國立彰化師範大學特殊教育學系
特殊教育學報，民 111，56 期，頁 31－79
DOI: 10.53106/207455832022120056002

質性評價高中資優生數學解題思路之探討——以 SOLO 與修訂版 Bloom 分類法爲工具

秦爾聰
國立彰化師範大學
科學教育研究所

蔡政樺
臺中市立
臺中第一高級中等學校

摘要

本研究目的在於以可觀察學習成果結構(Structure of the Observed Learning Outcome, SOLO)分類法與修訂版 Bloom 分類法爲評價工具，分析高中數學資優生之解題表現，探討其解題思路的結構層次與樣貌。本研究採用個案研究法與顯性特徵分析法之研究設計，立意選取六位高中數學資優學生，收集六位個案學生在數學競賽培訓課程的解題實作測驗資料，參照兩種分類法之理論架構，分別整合成用以分析學生解題表現的評價規準，探討其解題思路在兩種分類法的結構層次及其發展途徑之樣貌。研究結果有：(1)六位個案學生之整體數學解題表現的評價結果，在 SOLO 方面，均已達到擴展抽象結構層次；在 Bloom 修訂版方面，其知識向度均已達到後設認知層次，而認知歷程向度亦皆達到創造層次。(2)六位個案學生之數學解題表現，都出現個數不一之 U-M-R 迴圈或路徑的解題思路；同時，研究發現六位個案學生的解題表現在 SOLO 之結構層次愈高，其所展現的 Bloom 之知識與認知歷程層次也愈好。在學生評量應用的蘊涵上，其意義揭示透過 SOLO 與修訂版 Bloom 分類法之質性評價，可以讓高中數學資優生的數學解題思路變得更加可觀察。

關鍵字：可觀察之學習成果結構、數學解題表現、數學解題思路

通訊作者：蔡政樺　Email: smofishmilkfish@gmail.com

壹、緒論

一、研究動機

依據臺灣十二年國民基本教育暨普通型高級中等學校——數學領域之基本理念與課程目標，期望學生能達成「培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力」（教育部，2013），此理念與當代數學教育改革之趨勢一致（如 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。可見，數學解題一直是數學教育的重心，也是學習數學的主要手段(NCTM, 2000)，更是強調培養學生應用所學解決現實問題的數學素養(Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2016)。是故發展數學解題的能力，會直接影響學生的數學素養，顯見其重要性（劉致演、秦爾聰，2018）。

數學解題活動以學生為中心，而影響其數學解題表現之心智活動的核心是解題思路，即解題時所顯現的心理特徵與解題特徵(Krutetskii, 1976)。這樣的解題思路，會因不同心智發展的專家與生手而有所差別（張景媛，1994），尤其是數學資優生可能會展現出許多與一般生不同的心智特質(Krutetskii, 1976)。例如，一些國內外學者（呂玉琴、呂佳蓉，2013；郭靜姿，2003；劉哲源、劉祥通，2008；顏富明、張靜譽，2011；Clark, 2008; Davis et al., 2011）認為，數學資優生具有與眾不同的思考歷程，亦具良好邏輯思考與推理能力，以及洞察問題的直觀能力。此外，Steiner (2006)也提出資優生在數學解題時比一般生偏好使用高層次的解題策略之觀點；Seagoe（1974, 引自 Clark, 2008, p.167）則認為資優生能創造出原創性的解題策略。基於此，本研究認為數學資優生應具有解不同數學問題時之心智活動的高層次特徵，是適合觀察與分析其數學解題表現，探討其解題思路的對象。

關於評價學生數學解題表現的心智發展，傳統上大都採取量化方法的評量工具，主要優點是它可以快速地以量化分數之高低來評價學生解題表現之優劣；然而，卻無法從中得知其所學到的內容特徵方式如何產生質的變化。因此，為了探討高中數學資優生之數學解題所展現的解題思路，本研究採用 Biggs 與 Collis (1982)所提出的可觀察學習成果結構(Structure of the Observed Learning Outcome, SOLO)分類理論，作為分析高中數學資優生之數學解題表現的評價工具之一，針對數學解題表現以等級描述為基本特徵進行質性評價，瞭解與探討高中數學資優生之數學解題思路的心智發展。

另外，研究者發現過往文獻較少關注高中數學資優生的數學解題思路。然而，數學資優生比一般生較能在數學解題歷程中展現出高階的解題思維模式(Steiner, 2006)，其數學解題表現通常會出現一些有關心理和解題特徵等兩種心智特質(Krutetskii, 1976)，而高中數學競賽試題的解題心智活動為一種具高度複雜性的思考歷程。

李坤崇(2004)採「修訂版 Bloom 教育目標分類法」中主類別和次類別的意涵，指出修訂版Bloom分類法的認知歷程向度之 6 個類別結構，具有漸增複雜性階層之特性。鄭蕙如與林世華(2004)認為具有知

識與認知歷程等兩個向度的修訂版 Bloom 分類法，不僅是一套評量的工具，也是用以描述學習目標的共通語言，以促進各領域達到溝通的效果，進而使課程中教育目標、教學活動與評量能夠更臻一致性。易言之，故此分類法透過知識與認知歷程向度所組成之二維矩陣的分析，可將課程、教學與評量三者連結在一起，足見其應用在課程計畫、教學活動與評量診斷之設計與執行的可行性。故以修訂版 Bloom 分類理論之結構層次來評價學生的解題表現，亦有其合理性。

因此，本研究擬針對 36 題高中數學競賽試題，採取個案研究設計，主以 SOLO 分類理論作爲分析高中數學資優生數學解題表現的評價工具，判斷高中數學資優生在數學競賽問題之解題表現的心智特徵。同時，以 Bloom 分類法之知識與認知歷程作爲數學解題表現的基底，針對高中數學資優生之數學解題表現在修訂版 Bloom 的二維矩陣中，繪製其解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖。也就是說，本研究將 SOLO 與修訂版 Bloom 分類法之理論架構，整合成一種評價工具，來分析高中數學資優生數學解題表現的質性評價模式，評價與描述其數學解題思路的樣貌，以作爲往後設計高中數學資優培訓教材、指導數學資優專題課程與進行相關研究時的參考。

二、研究目的

根據上述研究背景與動機，研究者爲了探討高中數學資優生在解高中數學競賽試題時所展現的解題思路樣貌，有需要發展具有內涵特徵之結構層次的評價規準作爲分析工具，來質性描述其數學解題思路的結構層次與心智特徵的漸進脈絡。故本研究之目的包含下列兩項：

1. 以 SOLO 與修訂版 Bloom 分類法作爲分析 6 位高中數學資優生之數學解題實作測驗的評價工具，探討其解題表現在這兩種分類法的結構層次。
2. 根據 SOLO 與修訂版 Bloom 等兩種評價工具的顯性特徵，分析 6 位高中數學資優生數學解題表現的內涵特徵，探討其解題思路的樣貌。

貳、文獻探討

一、SOLO 分類理論

（一）SOLO 理論及其架構

SOLO 分類理論是由澳洲教育心理學家 Biggs 與 Collis (1982)提出，是一種針對學習表現以等級描述爲基本特徵的質性評價方法。此理論認爲描述學習發展和認知結構的最佳方法是分析學生的反應，這些反應會呈現出隱性(tacit)、直覺(intuitive)、陳述性(declarative)以及理論(theoretical)等四種不同類型知識，並根據所獲得的知識推測其內在認知過程的結構，分析其對問題的深層理解；同時，它亦關注學生反應與理解的品質，更重視所學到的內容表徵方式之變化，進而根據其學習表現判斷其所處的思維發展階層，給予合理的評價。

SOLO 本質上是一種認知發展的理論，它以兩種方式描述學習者的認知發展：其一是思維方式，係指對任務或性質的反應及其抽象程度；其二是反應成果，係指以愈益成熟的表現處理相關線索的能力。因此，Biggs 與 Collis (1991)認爲人類思維方式可透過學習，經歷感覺運動

(sensorimotor)、形象(ikonic)、具體符號(concrete-symbolic)、形式(formal)以及後形式(postformal)等認知發展方式，逐漸向越來越抽象的方向發展，並在認知發展的過程中表現出五個不同結構層次的學習成果；同時，亦認爲這些反應成果可說明學習者從新手到專家的發展過程中所展現的某種思維表徵，並針對該表徵方式下的學習成果進行判斷與分類，故稱爲 SOLO 分類法(Biggs & Collis, 1982)。以下詳加論述此五種不同的結構層次及其特徵。

1. **前結構層次**(Prestructural level, P)

此層次特徵基本上是學生缺乏解決問題的簡單知識，或回答問題時邏輯混亂或語意反覆，故容易被情境中無關訊息所迷惑或誤導，不能以任務中所涉及的表徵方式處理任務。

2. **單一結構層次**(Uni-structural level, U)

此層次特徵是學生有快速回答問題的慾望，只關注單一主題或問題的線索，一找到線索就立即跳到結論，故學生會忽視問題內部可能出現的其他訊息或矛盾。

3. **多重結構層次**(Multi-structural level, M)

此層次特徵是學生會使用兩個或多個線索，卻不能覺察到這些線索之間的聯繫，也不能對線索進行整合。易言之，學生找到越來越多正確的相關訊息，回答問題時能提出多個孤立想法，卻因缺乏整合的能力，常給出一些支離破碎的反應。

4. **關聯結構層次**(Relational level, R)

此層次特徵是學生能夠使用所有可獲得的線索，將問題的一些相關資訊整合成有結構性的體系，不僅能聯繫多個線索，引發聯想來回答或解決較爲複雜的問題，亦能夠在過程中進行反向操作，檢查錯誤和矛盾之處。

5. **擴展抽象結構層次**(Extended Abstract level, EA)

此層次特徵是學生能夠將關聯層次的結構擴展至一種新的推理方式，並能概括出一些抽象特徵。顯示此層次學生能表現出較強烈的研究與創造精神，會歸納問題並演繹出新的和更抽象的特徵，所得到的結論不但能拓展問題本身的意義，亦能對當前學習內容創造更開放且抽象的探究價值(Jimoyiannis, 2011; Shea et al., 2011)。

根據上述，可知 SOLO 之五種學習成果所呈現的結構層次，代表其對某個認知內容的掌握程度，不僅能作爲分析可觀察學習成果的質性評價工具(Biggs & Collis, 1989)，亦可爲師生提供有用的教與學之回饋(Mulbar et al., 2017)。

（二）SOLO 之學習循環發展途徑

Biggs 與 Collis (1991)透過 SOLO 分類法之五種不同認知層次，描述學生的思維方式及其知識類型在學習脈絡中的轉化途徑，認爲不論是在同一個知識類型，或者是不同知識類型之間，都存在一些具有循環性的 U-M-R 學習轉化迴圈與路徑。同時，認爲 U-M-R 是學生學習的理想發展途徑，其所關注的關鍵在於前一個學習脈絡的關聯結構如何發展到擴展抽象結構，或成爲下一個學習脈絡的單一結構。有相關研究(Biggs & Collis, 1989; Campbell et al., 1992; Chick, 1998)指出在具象思維方式轉化到符號表徵方式之歷程中，至少存在兩個 U-M-R 迴圈，其中第一個迴圈的關聯結構反應，會成爲在第二迴圈中的單一結構反應；並發現在第二個迴圈後的學習反應

若仍沒有發生質變，就可能存在第三個或甚至更多個迴圈，此時所有迴圈內的反應都僅涉及到陳述性知識，並未涉及到理論知識。

綜合上述，可瞭解學生學習的發展途徑具有循環性，可藉由結構特徵的 U-M-R 來描述學習反應的認知層次發展模型。因此，本研究透過 SOLO 認知層次的漸進路徑圖，來描述高中數學資優生的解題表現之知識與認知歷程發展的循環脈絡；同時，認爲在每一解題任務中學生都需要經歷一個或多個 U-M-R 迴圈，且其他的先前任務經驗有助於其當前解題表現從一個認知層次漸進提升到更高階的認知層次 (Biggs & Collis, 1991)。因此，SOLO 分類法對數學解題表現的評價具有兩個重要意義，其一是它可以針對學生數學解題表現進行分析，具體描述其解題內容表徵的變化(Biggs & Collis, 1982)；另一是它亦可作爲數學教師分析學生解題能力的一個質性評量工具，來評價學生解題思考的結構層次，和其所展現的解題特徵(Chan et al., 2002)。

總言之，根據上述 SOLO 分類理論之觀點可知，理想的解題過程中所發生的變化，並非任務階段內處理問題之成功率的提升，而是所使用的知識類型與思維方式之改變，故而本研究透過 SOLO 認知層次的漸進路徑圖，用以判斷數學解題表現的內涵特徵所達到的結構層次及其認知發展的脈絡。易言之，本研究根據 SOLO 分類法的理論架構，建立用以分析高中數學資優生對數學競賽問題之解題表現的評價規準，探討其解題表現在 SOLO 分類法的認知層次及其心智特徵的發展途徑。

二、數學資優生的數學解題之心智特徵

學者 Krutetskii (1976)在分析數學資優生的個案研究中指出，數學資優生在解題中會展現出心理特徵與解題特徵等兩種影響解題成果的因素，導致數學資優生可能表現出許多與一般生不同的解題特色。因此，爲了瞭解高中數學資優生在解數學競賽試題時所展現的解題思路之樣貌，以下針對 Krutetskii 所提的心理特徵和解題特徵等兩種特質，結合一些國內外相關文獻研究，綜合整理數學資優生在解題過程中可能出現的心智特徵。

（一）心理特徵方面

1. 內在動機強、學習早熟

資優生具備強烈的內在學習動機 (Davis et al., 2011) 與高度的專注力 (Renzulli, 1978)，閱讀與理解早熟，促進數學早熟的發展(Davis et al., 2011)，和學習快速（郭靜姿，2000； Johnson, 2000），展現不尋常的記憶力（黃志成等人，2008；Greenes, 1981）。

2. 思考靈活、邏輯推理能力強

資優生具備良好的邏輯思考與推理能力(Davis et al., 2011; Greenes, 1981)，亦具有敏銳的觀察力（郭靜姿，2000），能靈活進行正面轉換到反面的思考(Greenes, 1981)，展現另類思考、抽象思考、類推等與眾不同的思考歷程(Clark, 2008)。

3. 善用後設認知

資優生具有比一般生好的後設認知能力（張昇鵬，2004）與後設認知知識 (Borkowski & Peck, 1986)，能了解自己的認知歷程(Borkowski & Peck, 1986)，展現良好的後設監控能力（劉祥通等人，2015；劉晉瑋等人，2010）。

（二）解題特徵方面

1. 對挑戰、複雜的偏好

資優生喜歡具有挑戰性的任務（郭靜姿，2000），有不凡的堅持與目標導向行爲(Clark, 2008)，但容易對例行性任務感到厭倦(Kitano & Kirby, 1986)。

2. 洞察問題的能力強

資優生具備瞭解問題結構脈絡的洞察力（江奇婉、劉祥通，2010；蔡子雲、劉祥通，2007），進而將數學問題形式化，並透過數學的關係、原理和結構的特色加以類化以便記憶(Greenes, 1981)。

3. 善用解題策略與技巧

資優生較一般生能使用高層次的解題策略(Steiner, 2006)，能運用尋找規律、畫圖表徵、歸納推理與逆向求解等策略進行解題（呂玉琴、呂佳蓉，2013），並能創造出原創性的解題策略（劉哲源、劉祥通，2008; Clark, 2008）。

