩個數字可以顛倒，乘數加一代表被乘數再加一個，或是用反背的方式，一開始是剛好的數字，如 5 乘多少會是 25，漸漸轉成最多只能接近的計算，如 5 乘多少會接近，且不超過 26，過程可用具體物操作，逐步褪除到抽象的九九乘法記憶。

(2)估商的技巧

最一開始的除法是二位數除以一位數，商是一位數，學生多半使用九九乘法直接找尋答案，而沒有判斷是否可以除，三位數除以一位數就要要求學生從百位開始一個一個數字慢慢除，如果學生一時有困難可以先從一位數除以一位數。

(3) 0 的除法

因為除法的原始概念就是分配，被除數可以是 0 代表沒得分配，除數不能為 0，因為沒有意義，違背要分配的動作。

(4)除法的用語

容易混淆的用語為「除以」和「除」，被除數在前面會說「除以」，除數在前則會說「除」。有些題目會說「儘量分完」會有學生主觀題意的疑慮，認為他已經

努力分完了。另外必須澄清「沒有餘數」和「餘數等於 0」的概念是一致的。

(5)餘數的意義

生活中的計算很少是整除的，從編題來看盡量不要都是完全整除的數字，而餘數也是判斷是否估商正確指標。從運算來看，除法的運算可以留下餘數或直接算成分數。餘數在文字題有可能有兩種處理方式，分別為捨去和商加一的方式，餘數捨去的題目比如「15 公尺的線，2 公尺可以綁一個禮物，請問可綁幾個禮物？」餘數要變成商加一的題目比如「搬運工人一次可以搬 3 個箱子，有 17 個箱子要搬，請問只有 1 個工人要搬幾趟？」

綜合上述，除法的教學需要從概念性知識逐步養成學生分裝或平分的概念，並且以具體表徵教導學生如何估商計算使每個步驟有意義，最後在文字題的時候，除了了解包含除與等分除的概念，盡量與生活情境接近，還可以套入不同的餘數處理情境。

(三) 國小數學課程除法內容分析

國小數學課程除法單元的安排，最早從二年級的分裝與平分帶入除法的基本概念。三年級則開始正式介紹除法包含有餘數的狀況、乘除互逆的驗算技巧，數字大小限制在三位數除以一位數。四年級則將數字增加為四位數除以一位數和三位數除以二位數。四年級開始介紹分數，除法是分數概念的基礎，約分和帶分數與假分數的互換都需要除法的熟練。五年級將數字增加為四位數除以三位數、除以二位數的題型。需要



有除法的先備概念單元有整數四則運算、因數與倍數、分數的除法以及時間的除法等。六年級除了分數的計算外，加入了小數的除法，其他如比與比值、導出量單位、速度、驗算、圖形面積計算、圖形縮小和比例尺都建立在有除法概念的基礎上。

從各個年級的安排中，整數除法最重要的熟練時期為三、四年級，到了高年級時，除法都是其他概念的重要先備技能。因此本研究主要針對三年級的除法內容介入研究。

參、研究方法

一、研究設計

本研究旨在透過替換式數學提升國小數學學習困難學生的除法的學習成效，採取單一個案研究法之跨參與者的多探測設計，自變項為「替換式數學」，依變項為數學學習困難學生接受替換式數學教學後，在研究者自編「除法測驗」之正確率。

整個實驗包括三個時期：基線期、介入期、維持期。基線期沒有任何替換式數學教學，個體在除法測驗至少連續三點呈現穩定、未改善的趨勢後，始進入介入期，在介入期每次教學後實施評量，當第一個個案第一點得分正確率達到 80% 之後，始蒐集下一個參與者基線，當個案在介入期的除法測驗連續三點正確率達 80%，始進入維持期，並介入下一個參與者。維持期於撤除教學介入隔週施測，蒐集至少三個資料點。

為增進研究的內在效度，研究者進行以下幾方面的控制：(1)確保參與者的學習除法先備及現況能力相似；(2)教學皆由第一位研究者擔任；(3)介入前請三位專家檢核介入方案之內容效度，篩選個案時請參與者之導師檢核方案之目標效度，確定學生在數學的學習是有困難的，並於介入後請熟悉國小數學的老師透過「介入完整性檢核表」檢核程序信度，檢核項目比如垂直替換題目的示範以及學生水平替換題目的練習；(4)介入前請專家檢核「除法測驗」的內容效度，並選擇四年級學生做預試分析複本信度，而除法測驗的測驗時間和評分方式皆固定不變；(5)研究過程避免多重介入，確定學生已學習過整數除法仍沒有太大的學習成效；(6)介入的時間點和測驗的時間點維持固定不變。

二、研究參與者

研究參與者為三名在三位數除以一一位數學習有困難之國小學生，皆經鑑輔會鑑定為學習障礙，排除因情緒、文化以及感官因素導致之一般學習低成就者。個案一和三的次類別為數學障礙，個案二的次類別為書寫障礙（見表 1）。

研究參與者的篩選條件為國民小學及國民中學補救教學科技化評量（今更名為學習扶助科技化評量）中未達及格標準，魏氏智力測驗全量表分數為 75 以上、基礎數學概念評量在加法、減法以及九九乘法的分測驗的正確率（正確的題數／已完成的題數）都能大於 80%、中文年級認字量表至少達二年級水準以上，以及對於起點行為評估自編



測驗中的三位數除法的計算題和文字題的測驗答對率未達 50%。研究者使用「起點行為評估自編測驗」乃係確保學生的能力狀況，該自編測驗共四大題，包括二位減二位借位減法 10 題、九九乘法 10 題和三位數除一位數的計算和文字題各 8 題，共 36 題，測驗時間為 40 分鐘。若研究參與者識字量未達標準，會使用替代方式如報讀；九九乘法未熟練，則使用計算機輔助估商的計算或是提供九九乘法表。

個案一是五年級的學習障礙生，三年級的除法學習內容卻遺忘了。個案二

經過原班的教學介入後，仍沒有學會除法的學習內容。個案三是四年級，已具備除法基本能力，但是除法文字題的理解仍有困難。三者皆有接受特教服務，但已確定無重複介入除法的策略，介入的順序將從最需要協助的高年級個案一開始，然後是個案二，最後是除法計算能力較佳，但文字題無法作答的個案三。三者介入的時間地點皆固定，個案三因為除法計算能力較佳，所以在針對計算的教材部分有做刪減，著重在文字題的部分。