綜合上述可知，數學資優生在數學解題時，大致上都會展現出理解早熟的數學能力與強烈的內在動機，並有良好的高階思考能力、後設認知能力與直觀能力，且能運用多元解題策略，展現出與一般學生不同的數學解題之心智特質。因此，本研究認爲高中數學資優生在解決數學競賽問題的過程中，也會展現出像上述的心理與解題特徵等兩種心智特質。這兩種心智特質似乎可呼應修訂版 Bloom 分類系統(Anderson et al., 2001)的理論內涵，認爲學習目標具有知識與認知歷程等兩個向度內容，故研究者將進一步透過文獻探討，深入瞭解修訂版Bloom分類系統之理論架構對數學資優生之數學解題表現的評價應用。

三、修訂版 Bloom 分類法理論

（一）修訂版 Bloom 分類法的理論架構

Bloom(1956)提出認知領域的教育目標分類表，將認知領域細分爲知識(knowledge)、理解(comprehension)、應用(application)、分析(analysis)、綜合(synthesis)、評鑑(evaluation)等 6 個認知層次，並認爲此分類系統不僅是一套評量的工具，也是用以描述學習目標的共通語言，以促進各領域達到溝通的效果，進而使課程中教育目標、教學活動與評量能夠更臻一致性（鄭蕙如、林世華，2004）。在經過約半世紀的相關學術研究與重新檢討後，得到一些成果，例如，Anderson 等人(2001)提出 Bloom 分類法的修訂版，將教育目標分類法分成知識向度(knowledge dimension)和認知歷程向度(cognitive process dimension)兩部分，形成一個二維矩陣後，再進行教育目標的分析。以下參考一些國內外相關文獻（李坤崇，2004；鄭蕙如、林世華，2004；Anderson et al., 2001; Krathwhol, 2002; Pintrich & Wittrock, 2001），簡要論述這兩個向度的內涵特徵。

知識向度包含：(1)事實知識(factual knowledge)：是指用於解決問題的基本知識，通常是指有關學科術語的知識，或是特定細節和元素的知識。(2)概念性知識(conceptual knowledge)：是指用於描述、預測、解釋、或決定採取行動的原理和通則之知識，以及有關類別、等級和排列之數學表徵的知識，來連結一些解題要素與較大知識結構之間的關係。(3)程序性知識(procedural knowledge)：係指用於處理問題過程的知識，通常是一系列有步驟的流程，和決定何時運用不同程序的知覺與規

準。(4)後設認知知識(metacognitive knowledge)：係指對於解題時所用的一般策略、策略情境、策略有效程度和自我知識等方面的認知與覺察，包括對認知的知識，以及對認知歷程的控制、監控和調整。

認知歷程向度包含：(1)記憶(remember)：從長期記憶中提取相關知識，包括識別(recognizing)與回憶(recalling)兩個歷程。(2)瞭解(understand)：從語言、符號與圖表溝通的解題訊息中建構意義，包括詮釋(interpreting)、舉例(exemplifying)、分類(classifying)、摘要(summarizing)、推論(inferring)、比較(comparing)與解釋(explaining)等歷程。(3)應用(apply)：執行或使用某情境之程序來解決問題，與程序知識緊密連結，包括執行(executing)與實行(implementing)兩個歷程。(4)分析(analyze)：牽涉分解問題成數個部分，指出局部之間及其對整體結構的關聯，與評鑑、創造緊密連結，包括辨別(diffentiating)、組織(organizing)與歸因(attributung)等歷程。(5)評鑑(evaluate)：依據某規準或標準作判斷，包括檢查(checking)與評論(critiquing)兩個歷程。(6)創造(create)：透過在心智的建構、解構和重構過程，形成一個有結構、具功能的系統，包括產生(generating)、計畫(planning)與製作(producing)等歷程。

綜合以上，修訂版透過知識與認知歷程向度所組成之二維矩陣的分析，可將課程、教學與評量三者連結在一起，足見其應用在課程計畫、教學活動與評量診斷之設計與執行的可行性。又修訂版的認知歷程向度之 6 個類別結構，具有漸增複雜性階層(increasing complexity hierarchy)之特性（李坤崇，2004），且相鄰的兩個認知層次可能有重疊或相互跨越（黃嘉雄，2004；Krathwhol, 2002），其中記憶與學習保留具密切關聯，其他五種與學習遷移有關(Mayer & Wittrock, 2001)。基於此，研究者基於過去之教學與研究的經驗，認為高中數學資優生之數學解題思考所展現的心智特徵，不僅具有層次的結構性，同時亦具有層次的漸進複雜性。因此，本研究亦參照修訂版 Bloom 分類理論的知識與認知歷程兩個向度的內涵特徵，來建立一個評價規準用以分析高中數學資優生數學解題思考的知識與認知歷程之內涵特徵。

（二）修訂版 Bloom 分類理論對於評價數學解題表現的應用

本研究為了瞭解修訂版 Bloom 分類系統的知識向度與認知歷程向度，在評價學生數學解題表現之應用的可行性，提出相關實徵研究加以論述與探討。例如，一些相關文獻（陳錦章、邱富宏，2001；Snow et al., 1996; Wagster et al., 2007）指出，學生的後設認知信念與他們的認知和學習之間有著重要的關聯。Quintana 等人(2005)指出，當學習者進行線上檢索的認知活動，新手學習者普遍缺乏後設認知能力。Veenman (2011)則研究發現，高層次的後設認知會監控並調整低層次的認知歷程，例如進行推論是認知行為，但決定啓動推論則是後設認知。此外，葉辰楨等人(2010)亦發現，後設認知涉及學習中對整個認知歷程的主動控制，包括如何處理學習任務、監控理解、在完成任務的過程中評估進步的情形等。

另外，在學習成效方面，Yilmaz-Tüzün 與 Topcu (2010)發現，有較佳後設認知的

學習者傾向進行有意義學習。陳柏霖與劉佩雲(2015)研究亦發現，大學生進行網路學習時，後設認知策略與網路學習行爲呈顯著正相關，同時也與心理學學習成效呈現顯著正相關。Schurter (2002)研究也發現教導自我檢核、自我質問等後設認知策略，對學生解題表現具正向提昇效應。

根據前面文獻探討與實徵研究評析的結果，均顯示後設認知知識是比較能解釋學習者的學習表現的一種知識向度(Liu & Lin, 2007)，同時，實施後設認知的訓練對數學解題有顯著的幫助(Kramarski, 2004; Mevarech & Kramarski, 2003; Teong, 2003)。故這些論點支持，研究者依據修訂版 Bloom 分類理論之理論架構，針對高中數學資優生之數學競賽解題表現進行評價，探討其解題思路在知識與認知歷程向度的發展層次，是有其應用的可行性與適切性。

參、研究方法

一、研究設計和對象

（一）研究設計

本研究旨在使用 SOLO 分類法與修訂版 Bloom 分類法作爲分析工具，評價高中數學資優生的解題表現，探討其解題思路的樣貌。本研究採用個案研究法，針對 6 位高中數學資優學生的解題表現進行資料蒐集與內涵分析，爲探討與描述其解題表現之結構層次與心智特徵，提供一個周延而完整的研究策略(Yin, 2017)。因此，首先進行研究規劃，包括設定研究問題，透過文獻探討形成本研究之理論架構；接著爲收集與整理6位個案學生對36題高中數學競賽試題的解題質性資料，並透過綜合、分析、詮釋與評價等四步驟進行內涵分析，發展出 SOLO 分類法與修訂版 Bloom 分類法之評價規準，分析個案學生的解題表現。

（二）研究對象與參與者

基於數學資優生較能在數學解題過程中展現出較高階的解題思維模式(Steiner, 2006)，又具有較完整與良好邏輯思考的心智特質(Davis et al., 2011)，故研究者立意選取來自臺灣中部某公立高中之數學競賽培訓課程的 6 位學生。這 6 位個案學生均通過臺灣普高數理學科能力競賽之中投區複賽，其中有二位科學班三年級學生，二位數理資優班二年級學生，一位數理資優班一年級學生，一位普通班二年級學生（國中階段經鑑定爲數理類資優生），這 6 位個案學生分別給予 SS1～SS6 的代號。另外，研究者選取兩位高中數學資深教師，亦爲 6 位個案學生在數學競賽培訓課程的指導老師，其角色爲提供有關數學競賽解題之知識、想法和經驗，並協助信度的檢測，提供資料分析方面的三角校正(Fusch et al., 2018)。

二、資料收集與分析

（一）資料收集

關於數學解題實作測驗的原始作答資料，則要求 6 位個案學生詳細書寫解題過程，並附加個人的解題心得，以及敘述解題想法與策略的運用情形。另外，再對 6 位個案學生之數學解題表現進行編碼，以符號 SSnRnQn 表示，其中 SS 代表個案學生，R 代表測驗回合，Q 代表數學問題，n 代表序號。例如，編碼 SS2R3Q4 指的是第

2 位個案學生在第三回合的第 4 題問題之解題表現。

（二）資料分析

本研究旨在探討高中數學資優生之數學解題思路的樣貌，故研究者亦採取顯性特徵分析方法，先確定 6 位個案學生的數學解題成果，再透過 SOLO 分類法與修訂版 Bloom 分類法的內涵特徵，分析其數學解題的質性資料，分別在 SOLO 分類法的結構層次，以及在修訂版 Bloom 分類法的知識與認知歷程向度的層次，最後根據這些評價結果質性描述 6 位個案學生之解題思路的可能樣貌。因此，為了萃取出高中數學資優生之解題思路所展現的結構層次與知識及認知內涵特徵，有必要整合出 SOLO 分類法與修訂版 Bloom 分類法的知識與認知歷程向度之結構層次的顯性特徵，作為本研究分析 6 位個案學生之數學解題表現的評價規準，並為其解題思路在這兩種分類法中所展現的樣貌提供具體證據加以佐證。

三、研究工具之評價規準與示例

本研究所使用之研究工具，包括數學解題實作測驗，SOLO 分類法評價規準，和修訂版 Bloom 分類法評價規準。以下先說明數學解題實作測驗的試題分佈，再分別介紹 SOLO 與修訂版 Bloom 分類法兩種評價規準的內涵特徵及其評價示例，並以這兩種評價規準作為分析工具，針對個案學生 SS1 之解題表現進行綜合評價分析，以及針對個案學生 SS36 個回合 36 題之評價信度進行檢驗。

（一）數學解題實作測驗

鑑於數學解題表現的多樣性，且 6 位個案學生皆為高中數學資優生，故本研究立意選取難易度為中間偏難的高中數學競賽試題，作為 6 位個案學生之數學解題實作測驗，以激發他們使用後設認知（劉祥通等人，2015），和創造出原創性的解題策略（劉哲源、劉祥通，2008；Clark, 2008），有助於探討高中數學資優生之數學解題思路的樣貌。數學解題實作測驗是由 6 個回合的數學培訓課程之紙筆測驗所組成的，每回合有 6 題，合計 36 題高中數學競賽試題（詳見附錄一）。這些試題都是由研究者與該兩位數學資深教師一起選編集結而成，取材於高中數學競賽培訓教材，和高中數學能力競賽歷屆試題，內容涵蓋數論、代數、幾何、不等式與組合等五個領域，試題分佈情形如表 1。根據表 1 的數據統計顯示，以代數領域的佔比最大，各領域內容的設計均依循培訓課程所訂定的學習重點而規劃的。

表 1

六位個案學生數學解題實作測驗試題領域分佈統計表

	數論	代數	幾何	不等式	組合	合計
題數	5	11	6	9	5	36
百分比	13.9%	30.5%	16.7%	25.0%	13.9%	100%

（二）SOLO 分類法評價規準

根據前面 SOLO 分類理論的文獻探討，將其理論架構的特徵，整理成 SOLO 分類法評價規準表，如表 2，用以分析個案學生的數學解題表現在 SOLO 分類法的結構層次。

（三）修訂版 Bloom 分類法評價規準

根據前面修訂版Bloom分類法的文獻探討，將其理論架構的內容特徵，整理成修訂版 Bloom 分類法評價規準表，如表3，用以分析個案學生的數學解題表現在修訂版Bloom分類法的知識與認知歷程向度的層次。

表 2

SOLO 評價規準表

SOLO 結構層次	結構層次內涵特徵	數學解題內涵特徵
P	不能理解題意，亦無法以問題所涉及的表徵方式進行處理。	對於問題基本上沒有相關概念或想法，容易被情境中無關訊息所迷惑或誤導。
U	只關注問題的單一條件，找到單一線索就直觀下結論。	想要快速回答問題、或直覺反應，可能忽視對反應內部出現的意義或矛盾。
M	找到多個孤立的線索或數學表徵，反映其相對的表徵，但未將其關聯性整合起來。	使用多個孤立線索或表徵，無法覺察其關聯性，只能依循大量演算的程式來反應，當忘記或做錯了某一個步驟，就會卡關。
R	能掌握整體問題的要點，統合關聯性的訊息，進行正反向操作、檢查錯誤與矛盾。	將所獲得的線索或表徵，納入整體的關聯框架，在問題情境系統中形成內在一致的結構性結論。
EA	處理問題時，能從有關聯的系統性結構來理解問題，並進行歸納與推理，拓展問題本身的意義與研究價值。	使用關聯性的原理和方法，或更抽象的知識，甚至外部系統的結論，對問題進行特殊化的論述和一般化的歸納與推理，在完成解題任務時能概括出系統性的結論。

表 3

修訂版 Bloom 分類法評價規準

Bloom 修訂版	類別	內涵特徵
知識向度	事實知識	用於解決問題的基本知識，通常是指有關學科術語的知識，或是特定細節和元素的知識。
	概念知識	用於描述、預測、解釋、或決定採取行動的原理和通則之知識，和有關類別、等級和排列之物件表徵的知識，來連結一些解題要素與較大知識結構之間的關係。

（續下頁）

表 3

修訂版 Bloom 分類法評價規準（續）

Bloom 修訂版	類別	內涵特徵
	程序知識	用於處理解題過程的知識，通常是一系列有步驟的流程，和決定何時運用不同程序的知覺與規準。
	後設認知知識	對於解題時所用的一般策略、策略情境、策略有效程度和自我知識等方面的認知與覺察，包括對認知的知識，以及對認知歷程的控制、監控和調整。
認知歷程向度	記憶	從長期記憶中提取相關知識，包括再認與回憶兩個歷程。
	瞭解	從語言、符號與圖表溝通的解題訊息中建構意義，包括詮釋、舉例、分類、摘要、推論、比較與解釋等歷程。
	應用	執行或使用某情境之程序來解決問題，與程序知識緊密連結，包括執行與實行兩個歷程。
	分析	分解問題成數個部分，指出局部之間及其對整體結構的關聯，包括辨別、組織與歸因等歷程。
	評鑑	依據某規準或標準作判斷，包括檢查與評論兩個歷程。
	創造	透過在心智的建構、解構和重構過程，形成一個有系統、具功能的結構，包括產生、計畫與製作等歷程。

（四）**兩種評價規準之綜合評價分析示例**

1. **針對個案學生 SS1 的解題表現進行評價**

以第四回合第 6 題之解題表現爲例（個案學生 SS1 的解題表現見附錄二），題目「100 個正數 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{100}$ 滿足及 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \geq 10000$，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$，求證：$a_1 + a_2 + a_3 > 100$」，利用顯性特徵分析法，針對其解題表現之原始作答資料，經由 SOLO 與修訂版 Bloom 評價規準的分析與評價之結果，如圖 1。

根據上述分析與評價結果，顯示 SS1R4Q6 之解題表現已達到 SOLO 的擴展抽象層次，與修訂版 Bloom 的後設認知與創造層次。以下再針對 SS1R4Q6 的數學表徵或敘述等質性內容，分別論述其所顯現的 SOLO 與修訂版 Bloom 評價規準之內涵特徵，爲其所達到的 SOLO、修訂版 Bloom 之知識與認知歷程層次提供證據加以佐證：

(1) 數學敘述「作一長爲 300、寬爲 100 的長方形」，展現學生的創造性解題策略，利用幾何構造法描述代數不等式的意涵，故顯示先前任務經驗有助於當前解題表現達到 EA 結構。在知識向度方面，解題者使用先前解題經驗作爲起始知識；而認知歷程向度，則使用構造法，透過數學表徵的建構過程，形成一個有系統又具功能性的反證法結構，故顯示其解題表現達到事實知識與創造層次。

圖 1

學生 SS1 作答資料經由 SOLO 與修訂版 Bloom 評價規準的分析與評價之結果

作一長爲 300、寬爲 100 的長方形 ***（EA 結構—事實知識—創造）***，
又$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$ ***（U 結構－事實知識－記憶）***，
所以我們可以將$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}$爲邊長的正方形靠下（學生意指往下併排靠攏）***（M 結構—概念知識—瞭解）***，
由大到小放入長方形中 ***（R 結構－程序知識－應用）***。

設$a_1 + a_2 + a_3 \leq 100$ ***（U 結構－程序知識－應用）***，
因爲由大排到小，所以中間方格內的面積$< 100a_2$，
同理，最右邊的方格內的面積$< 100a_3$ ***（M 結構－程序知識－應用）***。
所以，總面積爲$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$ ***（R 結構－程序知識－應用）***
$< 100a_1 + 100a_2 + 100a_3$ ***（R 結構－程序知識－分析）***
≤ 10000 ***（R 結構－後設知識－評鑑）***。
與題意條件矛盾，
故$a_1 + a_2 + a_3 > 100$ ***（EA 結構－後設認知－創造）***。

(2) 數學表徵「$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$」，將題意已知條件，視爲單一線索，故顯示其解題表現達到 U 結構。在知識向度方面，解題者描述它是問題的已知條件；而認知歷程向度，則從題意中回憶並提取有用的數學物件，故顯示其解題表現達到事實知識與記憶層次。

(3) 數學敘述「將$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}$爲邊長的正方形靠下」，描述正數的平方和與圖形往下靠攏，但並未解釋其關係，故顯示其解題表現達到 M 結構。在知識向度方面，解題者描述數學表徵$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$的幾何意義；而認知歷程向度，則利用這 100 個正方形之圖像訊息建構代數意義，故顯示其解題表現達到概念知識與瞭解層次。

(4) 數學敘述「由大到小放入長方形中」，用以描述正方形由大到小放入長方形中，解釋其面積和的大小關係，故顯示其解題表現達到 R 結構。在知識向度方面，解題者描述這 100 個正方形由左而右、由大而小的一系列操作而併排在一起；而認知歷程向度，則是利用這 100 個正方形併排時所留下空白區來處理面積問題，故顯示其解題表現達到程序知識與應用層次。

(5) 數學表徵「設$a_1 + a_2 + a_3 \leq 100$」，將結論的否定敘述，視爲解題的切入線索，故顯示其解題表現達到 U 結構。在知識向度方面，解題者運用$a_1 + a_2 + a_3 > 100$的否定敘述之反證法證明程序；而認知歷程向度，則應用符號表徵來詮釋否定敘述的意

義，故顯示其解題表現達到程序知識與應用層次。

(6) 數學敘述「由大排到小，所以中間方格內的面積$< 100a_2$，同理，最右邊的方格內的面積$< 100a_3$」，分別描述三個方格內的面積大小之各自線索，但並未解釋其脈絡關係，故顯示其解題表現達到 M 結構。在知識向度方面，解題者使用由大排到小的程序知識，切出 1 個長爲 100、寬爲a_2的長方形；而認知歷程向度，則將此長方形推移到中間方格往下靠攏，比較同一方格內之兩個面積的大小，故顯示其解題表現達到程序知識與應用層次。

(7) 數學表徵「總面積爲$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$」，此時總面績的解題想法，說明解題者要將三個方格內的面積大小關係，與長方形面積關聯起來，故顯示其解題表現達到 R 結構。在知識向度方面，解題者用來連結幾何面積與代數表徵之間的等量關係；而認知歷程向度，則利用平方和的符號表徵來詮釋其面積的幾何意義，故顯示其解題表現達到程序知識與應用層次。

(8) 數學表徵「$< 100a_1 + 100a_2 + 100a_3 \leq 10000$」，以代數符號呈現 100 正方形面積與大長方形面積的關聯性，故顯示其解題表現達到 R 結構。在知識向度方面，解題者用幾何面積的大小關係，有步驟地推得代數表徵之間的不等式關係；而認知歷程向度，則利用三個長方形來辨識面積大小，並組成一個小於等於 10000 的不等式，故顯示其解題表現達到程序知識與分析層次。

(9) 數學敘述「≤ 10000」，由假設條件$a_1 + a_2 + a_3 \leq 100$，掌握整體解題的論證要點，統合關聯性的訊息，故顯示其解題表現達到 R 結構。在知識向度方面，解題者自我覺察到$a_1 + a_2 + a_3 \leq 100$的策略條件；而認知歷程向度，則判斷所推論的結果與題意已知條件產生矛盾，依據反證法的原理，進而評論反證法是可行的解題策略，故顯示其解題表現達到後設認知與評鑑層次。

(10) 數學敘述「與題意條件矛盾，故$a_1 + a_2 + a_3 > 100$」，解題者從有關聯的系統性結構的高度來解決問題，故顯示其解題表現達到 EA 結構。在知識向度方面，解題者覺察到所得到的結果，與題意的已知條件產生矛盾，因而自我覺知到反證法是可行的；而認知歷程向度，從一開始所產生的幾何意義之構造法，解題者的思路依著他的解題計畫步步爲營，最後產生予盾結果，展現幾何構造法是有效的解題策略，故顯示其解題表現達到後設認知與創造層次。

綜合以上的評價分析結果，顯示個案學生 SS1 在第四回合第 6 題的解題表現，在 SOLO 分類法達到擴展抽象之結構層次，而在修訂版 Bloom 之知識與認知歷程層次則達到後設認知與創造層次。

2. 針對個案學生 SS3 的六個回合解題表現進行評價統計

本研究根據 SOLO 評價規準，將 SOLO 分類法的五種結構層次，由低而高

依序編碼爲 1～5。本研究亦根據 Bloom (1956)提出認知領域的教育目標分類表，將認知領域的教學目標之類別，由最簡單到最複雜，由具體到抽象，排成 6 個層次，闡明了Bloom分類理論之類別具有層次高低的次序性。又 Anderson 等人(2001)再提出 Bloom 分類法的修訂版，將教育目標分類法分成知識向度和認知歷程向度兩部分，形成一個二維矩陣後，再進行教育目標的分析；此外，學者李坤崇(2004)研究亦發現修訂版的認知歷程向度之 6 個類別結構，具有漸增複雜性階層之特性，這亦闡明修訂版 Bloom 評價規準之類別，在知識向度和認知歷程向度具有層次高低的次序性。因此，本研究根據修訂版 Bloom 之評價規準，將修訂版 Bloom 知識向度層次與認知向度層次，分別由低而高依序編碼爲 1～4 與 1～6。

透過上述的類別次序性之編碼，分析 6 位個案學生之 36 個問題的解題成果，評價 6 位個案學生在 SOLO 與修訂版 Bloom 的結構層次。其結構層次的判斷原則爲，若確定評價規準中的某顯性特徵顯現於解題表現，則表示該題解題表現已由最低層次漸進到其所對應的結構層次，但不注重出現頻率的多寡。例如，以 SOLO 評價規準作爲分析工具，若確認某題解題表現出現了 SOLO 的關聯結構之內涵特徵，則說明該題解題表現也都會展現關聯結構以下的層次內涵特徵，並記錄該題 SOLO 編碼爲 4。另外要強調的是，在評價解題表現時，若因粗心大意而造成答案錯誤，但解題表現明顯反映出關聯結構的內涵特徵，則評價結果仍視爲達到關聯結構層次。

此外，若某題解題表現在三位評價教師中有兩位以上判定爲關聯結構，則表示該題之解題表現已達到關聯結構；若某回合解題表現在 6 題中有 3 題以上判斷爲關聯結構，則表示該回合之解題表現已達到關聯結構。因此，6 位個案學生在 6 個回合 36 題之整體解題表現，若經過層次評價統計結果所得到的編碼值，分別在 SOLO 超過 4.33，在修訂版 Bloom 之知識向度超過 3.33，以及認知歷程向度超過 5.33，則表示其整體解題表現在 SOLO、修訂版 Bloom 知識向度以及認知歷程向度，分別達到擴展抽象結構層次，後設認知層次及創造層次。下表 4 是透過 SOLO 與修訂版 Bloom 評價規準，針對個案學生 SS3 在第四回合 6 個問題的解題表現（見附錄二）進行分析所得的評價結果統計表。接著，研究者再統計個案學生 SS3 在整體 6 個回合 36 題問題的評價結果統計表，如表 5。

根據表 5 之評價結果，顯示個案學生 SS3 之整體數學解題表現的評價結果，在 SOLO 方面已達到擴展抽象結構層次；在修訂版Bloom方面的知識向度已達到後設認知層次，認知歷程向度亦達到創造層次。由此可見，一個數學問題的解題表現都有可能會展現SOLO與修訂版Bloom之評價規準的一個或多個內涵特徵，故一旦有足夠的證據具體反應這些內涵特徵，就可以透過這兩種評價規準判斷它們的結構層次。因此，本研究透過文獻探討與顯性特徵分析法，整合出本研究工具的兩種評價規準，作爲評價高中數學資優生數學解題表現的一個有效的分析工具，能質性描述其解題思路的結構層次及其知識及認知內涵特徵。

表 4

個案學生 SS3 在第三回合解題表現之層次評價結果統計表

題號 評價規準	第三回合實作測驗 6 題解題表現之層次						
	1	2	3	4	5	6	整體
SOLO	5	5	5	5	5	4.33	4.89
Bloom 知識向度	4	4	4	3.33	4	3	3.72
Bloom 認知歷程向度	6	6	6	4.33	6	5	5.56

表 5

個案學生 SS3 在六個回合整體解題表現之層次評價結果統計表

回合序號 評價規準	六個回合實作測驗解題表現之層次						
	1	2	3	4	5	6	整體
SOLO	4.78	4.50	4.89	4.89	4.67	4.44	4.69
Bloom 知識向度	3.72	3.67	3.72	4.00	3.83	3.72	3.78
Bloom 認知歷程向度	5.67	5.39	5.56	5.94	5.61	5.44	5.60

（五）研究工具的信度檢測

雖然本研究的兩種評價規準，是參酌 SOLO 與修訂版 Bloom 等兩種分類法的理論架構及其特徵所整合而成的，但爲了減低過度主觀，建立可信的評價規準，所以研究者依下列流程檢測這兩種評價規準的信度。首先，關於信度檢測者的選取，由於 6 位個案學生均爲高中數學競賽培訓課程的數學資優生，而所要分析的研究資料均來自於 6 位個案學生之數學競賽試題的實作測驗。因此，研究者選取數學競賽培訓課程中的兩位數學資深教師一起進行一致性的檢測。接著，挑選個案學生 SS3 之 6 個回合 36 題競賽試題的解題表現作爲信度檢測資料，由三位檢測者獨立地依這兩種評價規準進行判斷、分析和編碼。最後，因數學解題實作測驗之評分者超過兩人，故在判定評分者之評分一致性上，採以肯德爾和諧係數 (Kendall's coefficient of concordance)作爲判定的標準。

經由信度檢測統計所得到的信度考驗摘要表，如表 6，在表 6 中關於 SOLO 評價規準的 Kendall w 和諧係數值爲 .861，且其顯著性 p 值爲 .000，小於 .05，顯示三位評分者在 SOLO 評價規準的評分在統計上有顯著相關，且一致性高；同樣的，在表 6 中修訂版 Bloom 評價規準之知識與認知歷程向度的 Kendall w 和諧係數值，分別爲 .896 與 .889，且其顯著性 p 值均爲 .000，且均小於 .05，顯示三位評分者在修訂版 Bloom 評價規準之知識與認知歷程向度的評分在統計上有顯著相關，且一致性也高。

表 6

SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的信度考驗摘要表

檢定統計資料 / 評價規準		*N*	Kendall's w 檢定	卡方	*df*	顯著性
SOLO		3	.861	555.575	215	.000
修訂版 Bloom	知識向度	3	.896	578.193	215	.000
	認知歷程向度	3	.889	573.162	215	.000

另外，在效度方面，在資料收集、討論、分析、編碼和檢驗的研究期間，研究者與兩位高中數學資深教師一起討論兩種評價規準的內涵特徵之判斷與分析，提供研究者注意不同面向的研究思考與限制，以減少研究疏失與主觀偏見，獲得較高的研究效度。同時，也一起針對個案學生的原始作答資料及其轉譯稿資料持續交叉比較，進行資料來源的三角校正，以檢核資料的正確性。

肆、結果與討論

一、六位個案學生之數學解題表現在兩種分類法的結構層次

藉由本研究的兩種評價規準，針對 6 位個案學生的 36 題數學競賽試題之解題表現進行判斷（6 位個案學生之解題表現呈現於附錄二），經過顯性特徵分析後，分別得到 6 位個案學生的整體評價結果，如表 7、表 8 和表 9，依序為 SOLO，以及修訂版 Bloom 之知識與認知歷程向度的評價統計表。從表 7～9 之數據分析結果，顯示 6 位個案學生之整體解題表現的評價結果，在 SOLO 方面，均已達到擴展抽象結構層次；在修訂版 Bloom 方面的知識向度均已達到後設認知層次，認知歷程向度亦皆達到創造層次。

整體而言，根據表 7 的評價結果，發現 6 位個案學生之整體解題表現均已達到 SOLO 分類法的擴展抽象結構（整體平均值超過 4.33）層次，此現象和 Biggs 與 Collis (1982)的觀點一致，說明 6 位個案學生均能使用關聯性的原理和方法，對問題進行特殊化和一般化的處理，能推理與概括出系統性的結果。根據表 8 的評價結果，發現 6 位個案學生之整體解題表現亦均已達到修訂版 Bloom 知識向度的後設設知層次（整體平均值超過 3.33），此現象與劉祥通等人(2015)，以及 Borkowski 與 Peck (1986)的觀點一致，解釋了 6 位個案學生均能了解自己的認知歷程，展現良好的後設監控能力。根據表 9 的評價結果，發現 6 位個案學生之整體解題表現也都達到修訂版 Bloom 認知歷程的創造層次（整體平均值超過 5.33），此現象與 Clark (2008)，以及呂玉琴與呂佳蓉(2013)的觀點一致，闡述了這些學生均能創造出原創性的解題策略，運用尋找規律、畫圖表徵、歸納推理與逆向求解等解題策略。