表 1

個案基本資料

個案姓名	個案一	個案二	個案三
年齡／年級	5 年級	3 年級	4 年級
特殊身分	學習障礙 (次類別：數學障礙)	學習障礙 (次類別：書寫障礙)	學習障礙 (次類別：數學障礙)
魏氏智力測驗四版	全量表智商：85 語文理解：97 知覺推理：97 工作記憶：75 處理速度：78	全量表智商：91 語文理解：105 知覺推理：99 工作記憶：100 處理速度：65	全量表智商：91 語文理解：101 知覺推理：89 工作記憶：91 處理速度：92
基礎數學概念評量	加法正確率 1.00 減法正確率 0.84 九九乘法正確率 1.00	加法正確率 1.00 減法正確率 0.68 九九乘法正確率 1.00	加法正確率 1.00 減法正確率 0.95 九九乘法正確率 0.80
起點行為評估 自編測驗	減法正確率 0.80 九九乘法正確率 0.90 除法計算題 0.25 除法文字題 0.25	減法正確率 0.90 九九乘法正確率 0.90 除法計算題 0.25 除法文字題 0.00	減法正確率 1.00 九九乘法正確率 1.00 除法計算題 0.75 除法文字題 0.00
中文認字量表	達小五程度	達小三程度	達小二程度



三、介入方案

(一) 教材設計

基本的除法概念為被除數、除數、商以及餘數。被除數就是拿來被平分或分裝的數，除數就是要分裝或平分的數量，商就是分裝完或平分完的數量，餘數就是被除數無法被整除所剩下的數量。在國小數學課程中最常見的為「包含除」和「等分除」的概念運用。「包含除」為分裝的概念，將物品依照某個數量下去包裝。「等分除」為平分的概念，將物品平分成固定數量的份數。當分裝或平分完後，不一定整除，剩下不夠平分或分裝的部分即為餘數，重要的概念為餘數必須比除數小，否則仍然可以再平分。

進行除法計算時，被除數、除數以及商的位置要正確，計算過程中要會估商，判斷商數是否正確，當餘數大於除數時，表示低估商數，必須增加商數，讓餘數小於除數，才執行下一位數，下一位不夠除時，商數需要補零。研究者依照被除數、商，以及除數的數值大小，將除法教材分為計算題和文字題兩部分，先進行計算單元教學，後進行文字題教學。計算題的垂直變化依序為：二位數除一位數（整除），三位數除一位數（整除），二位數除一位數（有餘數），三位數除一位數（有餘數）。文字題的垂直變化依序為：等分除，包含除，以及除法在生活情境應用（如：搭車所需車輛數，物品比價，均攤費用等），至於水平替換則從數字，語詞，語句幾方面做調整。本研究之替換式數學

教學問題結構單垂直替換及水平替換的示例見表 2。

(二) 教學流程

本研究每節教學時間為 40 分鐘，每節課有準備活動、發展活動以及綜合活動，教學流程示例見表 3。替換式數學介入方案由研究者實施，教學目標為能計算三位數除一位數的計算題以及文字題，實施時間為外加式的時間，如午休、課後照顧以及放學後補救教學時間，依學生能配合的時間再調整，每週 2 堂課，皆為一對一授課。總共課程共有 7 個單元，每個單元預計上一節課，各單元規劃如表 4，研究者會依學生學習狀況是否達成預設的標準而增加或減少單元的授課節數。資料點的蒐集（除法測驗）皆在課程後馬上實施，限時 15 分鐘。

替換式數學方案初稿編寫完成後，研究者請特教系教授審核方案的內容效度。專家建議將 0 的除法可以放在最後一節。引起動機可先統整上一節的東西。先教完整除的計算後，再教有餘數除法，最後才文字題。研究者參考專家的意見調整調整教學方案的內容以及目標，並在正式介入前做前導研究，前導研究的個案為教師推薦一名三年級在除法學習有困難的學生，實施後發現被除數在除完高位數字後的餘數和下一位數字放下來的移動容易影響學生答題正確率，使用簡報軟體呈現較無法及時因應學生反應修正算式，因此，在呈現算式過程中視學生情況加入有格子的除法直



表 2

垂直替換與水平替換示例

類別	垂直替換	水平替換
二位數除以一位數（整除）	$16 \div 2 = 8 \dots 0$	數字替換
商為一位數或二位數	$24 \div 2 = 12 \dots 0$	數字替換
三位數除以一位數（整除）	$224 \div 2 = 112 \dots 0$	數字替換
商為三位數，無 0	$204 \div 2 = 102 \dots 0$	數字替換
商為三位數，有 0	$200 \div 2 = 100 \dots 0$	數字替換
商為二位數，無 0	$124 \div 2 = 62 \dots 0$	數字替換
商為二位數，有 0	$120 \div 2 = 60 \dots 0$	數字替換
二位數除以一位數（有餘數）	$17 \div 2 = 8 \dots 1$	數字替換
商為一位數或二位數	$25 \div 2 = 12 \dots 1$	數字替換
三位數除以一位數（有餘數）	$225 \div 2 = 112 \dots 1$	數字替換
商為三位數，無 0	$205 \div 2 = 102 \dots 1$	數字替換
商為三位數，有 0	$201 \div 2 = 100 \dots 1$	數字替換
商為二位數，無 0	$125 \div 2 = 62 \dots 1$	數字替換
商為二位數，有 0	$121 \div 2 = 60 \dots 1$	數字替換
等分除文字題	有 120 顆糖果，要分給 5 個人，請問一個人	數字替換
二位數除以一位數	可以拿到幾顆糖果？	語詞替換
三位數除以一位數	答：24 顆糖果	語句替換
包含除文字題	有 120 顆糖果，6 顆糖果裝成一袋，可以裝	數字替換
二位數除以一位數	成幾袋？	語詞替換
三位數除以一位數	答：20 顆糖果	語句替換
	14 個人搭計程車，4 個人搭一輛，要幾輛計	數字替換
	程車才夠？	語詞替換
	答：4 輛	語句替換
生活情境題	6 個肉包要 150 元，1 個肉包要多少元？	數字替換
二位數除以一位數	答：25 元	語詞替換
三位數除以一位數		語句替換
	泡麵，3 袋裝要 135 元，5 袋裝要 122 元，	數字替換
	請問哪一種比較貴？	語詞替換
	答：3 袋裝的比較貴	語句替換
	5 個人去用餐共花了 600 元，平分花費，1	數字替換
	個人要付多少錢？	語詞替換
	答：120 元	語句替換