表 7

六位個案學生整體解題表現之 SOLO 結構層次評價統計表

回合序號	六個回合實作測驗解題表現在 SOLO 分類法之層次						
個案學生	1	2	3	4	5	6	整體
SS1	5.00	4.83	5.00	5.00	5.00	4.83	4.94
SS2	4.50	4.33	4.50	4.50	4.28	4.28	4.40
SS3	4.78	4.50	4.89	4.89	4.67	4.44	4.69
SS4	5.00	4.83	4.89	5.00	4.89	4.44	4.84
SS5	4.67	4.44	4.56	4.78	4.39	4.33	4.53
SS6	4.39	4.33	4.50	4.50	4.50	4.33	4.43

表 8

六位個案學生整體解題表現之修訂版 Bloom 知識向度層次評價統計表

回合序號	六個回合實作測驗在修訂版 Bloom 知識向度之層次						
個案學生	1	2	3	4	5	6	整體
SS1	4.00	3.83	4.00	4.00	4.00	4.00	3.97
SS2	3.56	3.72	3.56	3.56	3.72	3.89	3.67
SS3	3.72	3.67	3.72	4.00	3.83	3.72	3.78
SS4	4.00	3.83	4.00	3.94	4.00	4.00	3.96
SS5	3.67	3.67	3.67	3.67	3.72	3.72	3.69
SS6	3.50	3.61	3.56	3.56	3.67	3.61	3.58

表 9

六位個案學生整體解題表現之修訂版 Bloom 認知歷程向度層次評價統計表

回合序號	六個回合實作測驗在修訂版 Bloom 認知歷程向度之層次						
個案學生	1	2	3	4	5	6	整體
SS1	5.89	5.89	6.00	6.00	6.00	6.00	5.96
SS2	5.67	5.50	5.50	5.44	5.44	5.39	5.49
SS3	5.67	5.39	5.56	5.94	5.61	5.44	5.60
SS4	5.89	5.83	5.72	5.94	5.89	6.00	5.88
SS5	5.67	5.78	5.56	5.61	5.61	5.50	5.62
SS6	5.44	5.22	5.33	5.33	5.28	5.44	5.34

二、六位個案學生之數學解題思路的樣貌

針對 6 位個案學生的數學競賽解題實作測驗，藉由本研究的兩種評價規準，再透過顯性特徵分析方法進行分析與判斷，發現 6 位個案學生之數學解題思路，不僅展現出其 SOLO 結構層次和 Bloom 的知識與認知歷程之心智特徵，亦能反應出其層次漸進的發展脈絡。以下先針對 6 個案學生之解題表現，質性分析其 SOLO 與修訂版 Bloom 的知識與認知歷程向度之心智特徵，再繪製數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖，描述其 SOLO 結構層次在知識與認知歷程之二維矩陣的發展途徑。

（一）六個個案學生在 SOLO 結構層次的解題思路

1. 個案學生 SS1 解題思路的漸進脈絡

以第四回合第 6 題爲例，即根據前面參、研究方法中之評價示例的分析結果，繪製其解題思路的漸進路徑圖，如圖 2，顯示學生 SS1 在第四回合第 6 題解題表現的知識與認知歷程層次在 SOLO 中已達到擴展抽象結構層次，並展現良好的後設認知監控能力，和創造出有結構性的不等式表徵之解題策略。

2. 個案學生 SS2 解題思路的漸進脈絡

以第四回合第 6 題爲例，題目「100 個正數 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{100}$ 滿足及 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \geq 10000$，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$，求證：$a_1 + a_2 + a_3 > 100$。」，其解題表現之原始作答資料，經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果如圖 3。

根據上述的評價分析結果，繪製其解題思路的漸進路徑圖，如圖 4，顯示學生 SS2 在第四回合第 6 題解題表現的知識與認知歷程層次在 SOLO 中達到關聯結構層次，並展現對不等式的代數表徵與極值意義之間的轉換與評估能力。

圖 2

學生 SS1 數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖

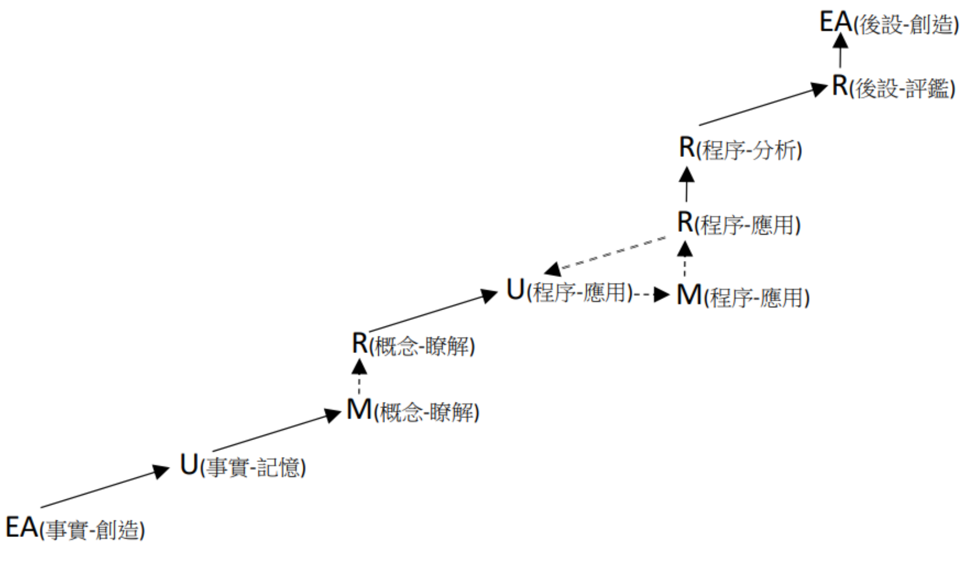


圖 3

學生 SS2 作答資料經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果

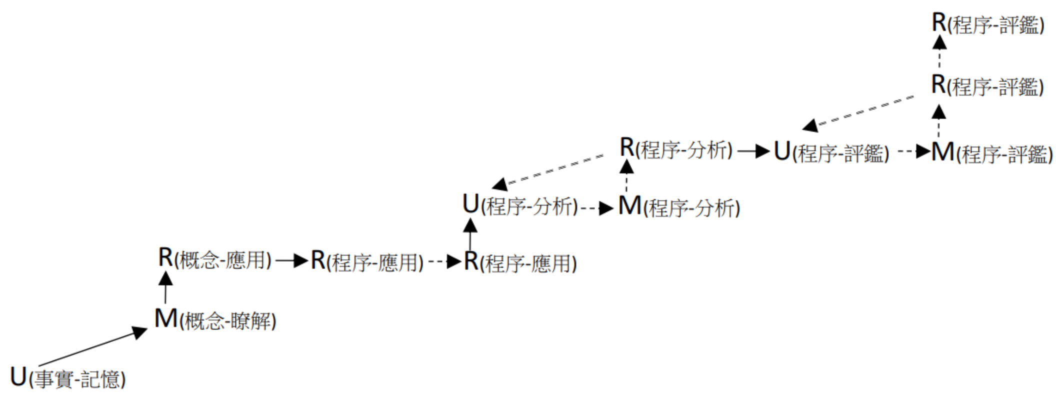
(1)在$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=k$（U 結構－事實知識－記憶）時，
$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\le(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2=k^2$（M 結構－概念知識－瞭解）。

(2)設$a_1+a_2+a_3=k\le 100R$（R 結構－概念知識－應用），
則由(1)，
又$a_4^2+a_5^2+\cdots+a_{100}^2\le a_3^2\cdot\frac{300-k}{a_3}=(300-k)a_3$（R 結構－程序知識－應用），
$a_1^2+a_2^2+a_3^2+(300-k)a_3=a_1^2+a_2^2+(a_3+150-\frac{k}{2})^2-(150-\frac{k}{2})^2$---(*)（R 結構－程序知識－應用），
由$a_1+a_2+a_3+150-\frac{k}{2}=150+\frac{k}{2}$=定值（U 結構－程序知識－分析），
故(1)最大值爲使a_3爲 MAX（M 結構－程序知識－分析），
得$a_1=a_2=a_3=\frac{k}{3}$（R 結構－程序知識－分析），(*)式（U 結構－程序知識－評鑑）
$\le(\frac{k}{3})^2+(\frac{k}{3})^2+(\frac{k}{3}+150-\frac{k}{2})^2-(150-\frac{k}{2})^2=100k$（M 結構－程序知識－評鑑）。

(3)當$k=100$時，
因等號成立時$a_1=a_2=a_3=\frac{100}{3}$（R 結構－程序知識－評鑑），
又$a_4=a_5=\ldots=a_9=\frac{100}{3}$，但此時$a_{10}=0$，與$\{a_n\}\in R^+$不合。
故$a_1+a_2+a_3>100$（R 結構－程序知識－評鑑）。」

圖 4

學生 SS2 數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖



3. **個案學生 SS3 解題思路的漸進脈絡**

以第三回合第 2 題爲例，題目「設x爲不大於 2006 之正整數，又$3^x - x^3$被 7 整除，問x有多少個？」，其解題表現之原始作答資料，經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果如圖 5。

根據上述的評價分析結果，繪製其解題思路的漸進路徑圖，如圖 6，顯示學生 SS3 在第三回合第 2 題解題表現的知識與認知歷程層次在 SOLO 中已達到擴展抽象結構層次，並展現良好的後設認知監控能力，創造出原創性的模數解題策略。

圖 5

學生 SS3 作答資料經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果

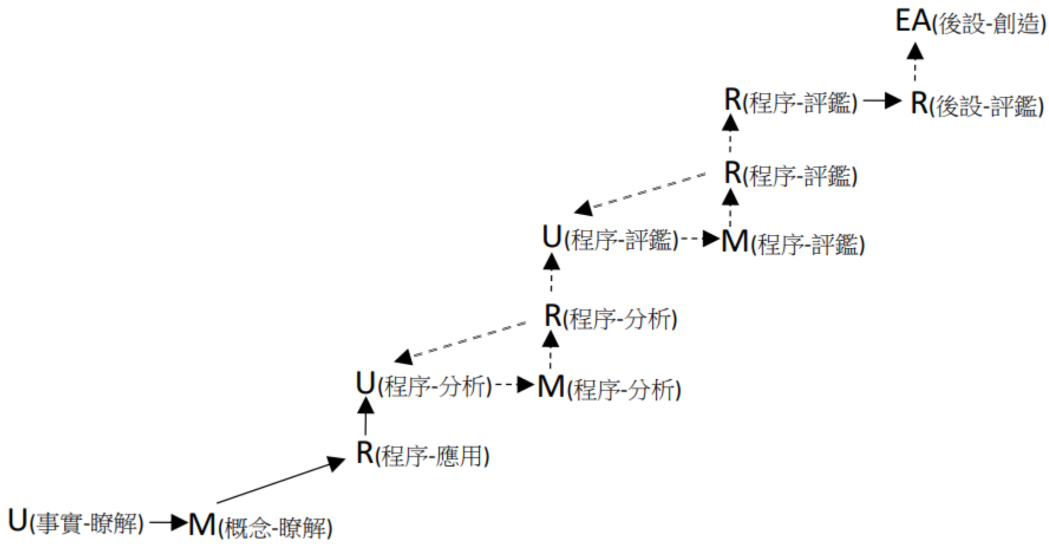
(1)$3^1 \equiv 3(mod\ 7)$ ***（U 結構－事實知識－瞭解）***，
$3^2 \equiv 2(mod\ 7)$，
$3^3 \equiv 6(mod\ 7)$，
$3^4 \equiv 4(mod\ 7)$，
$3^5 \equiv 5(mod\ 7)$ ***（M 結構－概念知識－瞭解）***，
$3^7 \equiv 1(mod\ 7)$，$\dots$，
可看出 3 的冪次方對模 7 的餘數，每 6 個循環 ***（R 結構－程序知識－應用）***。

(2)若$x \equiv 1(mod\ 7)$，$x^3 \equiv 1(mod\ 7)$ ***（U 結構－程序知識－分析）***；
若$x \equiv 2(mod\ 7)$，$x^3 \equiv 1(mod\ 7)$；
若$x \equiv 3(mod\ 7)$，$x^3 \equiv -1(mod\ 7)$ ***（M 結構－程序知識－分析）***；
若$x \equiv 4(mod\ 7)$，$x^3 \equiv 1(mod\ 7)$；
若$x \equiv 5(mod\ 7)$，$x^3 \equiv -1(mod\ 7)$；
若$x \equiv 6(mod\ 7)$，$x^3 \equiv -1(mod\ 7)$；
若$x \equiv 0(mod\ 7)$，$x^3 \equiv 0(mod\ 7)$
分別列出當x對模 7 之餘數爲i時$(i = 0,1,2,3,4,5,6)$，
x^3對模 7 之餘數 ***（R 結構－程序知識－分析）***

(3)由(1)(2)可看出 ***（U 結構－程序知識－評鑑）***
使$7|(3^x - x^3)$ ***（M 結構－程序知識－評鑑）***
之x發生在$\begin{cases} x \equiv 0(mod\ 6) \\ x \equiv 1,2,4(mod\ 7) \end{cases}$ ***（R 結構－程序知識－評鑑）***，
或$\begin{cases} x \equiv 3(mod\ 6) \\ x \equiv 3,5,6(mod\ 7) \end{cases}$ ***（R 結構－程序知識－評鑑）***
得$x \equiv 36,18,3,27,33,30(mod\ 42)$ ***（R 結構－後設知識－評鑑）***，
$[\frac{2006}{42}] = 47$，$2006 - 42 \times 47 = 32$，
共$47 \times 6 + 4 = 286$組 ***（EA 結構－後設知識－創造）***。

圖 6

學生 SS3 數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖



4. 個案學生 SS4 解題思路的漸進脈絡

以第四回合第 2 題爲例，題目「n粒糖圍成一個圓圈，依順時針次序編上號碼 1、2、3……n，自 1 號開始，每隔 1 粒取走 1 粒，陸續取走第 1、3、5……粒，最後剩一粒，問它的號碼是多少？」，其解題表現之原始作答資料，經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果如圖 7。

根據上述的評價分析結果，繪製其解題思路的漸進路徑圖，如圖 8，顯示學生 SS4 在第四回合第 2 題解題表現的知識與認知歷程層次在 SOLO 中已達到擴展抽象結構層次，並展現良好的後設認知監控能力，創造出有系統性的數列遞迴表徵之解題策略。

圖 7

學生 SS4 作答資料經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果

設$f(n)$爲n顆中剩下的一粒號碼 *（**U** 結構－事實知識－瞭解）*
(1)證$f(2n)=2f(n)$
將$2n$排成一圈，則取一輪後剩下n顆 *（**M** 結構－概念知識－瞭解）*，
且每一顆之編號爲在n顆時的 2 倍，且由第$2n$顆不取。
因此新的一輪恰從 2 號開始取，得$f(2n)=2f(n)$ *（**R** 結構－程序知識－應用）*。

（續下頁）

圖 7

學生 SS4 作答資料經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果（續）

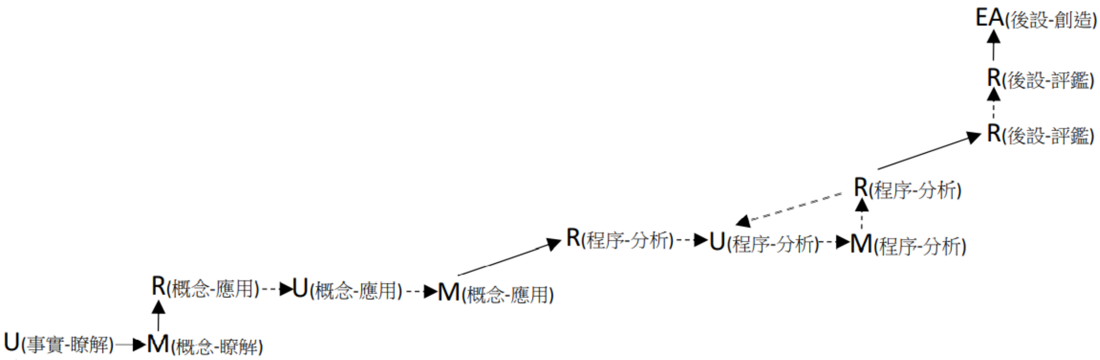
(2)證$f(2n+1)=2f(n)+2$
前面步驟仿上 ***（U 結構－概念知識－應用）***，
則在取一輪後 ***（M 結構－概念知識－應用）***，
是自 4 號糖取起，所以$f(2n+1)=2f(n)+2$，
但在$f(n)=n$時，$f(2n+1)=2n+2\ (\mathrm{mod}2n)=2$ ***（R 結構－程序知識－分析）***。

(3)證在$2^n<x\le 2^{n+1}$，$f(x)=2(x-2^n)$，其中$n\in N^*$
①$n=1$時，$2<x\le 4$ ***（U 結構－程序知識－分析）***，
$f(3)=2=2(3-2)$，$f(4)=4=2(4-2)$ ***（M 結構－程序知識－分析）***
②設$n=k-1$時，$2^{k-1}<x\le 2^k$時，
皆有$f(x)=2(x-2^{k-1})$ ***（R 結構－程序知識－分析）***
③$n=k$時，
(a)設$x=2^k+2t$時，
$f(x)=2f(\frac{x}{2})=2\cdot 2(2^{k-1}+t-2^{k-1})=4t$ ***（R 結構－後設知識－評鑑）***，
(b)設$x=2^k+2t+1$時，
$f(x)=2f(2^{k-1}+t)+2=4t+2$ ***（R 結構－後設知識－評鑑）***

由(1)(2)(3)得$2^n<x\le 2^{n+1}$，$f(x)=2(x-2^n)$，$f(1)=1$ ***（EA 結構－後設知識－評鑑）***。

圖 8

學生 SS4 數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖



5. 個案學生 SS5 解題思路的漸進脈絡

以第四回合第 5 題爲例，題目「求大於 1 的整數m,n,k，使$1!+2!+3!+\cdots+m!=n^k$。」，其解題表現之原始作答資料，經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果如圖 9。

根據上述的評價分析結果，繪製其解題思路的漸進路徑圖，如圖 10，顯示學生 SS5 在第四回合第 5 題解題表現的知識與認知歷程層次在 SOLO 中已達到擴展抽象結構層次，並展現良好的後設認知監控能力，創造出有系統性的模數解題策略。

圖 9

學生 SS5 作答資料經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果

(1)$1!$（***U 結構－事實知識－瞭解***）$+2!+3!$（***M 結構－概念知識－瞭解***）$=9=3^2$有一解（***R 結構－概念知識－瞭解***），
$m \geq 3$時，$3|m!$，所以$3|n^k$　（***R 結構－程序知識－應用***）。

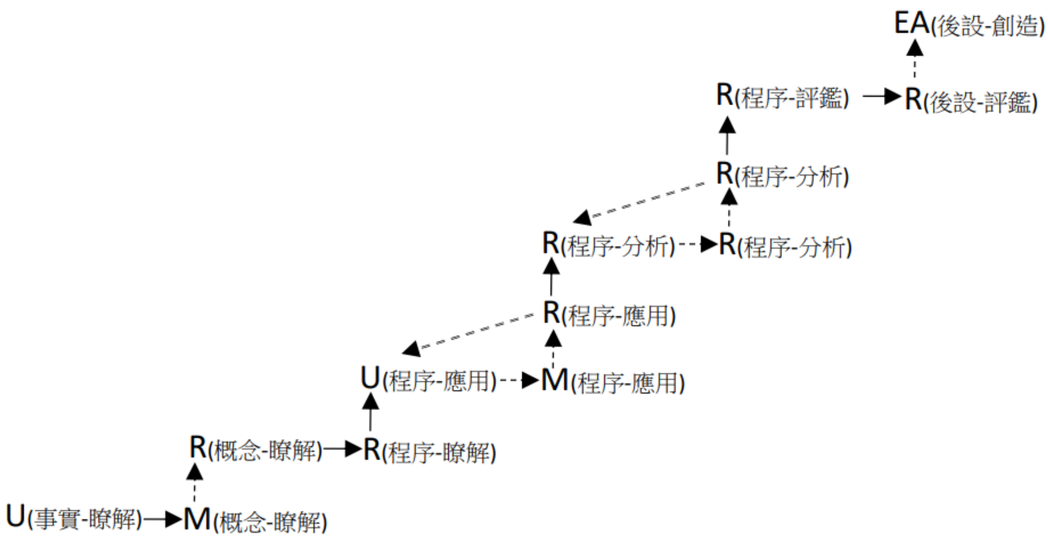
(2) $m=4,5$：$n^k=33$及 153 無解（***U 結構－程序知識－應用***），所以$m \geq 6$，
$\sum_{i=1}^{5} i! = 153 = 3^2 \times 17$　（***M 結構－概念知識－應用***），
$m \geq 6$時，$3^2|m!$，所以$3^2|n^k$　（***R 結構－程序知識－應用***）

(3)$m=6,7,8$：$n^k=873$，5913 及 46233，均無解（***R 結構－程序知識－分析***），
所以$m \geq 9$，
$3^3 \nmid \sum_{i=1}^{8} i! = 46233 = 3^2 \times 5137$　（***R 結構－程序知識－分析***），
$m \geq 9$時，$3^3|m!$，所以$3^3 \nmid n^k$。（***R 結構－程序知識－分析***）。

由(1)(2)(3)可得以下結論：
$m < 9$時，有$(m,n,k)=(3,3,2)$（***R結構－程序知識－評鑑***）
$m \geq 9$ 時，$3^2|n^k$，但 $3^3 \nmid n^k$，得$k=2$，$n=3p$，且$3 \nmid p$。
但$m \geq 9$時，$\sum_{i=1}^{m} i! \equiv 1!+2!+3!+4! \equiv 3(mod\ 1\,0)$不可能爲平方數，所以無解。（***R 結構－後設認知－評鑑***）。
故解爲$(m,n,k)=(3,3,2)$（***EA 結構－後設認知－創造***）。

圖 10

學生 SS5 數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖



6. 個案學生 SS6 解題思路的漸進脈絡

以第四回合第 4 題爲例，題目「設數列$< a_n >$滿足$a_1 = 1$，$a_{n+1} \cdot a_n = n + 1$ $(n = 1,2,\cdots)$，求證：$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \ge 2(\sqrt{n+1} - 1)$。」，其解題表現之原始作答資料，經由SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果如圖 11。

根據上述的評價分析結果，繪製其解題思路的漸進路徑圖，如圖 12，顯示學生SS6 在第四回合第 4 題解題表現的知識與認知歷程層次在 SOLO 中已達到擴展抽象結構層次，並展現良好的後設認知監控能力，創造出有結構性的級數表徵轉換之解題策略。

針對圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10及圖 12 的 6 位個案教師解題思路的漸進脈絡進行綜合分析與比較，發現有些解題思路處於同一個分類法之結構層次的漸進途徑，另一些則是不同分類法之結構層次之間的漸進途徑，分別以實線與虛線等兩種箭頭表示。同時，這 6 個漸進路徑圖，皆存在一些循環性的 U-M-R 迴圈或路徑，其中以三個虛線箭頭所組的 U-M-R 迴圈，描述解題思路在修訂版 Bloom 之同一個結構層次中產生解題方法的統整，此種現象如同 Piaget (1945)所提的同化與調適之觀點，認爲解題者以既有知識結構面對問題時，將新遇見的事物納入或修正既有的知識結構(Harlow et al.,2006)，作爲下一階段

圖 11

學生 SS6 經由 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準的分析與評價之結果

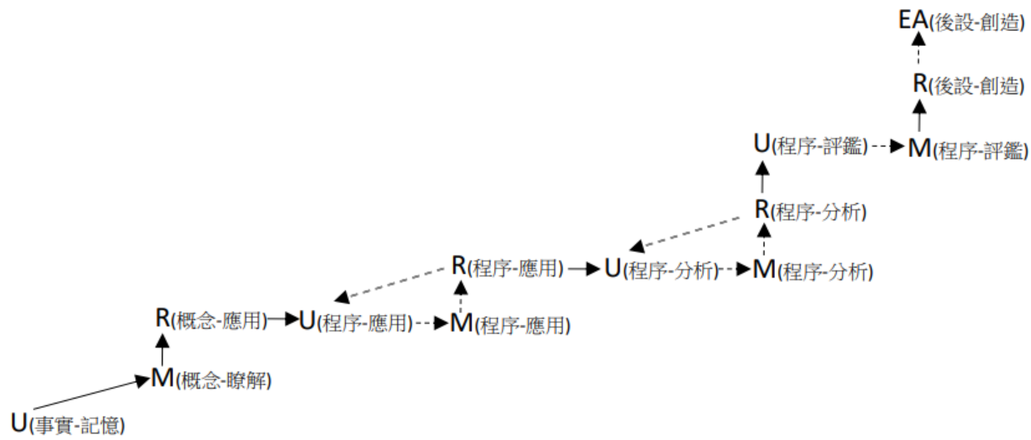
(1)$a_{n+1} \cdot a_n = n + 1$ *（**U** 結構－事實知識－記憶）*
$\Rightarrow a_n \cdot a_{n-1} = n$ *（**M** 結構－概念知識－瞭解）*
$\Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{n}$ *（**R** 結構－概念知識－應用）*。

(2)$\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}$ *（**U** 結構－程序知識－應用）*
$= \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{n}$ *（**M** 結構－程序知識－應用）*
$\ge \frac{2}{\sqrt{n}}$ （算幾不等式）*（**R** 結構－程序知識－應用）*。

(3)$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ *（**U** 結構－程序知識－分析）*
$= \frac{1}{2a_1} + (\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2}) + (\frac{1}{2a_2} + \frac{1}{2a_3}) + \cdots + (\frac{1}{2a_{n-1}} + \frac{1}{2a_n}) + \frac{1}{2a_n}$ *（**M** 結構－程序知識－分析）*
$\ge (\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2}) + (\frac{1}{2a_2} + \frac{1}{2a_3}) + \cdots + (\frac{1}{2a_{n-1}} + \frac{1}{2a_n})$ *（**R** 結構－程序知識－分析）*
$= \frac{1}{2}[(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}) + (\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}) + \cdots + (\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n})]$ ***(U 結構-程序知識-評鑑)***
$\ge \frac{1}{2}[\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{n+1}}]$ （由(2) *（**M** 結構－程序知識－評鑑）*
$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ge \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ *（**R** 結構－後設知識－創造）*
$= 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} = 2(\sqrt{n+1} - 1)$
*（**EA** 結構－後設知識－創造）*。

圖 12

學生 SS6 數學解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖



之認知行動的基礎。此外，含有實線箭頭的 U-M-R 路徑，則說明解題思路在修訂版 Bloom 之不同結構層次之間產生解題策略與概念的連結，此種現象亦如同 Piaget (1945)所提的組織之觀點，認爲解題者聯結兩種以上非連續的基模形成較複雜的知識結構。

此外，在 U-M-R 迴圈或路徑中的 U 結構層次可能是上一個迴圈的 R 結構，或者 R 結構層次可能是下一個迴圈的 U 結構。例如，在 SS5 R4Q5 中，學生 SS5 利用冪次式判斷$m = 4,5$：$n^k = 33$及 153 無解，故$m \geq 6$，說明其解題思路承襲上一個迴圈的 R 結構，形成一個重要的解題線索，故而展現「U 結構－程序知識－應用」之層次；接著，求前 5 項和$\sum_{i=1}^{5} i! = 153 = 3^2 \times 17$（*M 結構－程序知識－應用*），再應用當$m \geq 6$時，$3^2|m!$，$3^2|(1!+2!+3!+4!+5!) = 153$，推得$3^2|n^k$ （*R 結構－程序知識－應用*），顯示其解題思路的心智特徵展現了如圖 10 中的第二個 U-M-R 迴圈之漸進途徑。

在第三個 U-M-R 迴圈或路徑方面，發現若在第二個 U-M-R 迴圈或路徑後，學生的解題表現仍未產生知識類型與思維方式的質變，則其解題思路可能會出現第三個或更多個 U-M-R 迴圈或路徑。例如，除了學生 SS1 與學生 SS5 的漸進圖只出現二個 U-M-R 迴圈或路徑之外，其餘學生的解題思路漸進圖皆出現三個以上的 U-M-R 迴圈或路徑，而此時迴圈內的解題表現都只涉及到程序知識內容，尚未涉及後設認知層次。這個現象也和 Pegg 與 Tall (2005) 的觀點一致，認爲在具體符號方式下至少存在兩個 U-M-R 迴圈或路徑，若在第二個迴圈或路徑後的反應仍沒有發生形式推理方式的質變，則可能存在第三個或更多迴圈或路徑；倘若後續的解題表現發生形式運思特徵上的質變，則其解題思路有機會產生遷移而漸進至擴展抽象層次。

關於先前解題或學習經驗在解題思路的發展脈絡方面，發現只有個案學生 SS1 在解題一開始使用先前在培訓課程中所學習的構造法，作爲此次解題任務的切入

點，充分地展現其解題思考的創造精神與符號表徵轉化的思維方式。此現象和Biggs與 Collis (1991)的觀點一致，認為先前任務經驗有助於當前解題表現，從一個認知層次漸進提升到更高階的認知層次。因此，本研究認為在數學解題過程中，學生之前一個解題任務經驗往往有助於其遷移至後一個較高認知層次的漸進發展。例如，學生 SS1 透過先前學到的構造法，有創意地將不等式的符號表徵轉化成具有幾何意涵的可運思模型，顯示其解題思路呈現了使用形式化表徵進行思維的同時，也可被觀察到其使用圖像、經驗及直覺等具有創造性的表徵內容。

關於後設認知對於 6 位個案學生數學解題表現的影響方面，針對圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的 6 位個案學生之數學解題思路的 SOLO 結構層次之漸進路徑圖進行分析比較，發現除了學生 SS2 之外，其餘五位學生的解題思路在修訂版 Bloom 認知歷程，皆達到後設認知層次，同時其解題表現亦達到 SOLO 的擴展抽象結構層次。因此，本研究認為個案學生的數學解題表現能夠達到 SOLO 之擴展抽象結構層次，可能的關鍵因素在於學生運用後設認知知識的自我覺察與監控能力。此分析結果可從 Veenman (2011)的觀點獲得支持，認為高層次的後設認知會監控並調整低層次的認知歷程，以啟動具有推理論證的解題思路；亦與張昇鵬(2004)、Steiner (2006)的觀點一致，認為資優生較一般生有好的後設認知能力，亦能使用高層次的解題策略。

（二）六位個案學生之解題思路在 SOLO 與修訂版Bloom結構層次的關聯性

針對 6 位個案學生之 6 個回合的整體解題表現而言，透過本研究之兩種評價規準，並藉由顯性特徵分析法進行分析與判斷，發現他們的數學解題思路，都存在數個循環性的 U-M-R 迴圈或路徑。以下就 6 位個案學生之數學解題思考，在 SOLO 與修訂版 Bloom 結構次的主要特徵，以及其結構層次之間的相關性等兩個面向進行探討。