表 3
教學流程

活動	時間 (分)	教師示範	學生課中練習	學生 評量
準備 活動	5	<ol style="list-style-type: none"> 一開始說明課程內容、方式、課程目標以及評量方式 複習前一堂所教學的部分 每堂教師示範估商技巧，示範完請學生講出每個步驟 (寫一個三位數除以一位數直式除法，遮住十位以及個位，留下百位，用九九乘法估商，減完後教師示範放聲思考，餘數是否小於餘數，確定無誤後把遮住的十位繼續呈現，放置餘數旁再繼續估商，重複這樣的步驟) 複習九九乘法 (教師給予數字，學生用固定的數字乘到最接近的數) $5x (\quad) = 25$ $5x (\quad)$ 最接近 26 	<ol style="list-style-type: none"> 一開始能說出上課的時間、地點和方式。 口頭回答 能說出步驟 (教師只有一步驟一步驟的計算，請學生說明這一步是不是對的，下一步怎麼做) 能使用固定數字乘出最接近老師給的數字 	學生 評量
發展 活動	30	<ol style="list-style-type: none"> 教師先說明概念 (用具體表徵和生活情境例子) 教師舉例包裝食物或分糖果 示範垂直替換例題 (明確教學)，如果學生不能懂，再換策略或例子或是使用適合的表徵提示 (建立鷹架) 評量學生的水平例題解題歷程，給予回饋 (解題歷程檢核單，更正學生的錯誤) 	<ol style="list-style-type: none"> 回答類似生活的情境例子 能說出示範例題的每個步驟意思 練習水平例題 	
綜合 活動	5	<ol style="list-style-type: none"> 統整本節課學習的內容並簡單複習概念 	<ol style="list-style-type: none"> 重複敘述概念 	做除法 測驗



表 4

替換式數學除法單元規劃

單元	主題規劃
單元一	二位數除以一位數（商為二位數或一位數）整除，九九乘法
單元二	三位數除以一位數（商為三位數或二位數）整除，補 0 的技巧
單元三	二位數／三位數除以一位數，有餘數，餘數的合理性
單元四	包含除文字題
單元五	等分除文字題
單元六	餘數的使用文字題
單元七	生活物品單價的計算文字題以及平均花費的文字題，除法迷思

式表格，過程中以簡報為主，如有需要再加白板計算示範。

（三）教材與教學的垂直與水平替換

教學前將三位數除法的概念分析後垂直替換概念分成七個單元細項。針對這七個單元做水平的替換，計算題主要用數字替換，讓計算過程趨於一致，如二位數除以一位數的結果可能商為二位數或一位數，是否有餘數，中間再逐步進入商為三位數，加入需補 0 的類型。文字題除了數字的替換外，主要是採取情境、語詞、語句等的替換，讓學生學會不同情境的文字題解題教學中策略替換。

教學者依據學生除法計算與文字解題的錯誤，採取若干教學策略因應，茲說明如下。

1. 計算題方面

(1) 計算過程不理解

透過實際物品數量的分配或包裝或是鈔票的分配，每一步驟配合圖片的操作讓學生了解計算過程的原因，特別是三位數字中，百位除完，為何餘數要和

十位一起算，可透過鈔票的百元換成十元的歷程讓學生了解。如果步驟不熟練則加入簡單的步驟記憶策略（乘法、減法、下一位數字掉下來）。

(2) 估商錯誤——餘數過大

熟練九九乘法。練習乘到最接近被除數且不超過的數字，或是發現餘數過大的時候，再重複計算，將餘數當作被除數，再除一次，最後的商全部加起來。

(3) 估商錯誤——忘記補 0

要求不管學生是否能一次將九九乘法背出，皆須一位一位去除，不夠的地方就要補 0，比如 24 除於 3，即使 2 明顯不夠除，仍需要補 0 在商數（寫成 08）。

(4) 數字位置錯誤

在計算過程中加入格子及陰影，讓學生比較好將數字排整齊，或是將數字做成數字卡，讓學生用操作的方式排列數字卡，較容易將計算過程排列整齊。

2. 文字題方面

(1) 題意不理解不會列式

用簡報的圖片及動畫實際說明題目的涵義，關鍵句子可以透過劃記或加粗



來讓學生了解那些句子有平分和分裝的意思。

(2) 答的單位寫錯

讓學生練習觀察問號前的句子或是用圈選的方式留意答的單位為何。另一種方式則是在直式中的每一個數字加入單位，讓學生更清楚被除數、除數以及商數的單位是什麼，這樣就能了解單位的變化。

(四) 教學一致性檢核

整個教學過程會錄影，教學介入完，抽選 3 堂課（四分之一的節數）的錄影請校內一位有數學教學經驗的普通班老師觀看，並透過「教學方案介入完整性檢核表」檢核程序信度，檢核項目如垂直替換的示範，學生水平替換的演練等教學步驟是否有實行。教學之介入完整性比率公式如下：實際達成步驟／應達成之步驟 $\times 100\%$ 。研究結束後介入的完整性比率為 80%，評分者表示基本上都有維持替換式數學的程序，未能達成部分原因為在設計步驟時設計較細，比如驗證餘數的合理性在教導整除的題型並未需要執行此步驟。

(五) 教學成效評量

教學成效評量使用自編除法測驗，共有 20 個複本，皆遵循相同架構，有計算題和文字題兩大部分，各有 5 題，共 10 題，數字皆為三位數除一位數。計算題的類型為「商為三位數無須補 0」1 題、「商為三位數需補 0」2 題，「商為二位數補 0 和不須補 0」各 1 題，5 題中 3 題有餘數。文字題的類型為「等分除文字題」1 題、「包含除文字題」1 題，以及「生活情境題」3 題。

初稿編製完成後邀請三位特教系教授及一位資深中年級的教師進行內容效度的檢核，專家提供的意見包括：題數可增加；文字題評分方式可再細分；部分文字題描述會影響難度，一些較抽象的用詞如「分攤」、「划算」、「看診」等可再修正。另外從 20 份中隨機抽選 4 份，請 23 位國小四年級已學過三位數除一位數的學生進行預試，表 5 為複本間皮爾森積差相關分析，顯示複本多達顯著水準為 0.01 時達顯著相關，只有第一份和第四份的相關未達顯著，但它們又各自與第二、三份有顯著相關，所以仍予以保留。