1. 六位個案學生之解題思路在兩種分類法結構層次之主要特徵

在 SOLO 方面，根據圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的漸進路徑圖，發現 6 位個案學生的解題思路，皆展現出個數不一的 U-M-R 迴圈或路徑。此結果顯示 U-M-R 迴圈或路徑是學生數學解題思路之認知發展過中重要的途徑，其認知層次發展的主要特徵在於，能從題目中單一解題線索切入（U 結構），啟迪數學思考產生多個解題想法（M 結構）並進行聯繫（R 結構），成為下一個迴圈的單一結構（U 結構），或漸進發展至擴展抽象結構（EA 結構）。此主要特徵的脈絡和 Biggs 與 Collis (1991)的觀點一致，認為 U-M-R 是學生透過學習發展認知的理想途徑，而且在此途徑中至少存在兩個 U-M-R 迴圈。因此，本研究認為高中數學資優生的數學解題思路在 SOLO 結構層次之發展的主要特徵是至少存在兩個 U-M-R 迴圈，第一個迴圈的關聯反應，在第二迴圈中成為單一反應；同時，亦認為若在第二個 U-M-R 迴圈後的解題思路發生心智特徵的質性變化，則其解題思路會產生遷移而漸進至更高階級的層次，形成不同發展樣貌的解題思路。

在修訂版 Bloom 之知識向度方面，根據圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的漸進路徑圖，發現 6 位個案學生的解題思路所展現的知識類型皆從事實知識出發。此結果顯示，事實知識是用於解決問題的基本知識，其內涵的主要特徵是，學生聯想有關數學術語，或是特定細節與元素的知識，將問題的內容轉換成某種認知表徵。此內涵特徵與 Anderson 等人(2001)的觀點一致，認爲事實知識是學生應了解的有關數學專有名詞，或是可以進行問題解決的基本要素。此外，亦發現 6 位個案學生的解題思路並不一定都有運用後設認知知識，例如，學生 SS2 在解題過程中並未即時監控自己解題的正確性。此結果顯示後設認知知識是能幫助學生有效監控在解題中運用某個解題策略，或在解題後能判斷答案是否合理，甚至能用其他的方法來確定自己最後解題結果是否正確，這樣的認知與覺察歷程，也是學生解題思路漸進至擴展抽象結構所展現的主要知識特徵。此特徵與 Anderson 等人(2001)的觀點一致，認爲後設認知知識是學生瞭解如何監控、調整和修正自己的認知歷程，促進自我的認知學習活動獲得有效的成果。

在修訂版 Bloom 之認知歷程向度方面，根據圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的漸進路徑圖，發現 6 位個案學生的解題思路所展現的認知歷程並不一定起於記憶，例如，學生 SS3、SS4 與 SS5 之解題認知歷程是起於瞭解層次；同時，亦非一定終止於創造，例如，學生 SS2 之解題認知歷程僅發展至評鑑層次，甚至學生 SS1 一開始的解題思考起於創造層次，接著再利用學習保留而跨越至記憶層次。因此，此結果顯示 6 位個案學生之解題思考的認知歷程層次之遷移不但具有跨越性，亦具有循序漸進性。由此可見，6 位個案學生之數學解題思路之認知歷程的主要特徵是，在不同認知層次之間會產生相互跨越遷移，在相同認知層次會產生保留或遷移的漸進現象。此特徵與 Krathwhol (2002) 的觀點相仿，認爲相鄰的兩個不同認知層次可能有重疊或相互跨越之現象，整個階層發展的過程具有漸增複雜的特性（黃嘉雄，2004）。

綜合上述，本研究認爲高中數學資優生之數學解題思考，在 SOLO 分類法所展現的主要特徵是，至少存在兩個 U-M-R 迴圈或路徑；而在修訂版 Bloom 知識向度的主要特徵是，將問題的內容轉換成某種認知表徵，再運用數學概念之原理通則，執行一系列的解題程序與策略；而在修訂版 Bloom 認知歷程向度的主要特徵則是，不同認知層次之間會發生跨越遷移，同時，認知層次的複雜性會往較高層級漸增發展。

2. 六位個案學生之解題思路在兩種分類法之結構層次之間的相關性

本研究再從圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的 SOLO 結構層次之漸進路徑圖進行趨勢分析，發現當個案學生之數學解題表現在 SOLO 分類法達到擴展抽象結構層次時，則同時在修訂版 Bloom 之知識向度均達到後設認知層次，而認知歷程向度則到達評鑑或創造層次。此結果顯示，後設認知知識是比較能解釋 6 位個案學生之數學解題表現能夠達到擴展抽象結構層次的一種知識向度，例如，學生 SS4 利用數學歸納法進行一般性的推論是認知

行爲，但決定啓動推論則是後設認知。同時，亦顯示 6 位個案學生都能夠運用較高層次的評鑑與創造，形成數學表徵與程序規準，判斷並發展出有效的解題計畫，例如，學生 SS3 利用模數概念將問題轉化成作兩組同餘數的判斷規準，並將滿足數學式$7|(3^x - x^3)$的 x 值配對起來，形成一個完整且具原創性功能的解題策略。這些現象與 Veenman (2011)的觀點雷同，認爲高層次的後設認知會監控並調整低層次的認知歷程，決定「何時」與「爲何」運用推理策略；亦與 Steiner (2006)的觀點一致，認爲資優生較一般生能使用高層次的解題方法，並能創造出原創性的解題策略（劉哲源、劉祥通，2008；Clark, 2008）。

此外，本研究亦發現 6 位個案學生之數學解題思路在 SOLO 的結構層次，很集中式地散佈在知識與認知歷程層次之二維矩陣的對角線上。此結果顯示，6 位個案學生之解題思路在兩種分類法的結構層次之高低相關性，具有高度的正相關，據此說明了 6 位個案學生之數學解題表現的 SOLO 結構層次愈高，其所展現的解題思路在 Bloom 知識與認知歷程之結構層次也愈高階。又根據圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 之漸進路徑圖的分析結果，顯示當個案學生之解題思路的知識向度達到後設認知層次時，則此時其解題表現在 SOLO 分類法也會到達擴展抽象層次。這個現象和陳柏霖與劉佩雲(2015)的觀點雷同，認爲後設認知策略與學生之學習行爲和學習成效呈顯著的正相關。由此可見，後設認知知識的確是比較能解釋學生學習表現的一種知識向度(Liu & Lin, 2007)，故本研究認爲後設認知知識扮演著修正、監控與調整等策略選擇的重要角色，導致高中數學資優生之數學解題的心智特徵在解題思考的漸進途徑中，能夠累積足夠的動能而漸進至擴展抽象結構層次。

總言之，使用 SOLO 與修訂版 Bloom 之評價規準作爲分析高中數學資優生之數學解題表現的評價工具，所得到的類似圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的 SOLO 結構層次漸進路徑圖，不僅可用以評價學生數學解題表現在修訂版 Bloom 知識與認知歷程層次二維矩陣中的 SOLO 結構層次，亦可用以描述其解題思路在修訂版 Bloom 知識與認知歷程層次中具漸增複雜性的發展樣貌。

伍、結論與建議

一、結論

本研究以 SOLO 與修訂版 Bloom 分類法作爲質性描述高中數學資優生之數學解題表現層級的評價工具，經過兩種分類法之編碼與量化統計後，結果顯示這 6 位個案學生之 6 個回合 36 題數學競賽試題之整體解題表現，在 SOLO 分類法皆達到擴展抽象結構層次。這樣的結果說明了這 6 位個案學生在數學解題時，能夠使用關聯性的原理和方法，或更抽象的數學知識，對問題進行特殊化的論述和一般化的歸納與推理，並能拓展問題本身的意義與研究價值。在修訂版 Bloom 之知識與認知歷程的結構層次，皆達到後設認知與創造層次，這樣的結果亦說明了這 6 位個案學生在數學解題時，能夠對於所用的解題策略、策略情境、策略有效程度和自我知識等方面進行自我認知與覺察，同時，亦能夠透過

解題思路之心智特徵的正逆向轉化過程，創造出原創性的解題策略。

另外，在層次發展樣貌方面，根據圖 2、圖 4、圖 6、圖 8、圖 10 及圖 12 的解題思路所展現的 SOLO 結構層次漸進路徑圖的分析，結果顯示這 6 位個案學生之解題表現的 SOLO 結構層次愈高，其所展現的修訂版 Bloom 之知識與認知歷程層次也愈好。這樣的正向關聯性結果說明了這 6 位高中數學資優生在解決數學競賽問題過程中，當解題思路之心智特徵在知識類型與認知歷程所使用的的層次提升時，則其解題反應會在 SOLO 的漸進路徑中產生遷移而漸進至更高的結構層次。此外，這 6 位個案學生之數學解題思路的發展樣貌之主要特徵是至少存在兩個 U-M-R 迴圈或路徑，且當修訂版 Bloom 的知識與認知歷程向度分別到達後設認知，以及評鑑或創造層次時，則個案學生之解題表現有機會累積足夠的遷移能量，漸進到 SOLO 分類法的擴展抽象結構層次。這樣的主要特徵，不僅闡述了 U-M-R 迴圈或路徑是高中數學資優生在解決數學競賽試題的過程中，發展解題思路的一個重要且理想的認知途徑，亦說明了後設認知知識是幫助高中數學資優生有效監控、調整和修正自己的認知歷程之關鍵的知識類型，亦是導致其數學解題表現臻至擴展抽象層次的重要心智特徵。

總言之，本研究認為 SOLO 分類法是一種以結構層次描述高中數學資優生之數學解題表現的質性評價工具，若能將高中數學資優生之數學解題思路的結構層次及其漸增複雜性的發展樣貌，與其所展現在修訂版 Bloom 知識與認知歷程向度的心智特徵聯繫起來，則在學生評量的應用上，有其重要的研究意義與教育實務價值。也就是說，透過 SOLO 分類法之質性評價，可以讓高中數學資優生的數學解題思路變得更加可觀察，一來可以協助數學教師診斷學生數學解題表現的發展脈絡，二來幫助數學教師覺察其與教學目標的最近發展區之差距，為提升學生數學解題能力之教學策略提供更務實的回饋。因此，本研究結論的蘊涵，乃冀期透過本研究所整合的兩種分類法之評價規準，針對高中數學資優生之數學解題表現在修訂版 Bloom 的二維矩陣中，繪製其解題思路之 SOLO 結構層次的漸進路徑圖，藉由此圖幫助高中數學教師理解高中數學資優生之數學解題的心智特徵與其 SOLO 評價層級之間的脈絡關係，亦能夠為數學教育工作者設計高中數學資優培訓教材、指導數學資優專題課程，甚至進行相關數學教育研究，提供一個質性分析的參考。

二、建議

雖然本研究闡述了高中數學資優生之解題表現在 SOLO 分類法的結構層次，與其在修訂版 Bloom 的知識與認知歷程層次之間，存在正向的關聯性，然而並未深入探討影響高中數學資優生解題思路之認知發展的可能因素，例如，U-M-R 迴圈或路徑的運作機制，前一個 U-M-R 的關聯結構如何成為下一個 U-M-R 的單一結構或擴展抽象結構，或者影響漸進至擴展抽象結構層次的關鍵心智特徵，以及高中數學資優生在數學解題一開始有關事實知識的切入點，和面對問題的解題經驗與動機等心理特徵因素；甚至也未深入探討所有一般高中學生之數學解題表現的 SOLO 結構層

次，與其解題思路之心智特徵及其發展樣貌的關聯性。

另外，根據本研究的研究結果發現，高中數學資優生數學解題思路之結構層次的漸進過程，都存在個數不一的 U-M-R 迴圈或路徑，但也尚未對於造成這樣迴圈數差異的可能因素做深入的研究。因此，針對本研究在相關延伸議題所遇到的研究侷限提出建議，是希望未來或許能試著建立「符合臺灣高中學生數學解題思路之 3D 結構層次的漸進編碼系統」，深入地探討 SOLO，以及修訂版 Bloom 之知識與認知歷程等三個維度之內涵特徵的關聯性，將有助於探究臺灣高中學生數學解題思路在這三維度之結構層次的心智特徵及其漸進發展脈絡，進而探討造成數學解題思路之 U-M-R 迴圈數差異等影響解題思路之認知發展的可能因素。

致謝：感謝科技部專題研究計畫經費的補助，計畫編號 MOST-110-2511-H-018-002

參考文獻

江奇婉、劉祥通(2010)。以追趕問題爲例探討資優個案的解題表現。*資優教育季刊*，*116*，18－24。〔Chiang, Chi-Wan, & Liu, Shiang-Tung (2010). Analysis of problem solving performance for a gifted case: Examples from the type of running and cathcing up of speed problems. *Gifted Education Quarterly*, *116*, 18-24.〕 http://dx.doi.org/10.6218%2fGEQ.201009_(116).0004

呂玉琴、呂佳蓉(2013)。國小五年級資優生解空間關係問題的解題歷程。*高雄師大學報*，*35*，33－59。〔Leu, Yuh-Chyn, & Lu, Chia-Jung (2013). A study on the processes of solving spatial-relation questions for fifth-grade gifted students. *Kaohsiung Normal University Journal. Sciences and Technology*, *35*, 33-59.〕

李坤崇(2004)。修訂 Bloom 認知分類及命題實例。*教育研究月刊*，*122*，98－127。〔Li, Kun-Chong (2004). Revision of Bloom's taxonomy and examples of proposition. *Journal of Education Research*, *122*, 98-127.〕

張昇鵬(2004)。資賦優異學生與普通學生後設認知能力與批評思考能力之比較研究。*特殊教育學報*，*20*，57－102。〔Chang, Sheng-Pong (2004). A comparative study of metacognitive ability and critical thinking ability between gifted and regular students. *Journal of Special Education*, *20*, 57-102.〕 https://doi.org/10.6768/JSE200412.0057

張景媛(1994)。數學文字題概念分析及學生建構數學概念的研究。*教育心理學報*，*27*，175－200。〔Chang, Ching-Yuan (1994). The analysis of misconceptions of mathematics word-problem and the way of students' constructing mathematics concept. *Bulletin of Educatinal Psychology*, *27*, 175-200.〕 https://doi.org/10.6251/BEP.19940601.7

教育部(2013)。*十二年國民基本教育實施計畫*。作者。〔Ministry of Education (2013). *12-year basic education implementation plan*. Author.〕

郭靜姿(2000)。談資優生縮短修業年限的鑑定與輔導方式。*資優教育季刊，76*，1－11。〔Kuo, Ching-Chih (2000). Identifying gifted students who will benefit from accelerated educatin. *Gifted Education Quarterly*, *76*, 1-11.〕

郭靜姿(2003)。三十年資優學生的追蹤研究：發現與啓示。*資優教育季刊，87*，1－17。〔Kuo, Ching-Chih (2003). Longitudinal research of gifted students for 30 years: Discovery and enlightment. *Gifted Education Quarterly*, *87*, 1-17.〕

陳柏霖、劉佩雲(2015)。大學生後設認知策略、網路學習行爲與心理學學習成效之關係。*南台人文社會學報，14*，35－70。〔Chen, Po-Lin, & Liu, Pei-Yun (2015). The relationships among metacognitive strategies, learning behaviors and academic performance in psychology of internet-based learning for college students. *STUST Journal of Humanities and Social Sciences*, *14*, 35-70.〕