表 5

自編除法測驗複本之相關係數

	第一份	第二份	第三份	第四份
第一份				
第二份	.766**			
第三份	.682**	.706**		
第四份	.391	.578**	.632**	

註：**代表相關性在 0.01 層級上顯著（雙尾）。



計算題計分方式為計算過程正確得一分，括號內填入正確答案得一分，計算部分滿分 10 分。文字題計分方式為文字題列出式子或說明題意得一分，計算過程正確得一分，寫出正確答案和單位得一分，文字題滿分 15 分。除法測驗包含計算與文字題各五題，合計 25 分。

肆、結果與討論

一、結果

三位個案在各階段除法測驗得分正確率如圖 1 所示。研究結果除了呈現除法測驗整體正確率外，各階段之計算題與文字題之平均得分與作答時間（見表 6），個案在不同階段及不同題型的表現，茲說明如下。

（一）個案一

1. 除法測驗整體表現

個案一在基線期除法測驗平均正確率是 18.67%，呈現水平的趨勢，符合預期末改善的狀況；在介入期時，經過 7 次教學後，平均正確率為 60.57%，趨勢是呈現正向的，最後三點達到標準(80%)後，隔週進入維持期；在維持期的平均正確率是 81.33%，趨勢仍保持穩定正向。介入期與基線期的平均水準變化為 41.90%，趨勢的變化為正向，重疊率為 0%表示有立即效果；維持期與介入期的平均水準變化為 20.76%，重疊率為 100%，趨勢的變化仍保持無變化，表示有維持效果。

2. 除法計算題表現

個案一在基線期、介入期、維持期之計算題平均得分，分別為 2 分、6.86 分、8.67 分，計算正確性逐步提高。在基線期、介入期、維持期之平均作答速度，分別為 4 分鐘、3 分 56 秒、3 分 33 秒，平均花費時間並沒有相差太多。從作答錯誤分析來看，個案一最大的困難在於補 0 的技巧，以及估商的正確與流暢性，個案常常需要花很多時間在估商上，無法直接敏銳的乘出接近的數字。教學者因應的策略是直接請個案把九九乘法寫出來再來判斷，但即使使用這樣的策略，到了維持期仍會有這樣的困難，只是錯誤會減少許多。

3. 除法文字題表現

個案一在基線期、介入期、維持期之文字題平均得分，分別為 2.67 分、8.29 分、11.67 分，文字題的正確性逐步提高。在基線期，介入期，維持期之平均作答速度，分別為 5 分 2 秒、6 分 11 秒、6 分 29 秒，平均花費時間反而增加，可能是基線期個案用簡單的加減乘去計算，所以，時間較短但正確率也低。從作答錯誤分析來看，個案一在基線期主要的錯誤為不會正確列式，但在介入期第四個點開始接受文字題的教學後，文字題成績開始進步，個案一最大的困難在於餘數使用商加一的單元（如：14 個人搭計程車，4 個人搭一輛，要幾輛計程車才夠？），這類題型即使到維持期還是未精熟。