陳錦章、邱富宏(2001)。網路學習環境建構的新理念：融入後設認知策略與認知工具的網路學習環境建制的概念。*教學科技與媒體，58*，2－12。〔Chen, Ching-Chang, & Chu, Fu-Horng (2001). New ideas of constructing web-based learning environment: Integrating the concept of metacognitive strategies and cognitive instrument into the construction of web-based learning environment. *Instructional Technology and Media*, *58*, 2-12.〕

黃志成、王麗美、高嘉慧(2008)。*特殊教育*（第三版）。揚智文化。〔Huang, Chih-Chen, Wang, Li-Mei, & Kao, Chia-Hui (2008). *Educating exceptional children* (3rd Ed.). Yang Chih.〕

黃嘉雄(2004)。2001 年修訂之布魯姆新版認知領域目標分類：其應用與誤用。*國民教育，45*(2)，59－72。〔Huang, Chia-Hsiung (2004). The 2001 revised Bloom’s taxonomy of educational objective in the cognitive domain: Application and misusage. *Basic Education*, *45*(2), 59-72.〕

葉辰楨、王國華、蔡明致(2010)。後設認知鷹架策略融入科學探究教學之探討。*科學教育研究與發展季刊，58*，1－32。〔Yeh, Chen-Jen, Wang, Kuo-Hwa, & Tsai, Ming-Chih (2010). An investigation into the integration of metacognitive scaffolding strategies with an instruction model for scientific inquiry. *Research and Development in Science Education Quarterly*, *58*, 1-32.〕

劉致演、秦爾聰(2018)。探討兩位國中教師發展數學臆測探究教學實務。*師資培育與教師專業發展期刊*，*11*(1)，57－89。〔Liu, Chih-Yen, & Chin, Erh-Tsung (2018). An investigation into two junior high school teachers' teaching practice in developing mathematics conjecturing-inquiry teaching. *Journal of Teacher Education and Professional Development*, *11*(1), 57-89.〕https://doi.org/10.3966/207136492018041101003

劉哲源、劉祥通(2008)。國一資優生對因倍數問題的解題分析。*資優教育研究*，*8*(1)，47－66。〔Liu, Che-Yuan, & Liu, Shiang-Tung (2008). Analyses of problem solving performance of factor and multiple problems of gifted seventh grade students. *Journal of Gifted Education*, *8*(1), 47-66.〕 http://dx.doi.org/10.7089%2fJGE.200806.0047

劉晉瑋、劉祥通、康淑娟(2010)。國小資優生在時分針問題之解題表現分析。*資優教育季刊*，*117*，33－40。〔Liu, Jin-Wei, Liu, Shiang-Tung, & Kang, Shu-Juan (2010). Analyses of problem solving performance for a gifted subject solving clock-hand problems. *Gifted Edcation Quarterly*, *117*, 33-40.〕

劉祥通、陳明聰、徐偉民(2015)。資優學生的數學課程設計。載於郭靜姿（主編），*資優教育課程設計與教學模式應用*（頁 3.1－3.18）。華騰。〔Liu, Shiang-Tung, Chen, Ming-Chung, & Hsu, Wei-Min (2015). Curriculum design of mathematics for gifted students. In Kuo, Ching-Chih (Ed.), *Curriculum development and application of teaching models in gifted and talented education* (pp. 3.1-3.18). Farterng.〕

蔡子雲、劉祥通(2007)。資優生在想什麼？——速率篇。*資優教育研究*，*7*(1)，29－47。〔Cai, Zih-Yun, & Liu, Shiang-Tung (2007). How are gifted students think about "Speed". *Journal of Gifted Education*, *7*(1), 29-47.〕https://doi.org/10.7089/JGE.200706.0029

鄭蕙如、林世華(2004)。Bloom 認知領域教育目標分類修訂版理論與實務之探討——以九年一貫課程數學領域分段能力指標爲例。*臺東大學教育學報*，*15*(2)，247－274。〔Cheng, Huey-Ru, & Lin, Sieh-Hwa (2004). Theory and practice of the revision of Bloom's taxonomy of educational objectives--Take competence indicators of nine-year integrated mathematical curriculum as an example. *NTTU Educational Research Journal*, *15*(2), 247-274.〕

顏富明、張靜嚳(2011)。以建模觀點詮釋國中資優生的數學解題活動。*科學教育研究與發展季刊*，*60*，91－132。〔Yen, Fu-Ming, & Chang, Ching-

Kuch (2011). Using modeling perspectives to interpret mathematic problem solving activities of junior high school gifted students. *Research and Development in Science Education Quarterly*, *60*, 91-132.〕

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J., & Wittrock, M. C. (Eds.) (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Longman.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1989). Towards a model of school-based curriculum development and assessment using the SOLO taxonomy. *Australian Journal of Education*, *33*(2), 151-163. https://doi.org/10.1177/168781408903300205

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Erlbaum.

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives, handbook 1: Cognitive domain*. David McKay.

Borkowski, J. G., & Peck, V. A. (1986). Causes and consequences of metamemory in gifted children. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 182-200). Boston, MA: Cambridge.

Campbell, K. J., Watson, J. M., & Collis, K. F. (1992). Volume measurement and intellectual development. *Journal of Structural Learning*, *11*, 279-298.

Chan, C. C., Tsui, M. S., Chan, M. Y., & Hong, J. H. (2002). Applying the structure of the observed learning outcomes (SOLO) taxonomy on student's learning outcomes: An empirical study. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *27*(6), 511-527. https://doi.org/10.1080/0260293022000020282

Chick, H. (1998). Cognition in the formal modes: Research mathematics and the SOLO taxonomy. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(2), 4-26. https://doi.org/10.1007/BF03217340

Clark, B. (2008). *Growing up gifted: Developing the potential of children at home and at school* (7th ed.). Pearson.

Davis, G. A., Rimm, S. B., & Siegle, D. (2011). *Education of the gifted and talented* (6th ed.). Pearson.

Fusch, P., Fusch, G. E., & Ness, L. R. (2018). Denzin's paradigm shift: Revisiting triangulation in qualitative research. *Journal of Social Change*, *10*(1), 19-32. https://doi.org/10.5590/JOSC.2018.10.1.02

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14-17. https://doi.org/10.5951/AT.28.6.0014

Jimoyiannis, A. (2011). Using SOLO taxonomy to explore students' mental models of the programming variable and the assignment statement. *Themes in Science and Technology Education*, *4*(2), 53-74.

Johnson, D. T. (2000). *Teaching mathematics to gifted students in a mixed-ability classroom* (ED441302). ERIC. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441302.pdf

Kitano, M. K., & Kirby, D. F. (1986). *Gifted education: A comprehensive view*. Little, Brown.

Kramarski, B. (2004). Making sense of graphs: Does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and a1ternative conceptions? *Learning and Instruction*, *14*(6), 593-619. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.09.003

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematics abilities in school children*. University of Chicago Press.

Liu, Z. F., & Lin, S. J. (2007). Relationship between peer feedback, cognitive and metacognitive strategies and achievement in networked peer assessment. *British Journal of Educational Technology*, *38*(6), 1122-1125. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2007.00702.x

Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (2001). The revised taxonomy structure: The cognitive process dimension. In. L. W. Anderson, D. R. Krathwohl, P. W. Airasian, K. A. Cruikshank, R. E. Mayer, P. R. Pintrich, J. Raths, & M. C. Wittrock (Eds.), *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives* (pp. 63-92). Addison Wesley Longman, Inc.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, 73(4), 449-471. https://doi.org/10.1348/000709903322591181

Mulbar, U., Rahman, A., & Ahmar, A. S. (2017). Analysis of the ability in mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy and cognitive style. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, *15*(1), 68-73. http://doi.org/10.26858/wtetev15i1y2017p6873

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.

Organisation for Economic Cooperation and Development. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics, and financial literacy.* Author. https://doi.org/10.1787/9789264281820-en

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(6), 468-475. https://doi.org/10.1007/BF02655855

Pintrich, P. R., & Wittrock, M. C. (2001). The revised taxonomy structure: The knowledge dimension. In. L. W. Anderson, D. R. Krathwohl, P. W. Airasian, K. A. Cruikshank, R. E. Mayer, P. R. Pintrich, J. Raths, & M. C. Wittrock (Eds.), *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives* (pp. 38-62). Addison Wesley Longman, Inc.

Quintana, C., Zhang, M. L., & Krajcik, J. (2005). A framework for supporting metacognitive aspects of online inquiry through software-based scaffolding. *Educational Psychologist*, *40*(4), 235-244. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4004_5

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan*, *60*(3), 180-184.

Schurter, W. A. (2002). Comprehension monitoring: An aid to mathematical problem solving. *Journal of Developmental Education*, *26*(2), 22-33.

Shea, P., Gozza-Cohen, M., Uzuner, S., Mehta, R., Valtcheva, A., Hayes, S., & Vickers, J. (2011). The community of inquiry framework meets the SOLO taxonomy: A process-product model of online learning. *Educational Media International*, *48*(2), 101-113. https://doi.org/10.1080/09523987.2011.576514

Snow, R. E., Corno, L., & Jackson, D. III. (1996). Individual differences in affective and conative functions. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 243-310). Prentice Hall International.

Steiner, H. H. (2006). A microgenetic analysis of strategic variability in gifted and average-ability children. *Gifted Child Quarterly*, *50*(1), 62-74. https://doi.org/10.1177/001698620605000107

Harlow, S., Cummings, R., & Aberasturi, S. M. (2006). Karl Popper and Jean Piaget: A rationale for constructivism. *The Educational Forum*, *71*(1), 41-48. https://doi.org/10.1080/00131720608984566

Teong, S. K. (2003). The effect of metacognitive training on mathematical word-problem solving. *Journal of Computer Assisted Learning*, *19*(1), 46-55. https://doi.org/10.1046/j.0266-4909.2003.00005.x

Veenman, M. V. J. (2011). Alternative assessment of strategy use with self-report instrument: A discussion. *Metacognition Learning*, *6* (2), 205-211. https://doi.org/10.1007/s11409-011-9080-x

Wagster, J., Tan, J., Biswas, G., & Schwartz, D. (2007 July 9-13). *How metacognitive feedback affects behavior in learning and transfer* [Paper presentation]. The 13th International Conference on Artificial Intelligence in Education, Los Angeles, CA, United States.

Yilmaz-Tüzün, Ö., & Topcu, M. S. (2010). Investigating the relationships among elementary school students' epistemological beliefs, metacognition, and constructivist science learning environment. *Journal of Science Teacher Education*, *21*(2), 255-273. https://doi.org/10.1007/s10972-009-9163-6

Yin, R. K. (2017). *Case study research and applications: Design and methods.* SAGE.

附錄一：個案學生之評量實作試題，共 36 道數學問題

第一回合

1. 若 $(\cos 42° + \cos 102° + \cos 114° + \cos 174°)^2 = \dfrac{n}{m}$，其中 $m, n \in N$，且 m, n 互質，求 $m+n$ 之值。
2. 在給定的數列 2003，2006，2010，2012，2018，2021，2023，2027，2032，2045，2047 中，相鄰若干個數之和能被 11 整除的數組共有多少組？
3. 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} // \overline{BC}$，E 是邊 $\overline{AB}$ 上的動點，O_1, O_2 分別是ΔAED、ΔBEC 的外心，試證：$\overline{O_1O_2}$ 之長度恆爲定值。
4. 設α、β、γ爲方程式 $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ 的三根，對 $n \in N \cup \{0\}$，令 $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$，求 S_{2014} 的個位數字。
5. 實數 x, y 滿足 $x^2 + xy + y^2 = 3(x+y+3)$，求 $x^2 + y^2$ 之最大值與最小值。
6. 符號定義：設 $b > 0$，$\{b\}$ 表 b 的小數部分。設 n 是正整數，a 是有理數，$0 < a < 2000$，但不是整數，則滿足 $\{a^2\} = \{\dfrac{n!}{2000}\}$ 的 (a, n) 共有__________組。

第二回合

1. 設 $a, b, \alpha, \beta \in R$；試證：
$$\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2}+\sqrt{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha^2+(\beta-b)^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \ge 2\sqrt{a^2+b^2}$$ 。
2. 設 P 爲 ΔABC 平面上任一點，$a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$；試證：
$$a\overline{PB}\cdot\overline{PC} + b\overline{PC}\cdot\overline{PA} + c\overline{PA}\cdot\overline{PB} \ge abc$$ 。
3. 設 $n \in N$，若 $f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + (n-2)^3 + (n-1)^2 + n$，試求 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ 的最小值。

4. 數列$\{a_n\}$定義如下：$a_1=1$，且當$n\geq 2$時，$a_n=\begin{cases} a_{\frac{n}{2}}+1, & 當 n 為偶數 \\ \dfrac{1}{a_{n-1}}, & 當 n 為 奇數 \end{cases}$；已知$a_n=\dfrac{30}{19}$，求正整數$n$。

5. 證明存在一個有理數$\dfrac{c}{d}$，其中$d<100$，能使$[k\cdot\dfrac{c}{d}]=[k\cdot\dfrac{73}{100}]$，對於$k=1,2,\cdots,99$均成立。

6. 在菱形 ABCD 中，$\angle A=60^0$，E 爲ΔABD的外接圓的劣弧BD上的任意一點，直線 DE 與 AB 交於點 F，求證：AD，BE，CF 三線共點。

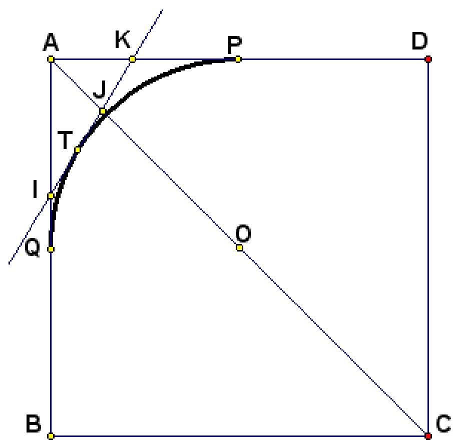
第三回合

1. 證明：沒有三個有理數x,y,z，滿足$x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)+5=0$。

2. 設x爲不大於 2006 之正整數，又3^x-x^3被 7 整除，問x有多少個？

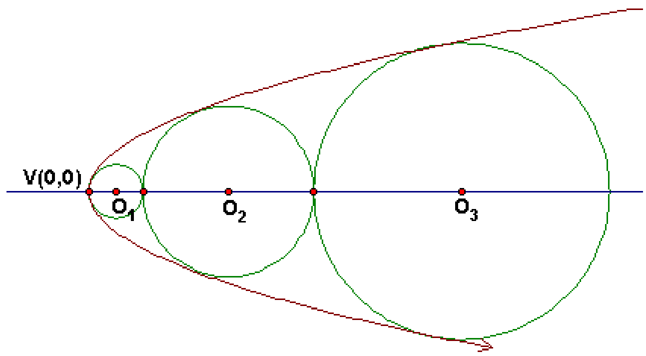
3. $0<a<\sqrt{3}\sin\theta$，$\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，求$f(a,\theta)=\sin^3\theta+\dfrac{4}{3a\sin^2\theta-a^3}$之最小値？

4. 已知圓O爲正方形$ABCD$的內切圓（如圖所示），設P,Q兩點分別爲圓O與$\overline{AD}$、$\overline{AB}$的切點，若T爲PQ弧上異於P,Q的任意點，且過T點作圓弧PQ的切線，交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$於I,J,K三點，試證：$\dfrac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\dfrac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}+\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=1$。



5. 設m,n均爲正整數，試證明：$\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}}+\dfrac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$。