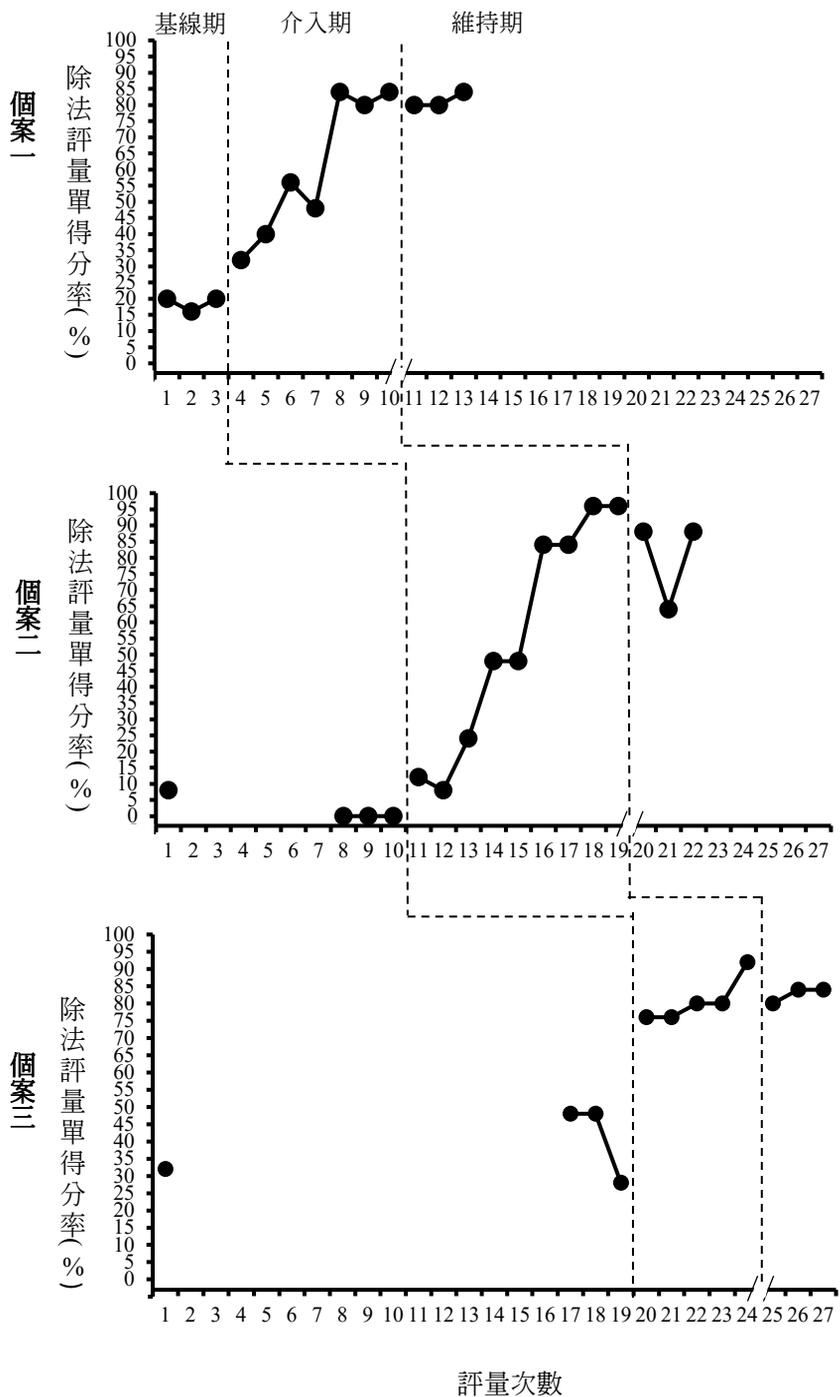


圖1 三名個案各階段除法測驗得分正確率。

註：介入期與維持期的//表示隔週。



(二) 個案二

1. 除法測驗整體表現

個案的初始基線探測為 8，在個案一達到預定標準的第一點(80%)時，個案二即開始蒐集基線期資料，基線期排除初始基線的平均水準是 0，趨勢呈現穩定無改善，比預期中經過原班教學後會進步一些的狀況還要差，因為相較初始基線探測是退步的，同時可以知道沒有產生基線行為共變；在介入期時經過 9 次教學後，平均正確率 55.56%，趨勢是呈現正向的，最後三點達到標準(80%)後，隔週進入維持期；在維持期的平均正確率 80%，仍保持水平的趨勢。介入期與基線期的平均水準變化為 55.56%，趨勢變化為正向，重疊率為 0%，表示有立即效果；維持期與介入期的平均水準變化為 24.44%，重疊率為 100%，趨勢變化為正向，表示有維持效果。

2. 除法計算題表現

個案二在基線期、介入期、維持期之計算題平均得分，分別為 1 分、6.44 分、9.67 分，計算正確性逐步提高。在基線期，介入期，維持期之平均作答速度，分別為 5 分 32 秒、6 分 23 秒、3 分 43 秒，平均花費時間在基線期與介入期並沒有相差太多，直到維持期才有明顯的變化。

在介入期開始接受連續 4 節課的除法計算教學，發現個案的計算錯誤反應與基線期相同，所以，額外加入記憶策略（除法計算步驟：乘法、減法、下一位數字掉下來），數字用具體圖卡操作，讓學生移動圖卡來體會下一位數字放下

去的意思，但是仍不是很熟練，故第四次介入教學，改在直式畫格子和陰影提示個案，等到個案掌握除法規則後，再褪除成一般空白直式。整體來看，個案二的估商的速度只有部分可以直接乘出，多數仍需從乘 1 開始尋找適合的數字，也容易犯乘數過大，餘數過大，數字移位錯誤，小數減大數，誤用補 0 規則。

3. 除法文字題表現

個案二在基線期、介入期、維持期之文字題平均得分，分別為 0 分、8.40 分、10.33 分，文字題的正確性逐步提高。在基線期、介入期、維持期之平均作答速度，分別為 6 分 18 秒、8 分、10 分 42 秒，平均花費時間反而增加，但需要把正確性一併考慮，基線期對於文字題都無法正確回答，所以時間看似比較短，不代表比較好。在介入期時，全部的題型都已經學會，錯誤類型只剩下單位寫錯及數字抄錯。針對單位弄錯的部分，教學者讓個案在直式的數字旁寫上單位。在維持期的時候，個案二已經遺忘商加一的題型和列式中被除數和除數擺放的位置，將除數和被除數兩者錯置。

(三) 個案三

1. 除法測驗整體表現

個案三的初始探測的正確率為 32%，在個案二第一點達到預定標準(80%)時，個案三即開始蒐集基線期資料，基線期排除初始探測的平均正確率為 41.33%，雖然基線平均正確率比初始探測高，趨勢是呈現負向，仍有介入的需求，符合預期的狀況。另外，因為個



案三與個案二及個案一是不同學校的，也排除學校老師額外的教學介入，可以確定不會有基線行為共變；在介入期時經過5次教學後，平均正確率為80.80%，趨勢是穩定正向的，最後三點達到標準，隔週進入維持期；在維持期的平均正確率為82.67%，趨勢仍保持穩定正向。介入期與基線期的平均水準變化為38.47%，趨勢變化為正向，重疊率為0%，表示有立即效果；維持期與介入期的平均水準變化為1.87%，重疊率為100%，趨勢變化保持無變化，表示有維持效果。

2. 除法計算題表現

個案三在基線期、介入期、維持期之計算題平均得分，分別為7分、8.40分、10分，計算正確性逐步提高，但進步不是很明顯，主因為個案三一開始就有一定的基礎，所以無法非常明確看出差異。在基線期、介入期、維持期之平均作答速度，分別為3分34秒、3分9秒、2分32秒，計算時間是三位個案中最快的，基線期和介入期階段間的差異不大，維持期時間有較明顯的減少。個案三在起點行為評估時，除法計算的正確率就有0.75，所以，不純然是介入的效果，只是介入後，計算正確率更高，速度更快。從作答錯誤分析來看，個案三對於估商的正確性以及餘數的合理性的概念可能並不是那麼熟悉才導致失分。

3. 除法文字題表現

個案三在基線期、介入期、維持期之文字題平均得分，分別為3.33分、

11.80分、10.67分，文字題的正確性逐步提高。在基線期、介入期、維持期之平均作答速度，分別為4分40秒、7分17秒、10分23秒，平均花費時間反而增加，但需要把正確性一併考慮，基線期文字題的平均得分僅有3.33（約兩成的正確率），所以時間看似比較短，不代表比較好，個案三在基線期都是加、減、乘去計算，所以花費時間較短，從作答錯誤分析來看，個案三主要的困難是理解題意，特別是餘數使用商加一的單元，這部分只在單元教學介入完的除法測驗答對，進入維持期就完全遺忘。另外，個案三常不定時出現的錯誤為單位錯誤，因此教學過程中，教師會詢問除法直式各個數字的涵義，確保個案瞭解數字的單位，但狀況仍不夠穩定，推測原因可能是撤除介入太快，僅接受3.5節文字題介入教學。

二、討論

綜合三名個案在替換式數學教學介入後，除法測驗的正確率在介入期比基線期高，撤除教學介入後，維持期仍有與介入期差不多的表現，可知替換式數學對數學學習困難學生除法計算及文字題有立即與維持成效。本研究結果與林和秀(2014)、許瓊文(2015)、郭亭纖(2015)、黃美潔(2015)、謝妙倖(2015)、羅秀珍(2017)的研究結果相似，亦支持替換式數學結構單以及教學設計是有效的。替換式數學之所以有效的原因，以及教學實踐時遭遇困難的因應策略，茲分述如下。



表 6

三名個案在不同階段除法計算與文字題之平均得分與答題時間

階段	基線期		介入期		維持期	
	計算	文字題	計算	文字題	計算	文字題
個案一	2 (4:00)	2.67 (5:02)	6.86 (3:56)	8.29 (6:11)	8.67 (3:33)	11.67 (6:29)
個案二	1 (5:32)	0 (6:18)	6.44 (6:23)	8.4 (8:00)	9.67 (3:43)	10.33 (10:42)
個案三	7 (3:34)	3.33 (4:40)	8.4 (3:09)	11.8 (7:17)	10 (2:32)	10.67 (10:23)

註：() 內表示時間，單位為分：秒。

(一) 教師要精熟內容並隨學生差異調整

研究者認為教學者有三個部分需特別注意，第一部份是教師本身對於數學知識的理解透徹，本研究的除法除了參考數學課本的題型去分析之外，也參考了楊瑞智(1997)、劉秋木(2009)和 van De Walle (2001/2005)數學科教材教法專書進行除法的概念性知識和程序性知識編題，才可以將垂直替換與水平替換的結構單設計成較為結構化。第二部分需要了解學生的能力現況及其因應策略，本研究整理文獻分析數學困難學生各個方面的特徵，並針對除法部分的錯誤類型去因應調整策略。第三個部分是策略的替換或調整結構單，因為學生有個別差異，一樣的除法教學往往會有不同的反應與錯誤類型，替換式數學對於這樣的狀況有提到需要替換教學策略與技巧或調整結構單的設計，本研究主要的考量是因應學生個別差異替換策略，不考慮調整垂直替換設計是因為分得更細，一

方面會讓知識更零碎，另一方面會讓授課的節數拉長，所以只考量替換策略。針對錯誤類型去替換策略很需要教師本身經驗的累積與對教學法的知能，這是在替換式數學執行面上可能會遇到的挑戰。

(二) 提升作答正確率不只是多做練習題

教學過程中，學生除了從老師的示範與解釋中學習，亦可以對照水平例題，比如寫到水平例題 2 的時候不太確定該怎麼算，學生可以參考前面的範例或水平例題模仿運算，個案二在研究過程中有發現原來水平例題都是同類型的題目，所以解題的方式都一樣。另外，研究過程發現水平例題雖然學生的反應是不錯的，實際上在真實能力上並未達到，如個案一的教學反應多是獨立完成與引導完成，在測驗評量卻不如預期，於是讓他將同樣的一份結構單當回家功課加強練習，在除法測驗馬上見效，可惜效果並沒有維持到下一次評量，因此



未來建議除了原本的水平替換練習，可加入重視理解的練習方式，比如學生自己模仿題型出題並解題，讓學生更了解題型的意思與架構，進而解題。

在學習單的設計上，學習障礙學生在寫原班課本習作可能會遇到題目轉換過快或水平練習不足的問題，導致很難從中得到成就感。資源班的學習單雖能簡化、減量設計讓學生較能理解，假使教學規劃缺乏整體性，無法將數學單元中的內容如替換式數學使用垂直替換的方式有系統地呈現，即使讓學生寫例題，大多數一到兩題就結束了，便難以觀察學生更多的能力表現，而且例題的變換沒辦法如替換式數學有系統的使用數字、語詞、語句順序和情境等的方式修改題目，以致於學生只能學到片段的知識，沒有學到整個單元的重要概念。

（三）除法計算困難與調整策略

三位個案經替換式數學介入後，除法計算正確率皆有提高。除法計算的錯誤類型大抵包含了估商錯誤，有忘了補0，餘數過大，以及乘太大的數字並且小減大；粗心錯誤，數字填寫錯誤以及抄寫題目錯誤；計算規則混淆，排列數字沒有對齊；計算速度慢，需從乘一開始背九九乘法，以及判斷數字的大小適不適合導致計算速度非常慢。這些錯誤類型與冷月琴(2012)、林淑芬與黃建中(2019)及楊招謨(2008)的研究結果相似。

本研究針對個案的錯誤類型如估商錯誤以及忘記補0，有使用替換式數學所提到的替換策略，如計算規則簡單化的策略：(1)一律從被除數的百位開始估

商，不夠就補0；(2)位值排列沒有對齊則在直式上畫表格和陰影做提示；(3)計算規則混淆則用記憶策略輔助，幫助學生學習除法的計算。

從除法計算題所花費的時間來看，個案一和個案三的計算時間並沒有太大的進步，個案二花費的時間則有稍許的減少，前兩位的結果與柯華葳(2005)和洪麗瑜、連文宏(2017)的結果相似，數學學習困難的學生即使正確性提高，計算速度可能依舊不變。根據過程的觀察，主要是估商花費的時間過長影響除法計算，常常需要從乘1開始，嚴重的個案如個案一甚至連判斷是否適合都無法，只是維持原本無效率的做法，如把九九乘法全部寫出來，再判斷哪個數字是否適合，故無法有效提升作答速度。

（四）除法文字題解題困難與調整策略

三位個案經替換式數學介入後，除法文字題解題的正確性有提高，除法文字題的錯誤類型大抵包含了用加減乘去計算、單位寫錯、除數和被除數顛倒以及單位搞不清楚。這些錯誤類型與冷月琴(2012)、林淑芬與黃建中(2019)及楊招謨(2008)的研究結果相似。

針對這些錯誤類型，本研究有替換使用一些策略，除了原本的表徵設計，加入了問學生算式中的數字的意義與單位；從題目中尋找答案單位的捷徑方法——找問號前的文字敘述；至於誤用加減乘計算問題，只要學生了解題意之後，這樣的錯誤就比較少發生了。至於個案二將除數與被除數位置錯置是比較意料之外的錯誤，在介入過程中有出現



過，但沒有做任何策略調整就改善了，沒想到此錯誤突然在維持期又冒出來，經觀察可能是直式的數字順序過度類化到橫式上面，因為個案仍然解出正確的答案。

除法文字題的學習仍有部分題型未達成，個案一、個案二及個案三的文字題在餘數使用，商需要額外加一的題型皆有困難，個案一的狀況是未能學會，個案二和個案三在立即成效上有所展現，無法穩固的在維持期呈現出來，雖然在教學過程中，個案都能用模仿的方式解題，表示原本的圖示表徵來幫助學生理解題意仍稍嫌不足，可能仍需替換更為精緻的題目理解策略來輔助。