6. 已知一系列互相外切的圓$C_n(n=1,2,3,\cdots)$，其中圓C_1與拋物線$y^2=x$相切，也相切於頂點，如圖所示。每個圓$C_n(n>1)$都與拋物線$y^2=x$相切，且與圓C_{n-1}相切，若圓C_1之半徑$r_1=\dfrac{1}{2}$，試求圓C_{2014}的半徑r_{2014}。



第四回合

1. 在邊長為 $a,b,c(a \le b \le c)$ 的三角形中，a,b,c 上的高分別為 h_a,h_b,h_c，求 $K=\min(\frac{h_a}{h_b},\frac{h_b}{h_c})$ 的取值範圍。
2. n 粒糖圍成一個圓圈，依順時針次序編上號碼 1,2,3,…,n，自 1 號開始，每隔 1 粒取走 1 粒，陸續取走第 1,3,5,…粒，最後剩一粒，問它的號碼是多少？
3. 已知有 n 份文件由 n 個人保管，證明：在 $n \ge 4$ 時，要通 $2n-4$ 次電話（每次電話中，兩個人交換他們所知道的信息），每個人就可以知道 n 份文件的內容。
4. 設數列 $<a_n>$ 滿足 $a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=n+1\ (n=1,2,\cdots)$，求證：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \ge 2(\sqrt{n+1}-1)$$ 。

5. 求大於 1 的整數 m,n,k，使 $1!+2!+3!+\cdots+m!=n^k$ 。

6. 100 個正數 $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_{100}$ 滿足及 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2 \ge 10000$，且

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=300$，求證：$a_1+a_2+a_3>100$ 。

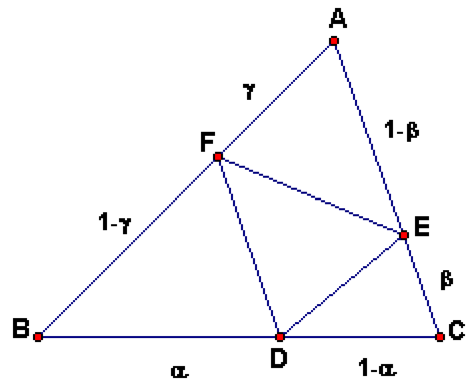
第五回合

1. 證明：在$n \ge 3$時，2^n 可以表示成$7x^2 + y^2$，其中x, y均爲奇數。

2. 某市有n所中學，第i所中學派出a_i名學生$(1 \le a_i \le 39, 1 \le i \le n)$來到體育館觀看球賽，總人數$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1990$。看台上每一橫排有 199 個座位，同一學校的學生必須坐在同一橫排，問至少要安排多少個橫排才能保證學生全部坐下。
3. 在 1,2,3,…,1990 中至多能選出多少個數，使得任意兩個選出的數x, y都有和$x+y$不被差$x-y$整除？

4. 設$d_1, d_2, \cdots, d_k (k \ge 4)$爲$n$的全部因數，若$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$，且$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$，求$n$之值。

5. 任意 4 個不全相等的數字可以組成若干個四位數（允許千位數可爲 0），用其中最大的減去最小的，稱爲一次操作，對所得差的 4 個數字繼續施行同樣的操作，證明：經過有限多次操作後，得到的結果都是 6174。
6. 在ΔABC的三邊上各任取一點，如圖所示，證明ΔAEF，ΔBDF，ΔCDE中至少有一個的面積不大於ΔABC的$\frac{1}{4}$。



第六回合

1. 如果在$|x| \le 1$時，$|ax^2 + bx + c| \le 1$，證明：在$|x| \le 1$時，$|f'(x)| = |2ax + b| \le 4$。（馬爾可夫不等式），可推廣到$n$次多項式$f(x)$，如果在$|x| \le 1$時，$|f(x)| \le M$，則在$|x| \le 1$時，$|f'(x)| \le Mn^2$。

2. 某二次式 ax^2+bx+c 在區間 $[0,1]$ 上所有值的模均不超過 1，則 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值爲何?

3. 已知數列 $<r_n>$ 滿足，$r_1=2$，$r_n=r_1r_2\cdots r_{n-1}+1\ (n=2,3,4,\cdots)$，若自然數 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，滿足 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1$，求證：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\cdots+\frac{1}{r_n}$。

4. 設 $b=100$，$b_{n+1}=100^{b_n}\ (n=1,2,3,\cdots)$，$a_1=3$，$a_{n+1}=3^{a_n}$，求滿足 $b_m>a_{100}$ 的最小正整數 m。

5. 試證對所有大於 1 的自然數 n，不等式 $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{n}}}}<3$ 恆成立。

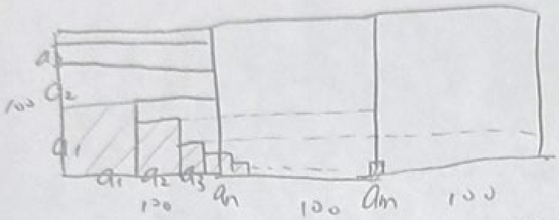
6. 對於任意實數 x，二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c(a<b)$ 之值恆大於或等於 0，試求在此情形之下，$\frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值。

附錄二：六位個案學生之解題表現

1. SS1R4Q6

6. 100 個正數 $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_{100}$ 滿足及 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \ge 10000$，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$，求證：$a_1 + a_2 + a_3 > 100$。

SOL：



1.作一長為300.寬為100的長方形，又 $a_1 + \cdots + a_{100} = 300$，所以我們可以將以 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 為邊長的正方形靠下放入長方形中(由大到小).

2.設 $a_1 + a_2 + a_3 \le 100$，因為由大排到小所以中間方格內的面積 $< 100a_2$，同理，最左邊的方格內的面積 $< 100a_3$.

∴總面積 $= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 < 100a_1 + 100a_2 + 100a_3 \le 10000$ (矛盾)

∴ $a_1 + a_2 + a_3 > 100$

【How to think mathematically】

利用構造法.

2. SS2R4Q6

6. 100 個正數 $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_{100}$ 滿足及 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \ge 10000$，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$，求證：$a_1 + a_2 + a_3 > 100$。

SOL：

1° 在 $a_1+a_2+\cdots+a_n=k$ 時

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2 \le (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=k^2$

2° 設 $a_1+a_2+a_3=k\le 100$

則由1°，有 $a_4^2+a_5^2+\cdots+a_{100}^2 \le a_3^2\cdot\frac{300-k}{a_3}=(300-k)a_3$

$\Rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+(300-k)a_3$

$=a_1^2+a_2^2+(a_3+150-\frac{k}{2})^2-(150-\frac{k}{2})^2$ — ①

由 $a_1+a_2+a_3+150-\frac{k}{2}=150+\frac{k}{2}$ = 定值

$\Rightarrow$ 由1° 最大值為使 a_3 為 Max $\Rightarrow a_1=a_2=a_3=\frac{k}{3}$

① $\le \frac{2k^2}{9}+(150-\frac{k}{6})^2-(150-\frac{k}{2})^2=100k$

3° 當 $k=100$ 時 ∵ 等号成立時 $a_1=a_2=a_3=\frac{100}{3}$

又 $a_3=a_4=\cdots=a_9=\frac{100}{3}$，但此時 $a_{10}=0$

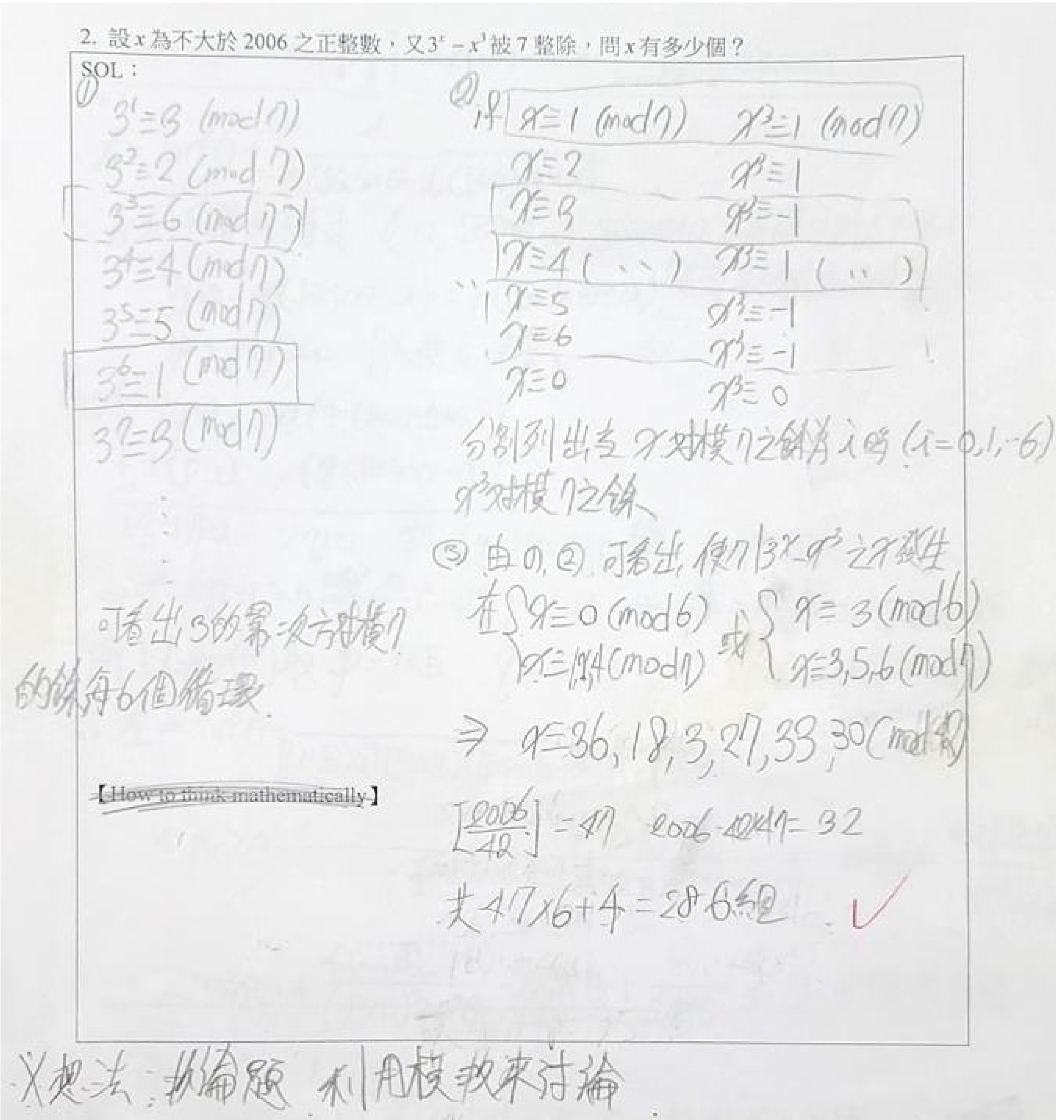
與 $\{a_n\}\in R^+$ 不合。

∴ $a_1+a_2+a_3>100$ #

【How to think mathematically】

這題一看就知道應該是反証。（這題我的解法不嚴謹）

3. SS3R3Q2



2. 設 x 為不大於 2006 之正整數，又 $3^x - x^3$ 被 7 整除，問 x 有多少個？

SOL：

①

$3^1\equiv 3 \pmod 7$

$3^2\equiv 2 \pmod 7$

$\boxed{3^3\equiv 6 \pmod 7}$

$3^4\equiv 4 \pmod 7$

$3^5\equiv 5 \pmod 7$

$\boxed{3^6\equiv 1 \pmod 7}$

$3^7\equiv 3 \pmod 7$

⋮

可看出3的冪次方對模7的餘每6個循環.

②

若 $x\equiv 1 \pmod 7$　$x^3\equiv 1 \pmod 7$

$x\equiv 2$　$x^3\equiv 1$

$x\equiv 3$　$x^3\equiv -1$

$x\equiv 4$ (〃)　$x^3\equiv 1$ (〃)

$x\equiv 5$　$x^3\equiv -1$

$x\equiv 6$　$x^3\equiv -1$

$x\equiv 0$　$x^3\equiv 0$

分別列出當 x 對模7之餘為 i 時 $(i=0,1,\dots 6)$ x^3 對模7之餘.

③ 由①,②可看出，使 $7\mid 3^x-x^3$ 之 x 發生在 $\begin{cases} x\equiv 0 \pmod 6 \\ x\equiv 1,2,4 \pmod 7\end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 6 \\ x\equiv 3,5,6 \pmod 7\end{cases}$

$\Rightarrow x\equiv 36,18,3,27,33,30 \pmod{42}$

$\left[\frac{2006}{42}\right]=47$　$2006-42\times 47=32$

共 $47\times 6+4=286$ 組 ✓

~~【How to think mathematically】~~

X想法：拆論題 利用模數來討論

4. SS4R4Q2

2. n 粒糖圍成一個圓圈，依順時針次序編上號碼 $1,2,3,\cdots,n$，自 1 號開始，每隔 1 粒取走 1 粒，陸續取走第 $1,3,5,\cdots$ 粒，最後剩一粒，問它的號碼是多少？

SOL：

設 $f(n)$ 為 n 顆中剩下的一粒

1° 證 $f(2n)=2f(n)$

⇒ 將 $2n$ 粒排成一圈，則取一輪後剩下 n 顆，且每一顆之編号為在 n 顆時的 2 倍，且由第 $2n$ 顆不取，因此新的一輪恰從 2 号開始取，得 $f(2n)=2f(n)$ ※

2° 證 $f(2n+1)=2f(n)+2$

⇒ 前面步驟仿上，則在取一輪後，是自 4 号糖取起，∴ $f(2n+1)=2f(n)+2$，但在 $f(n)=n$ 時 $f(2n+1)=2n+2 \pmod{2n}=2$

3° 證在 $2^n < x \le 2^{n+1}$ $f(x)=2(x-2^n)$，其中 $n\in N$

① $n=1$ 時 $2^1 < x \le 4$

$f(3)=2=2(3-2)$ $f(4)=4=2(4-2)$

② 設 $n=k-1$ 時，$2^{k-1} < x \le 2^k$ 時皆有 $f(x)=2(x-2^{k-1})$

③ $n=k$ 時 設 ① $x=2^k+2t$

$f(x)=2f(\frac{x}{2})=2\cdot 2(2^{k-1}+t-2^{k-1})$

$=4t$

② $x=2^k+2t+1$

$f(x)=2f(2^{k-1}+t)+2=4t+2$

由①,②,③得證※

A：$2^n < x \le 2^{n+1}$ 時 $f(x)=2(x-2^n)$，$f(1)=1$

【How to think mathematically】

我一開始先做了幾個例子，然後找到規律，再想辦法證明。(如何簡化列？)

5. SS5R4Q5

5. 求大於 1 的整數 m,n,k，使 $1!+2!+3!+\cdots+m!=n^k$。

SOL：

① $1!+2!+3!=9=3^2$ 有一解

$m\geq 3$ 時，$3\mid m!$ ∴ $3\mid n^k$

② $m=4$&5：$n^k=33$&153 無解 → $m\geq 6$

$\sum_{i=1}^{5} i!=153=3^2\times 17$

$m\geq 6$ 時，$3^2\mid m!$ ∴ $3^2\mid n^k$

③ $m=6$&7&8：$n^k=873$&5913&46233 均無解 → $m\geq 9$

$3^3\nmid \sum_{i=1}^{8} i!=46233=3^2\times 5137$

$m\geq 9$ 時，$3^3\mid m!$ ∴