(五) 作答速度與正確性的使用情況

在「基礎數學概念評量」(柯華葳, 1999) 中，受測者的表現分兩種，一是時間限制內完成的正確題數(正確/全部)，一是作答題數中有多少正確回答的題數(正確/做完)，前者兼顧正確性與流暢性，後者僅考慮正確性。本研究有針對各階段計算與文字解題的平均得分和答題時間進行分析，認為答題時間要將正確率一併考慮才有意義，如果正確率不高，時間短也是枉然。就計算和文字題兩部分來說，計算的歷程較為單純，三名個案的表現多呈現正確率逐漸高，時間逐漸減少的趨勢，但是文字題就不一定，它涉及的歷程包括讀題、理解題意、將文字轉成數學式子、計算，還要弄清問題要問什麼，數字的單位，餘數和商的關係等，計算僅是其中一項技巧而已，本研究發現個案在文字題方

面雖然正確率逐漸提升，但是時間並不像計算呈現縮短的趨勢，顯現作答速度和正確性之間的落差。作答速度似乎比較適用於單純技能(如計算)是否進步的指標。

伍、結論與建議

一、結論

透過單一個案研究法之跨參與者的多探測設計，三位國小中高年級之數學學習困難學生經替換式數學介入後，在三位數除一位數之整數除法測驗(包括計算與文字題兩類)之正確率有立即成效和維持成效。

從解題歷程來看，三位個案對於替換式數學的介入反應有共通性也有個別差異。三名學生在除法計算之正確率有明顯提升以及時間變短的趨勢，但流暢度尚未達 100%精熟。個案常常需要花很多時間在估商上，無法直接敏銳地乘出接近的數字，除法運算中所倚賴的乘法和減法技能如果不熟悉將影響除法計算。另外，三名學生在除法文字題之正確性亦較基線期明顯提升，但是時間並沒有明顯減少的趨勢。

三名個案針對原本規劃的教學介入方案反應各不相同，因此，研究者在教學過程中亦有針對其反應替換不同的教學策略，如：針對個案二加入記憶策略，數字用具體圖卡操作，讓學生移動圖卡來體會下一位數字放下去的意思，但發現仍不熟練，故改在直式畫格子和陰影提示個案。針對個案三會混淆除數、被



除數、商、餘數所代表的單位，教學者會多詢問除法直式各個數字的涵義，確保個案瞭解數字的單位；才讓學生的學習得以有成效。最後，文字題仍有部分題型（如：商需要額外加一的題型）學生感到困難，顯示替換適合策略在替換式數學教學中可能是極為重要的一環。

二、建議

根據研究結果提出以下幾點建議。

在研究上可探究計算速度是否有可能再提升？假使速度慢是數學障礙者的核心特質，難以改變，是否就要尋找其他替代策略，如允許使用計算機或直接查看九九乘法表當輔助？再者，教學策略的替換是否與個案特質產生交互影響？在教學實務上，如何設計結構單和靈活運用策略也是值得進一步思考。

（一）計算速度能否提升的探究

本研究中有針對除法計算的部分做介入，研究結果顯示學生在除法的計算正確性是有進步的，不過在會算的基礎上仍有進步空間。研究過程有固定施測時間，並且紀錄個案的作答時間，結果發現個案所花費的時間並沒有太大的差別，推論其原因可能因為三位個案的計算過程仍須用手指輔助計算或是重複念讀九九乘法好幾次才能找到適合的商，這會影響學生的工作記憶與正確率，或在閱讀題目過程使用無效的解題策略，因此，建議可以再另外設計一些關於數感的垂直替換，教學生使用效率較高的計算技巧。

假使速度提升成效依然十分有限，是否另外尋找替代方案，降低計算困難

學生的認知負荷，使其有更多的餘裕思考數學問題？本次十二年國民基本教育課程綱要「數學領域」（教育部，2018）修訂時，即提及數學教學應培養學生正確使用工具的素養，計算機的使用便是其中一種，若能正確使用工具也符合現今數學教育的基本理念。

（二）替換策略與個案學習特質關係探究

本研究有針對個案的狀況，綜合運用多個不同的教學策略，如計算程序的記憶策略、直式畫格子的策略；文字解題策略如省略計算，只要閱讀題目說出題意列式、詢問數字含意等，很難確定某一特定策略對個案的效果，是否會隨個案的學習特質而有不同？建議未來研究可尋找同樣特質的學生，如數學學習困難合併書寫障礙，交替介入這些額外的策略像是空格和陰影提示策略，檢驗是否有效幫助學生。

（三）水平替換學習單之運用與設計

有時候學生在水平替換的練習全對，並不代表真的完全學會，可能是遺忘，或不夠精熟，或只是把計算的方式硬生生的記憶下來，因此建議結構單可以多印一份同樣的讓學生當回家功課或是增加水平替換的題數，不過到底學生要多少水平替換的題目才能達到精熟很難去估計，只能透過評量才能確定學生是否學會。除了增加水平替換的練習外，可以讓學生嘗試自己編寫類似的水平替換題型並練習，一方面讓學生更了解題型設計，另一方面增加熟練度。



(四) 替換式數學之策略替換有彈性

研究者主要使用「具體——半抽象——抽象表徵」的策略，雖能幫助學生了解計算的規則以及文字題的題意，有時仍無法一勞永逸，可能當下學生懂為什麼是這樣，但是並沒有把過程該怎麼算的程序性知識記下來，仍然需要其他策略幫忙。此亦表示教師必須對於數學概念通透並擁有多元的教學策略，因應不同狀況進行調整。

參考文獻

- 王宣惠、洪儷瑜(2019)。我們真的認識數學障礙嗎？——臺灣數學障礙20年研究回顧與問題探究。*特殊教育研究學刊*，44，59-90。
- 王雪瑜(2006)。國小數學學障兒童數學解題錯誤類型分析之探討。載於國立臺中教育大學特教中心(主編)，*特殊教育現在與未來*(頁19-29)。國立臺中教育大學。
- 王瓊珠(2018)。學習障礙——理念與實務。心理。
- 冷月琴(2012)。除法解題與錯誤類型之研究：以國小中年級學童為例(未出版碩士論文)。國立屏東大學，屏東市。
- 身心障礙及資賦優異學生鑑定辦法(2013年9月2日)。
- 李源順(2013)。數學這樣教——國小數學感教育。五南。
- 林和秀(2014)。應用替換式數學教學在國小五年級數學障礙學生學習「分數乘法解題」之成效探討(未出版博士論文)。國立臺南大學，臺南市。
- 林淑芬、黃建中(2019)。國小三年級學童除法單元之錯誤類型分析。*理工研究國際期刊*，9(2)，15-58。
- 柯華葳(1999)。基礎數學概念評量。教育部特殊教育小組。
- 柯華葳(2005)。數學學習障礙學生的診斷與確認。*特殊教育研究學刊*，29，113-126。
- 洪儷瑜(2005)。學習輔導。載於鄔佩麗(主編)，*輔導與諮商心理學*(頁337-409)。東華。
- 洪儷瑜、連文宏(2017)。數學學習障礙學生的鑑定。載於詹士宜、楊淑蘭(主編)，*突破數學學習困難：理論與實務*(頁115-129)。心理。
- 郭亭織(2015)。替換式數學結合圖示表徵對數學困難學生在分數乘法的學習成效與動機之研究(未出版碩士論文)。國立臺南大學，臺南市。



- 郭靜姿(2002)。談數學學習障礙學生的教學。載於郭靜姿、蔡明富(主編), *解脫「數」縛——數學學障學生教材設計*(頁3-42)。國立臺灣師範大學特殊教育中心。
- 國中教育會考(2021)。年各科能力等級加標示人數百分比統計表(107-109年歷史資料)。 <https://cap.rcpet.edu.tw/history.html>
- 教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域。 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>
- 教育部(2019)。臺灣PISA 2018 成果發表記者會。 https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&sms=169B8E91BB75571F&s=7859A319DB24C59C
- 張珮之(2016)。替換式數學教學對國小認知功能輕度缺損學生小數概念學習成效之研究(未出版碩士論文)。國立臺中教育大學,臺中市。
- 許瓊文(2015)。替換式數學教學對國小二年級數學學習困難學生之乘法文字題解題與分心行為之影響(未出版碩士論文)。國立臺南大學,臺南市。
- 黃美潔(2015)。替換式數學教學對國小數學學習障礙學生在長度單位化聚之學習成效研究(未出版碩士論文)。國立臺南大學,臺南市。
- 詹士宜(2013)。替換式數學對學習困難學生之補救教學。國立臺南大學特殊教育中心。
- 詹士宜(2014)。替換式數學之設計理念及應用。載於鄭邦鎮(主編), *Super金頭腦：替換式數學之教學應用與教材彙編*(頁7-21)。臺南市教育局。
- 詹士宜(2017)。數學學習困難學生的補救教學——以替換式數學教學為例。載於詹士宜、楊淑蘭(主編), *突破數學學習困難：理論與實務*(頁195-225)。心理。
- 楊招謨(2008)。數學低成就學生除法解題錯誤類型分析及補救教學效果之研究(未出版博士論文)。國立彰化師範大學,彰化市。
- 楊瑞智(1997)。國民小學數學新課程中年級除法教材的設計。 <http://wd.naer.edu.tw/study/218/06.htm>
- 趙文崇(2017)。兒童數量概念的發展與異常——從神經生理基礎談起。載於詹士宜、楊淑蘭(主編), *突破數*



- 學學習困難：理論與實務（頁 3—18）。心理。
- 劉秋木(2009)。《國小數學科教學研究》。五南。
- 謝妙悛(2015)。《替換式數學教學對國小智能障礙學生在改變類兩步驟加減法文字題之解題成效研究》（未出版碩士論文）。國立臺南大學，臺南市。
- 羅秀珍(2017)。《替換式數學教學對國中輕度智能障礙學生整數運算之學習成效》（未出版碩士論文）。國立臺東大學，臺東市。
- American Psychiatric Association (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). American Psychiatric Association.
- Archer, A. L., & Hughes, C. A. (2010). *Explicit instruction: Effective and efficient teaching*. Guilford Publications.
- Dubé, A. K., & Robinson, K. M. (2017). Children's understanding of multiplication and division: Insights from a pooled analysis of seven studies conducted across 7 years. *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), 206-219.
- Individuals with Disabilities Education Improvement Act (2004)
- Milton, J. H., Flores, M. M., Moore, A. J., Taylor, J. J., & Burton, M. E. (2018). Using the concrete-representational-abstract sequence to teach conceptual understanding of basic multiplication and division. *Learning Disability Quarterly*, 42(1), 32-45.
- Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2020). Cognitive-load theory: Methods to manage working memory load in the learning of complex tasks. *Current Directions in Psychological Science*, 29(4), 394-398. <https://doi.org/10.1177/0963721420922183>
- Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, 22(2), 123-138.
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2003). *Cognitive load theory*. Springer.
- van de Walle, J. A. (2005). 中小學數學科教材教法（張英傑、周菊美譯）。五南。（原著出版於 2001 年）



- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Learning-teaching trajectories with intermediate attainment targets. In van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 13-22). Sense Publishers.
- West, J. (2014). Divide and conquer: A hands-on exploration of divisibility. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(4), 15-19.



Journal of Special Education, 2021, Vol. 53, 01-30
DOI: 10.3966/207455832021060053001

Effects of Substituted-Mathematics Instruction on Calculation and Word Problems of Division for Elementary Students with Mathematics Learning Difficulties

Che-Yu Yang

Kaohsiung Hsin Chuang
Elementary School

Chiung-Chu Wang

Department of Special Education,
National Kaohsiung Normal University

Abstract

This study was aimed to analyze the effects of substituted-mathematics instruction on calculation and word problems of division for elementary students with mathematics learning difficulties. The research method was a multiple probe design across participants. Three participants were 3rd-, 4th-, and 5th-graders with mathematics learning difficulties. Data were presented through graphic method and visual inspection to analyze the effects of substituted-mathematics instruction. The results of this study indicated that substituted-mathematics instruction had immediate and maintenance effects on calculation and word problems of division for the students with mathematics learning difficulties. The intervention was more effective for division calculation than word problems in terms of accuracy and fluency. Three students with mathematics learning difficulties had different responses to substituted-mathematics instruction. Flexible use of substituted strategies was important for successfully executing this math program.

Key words: calculation, division, mathematics learning difficulties, substituted-mathematics ins

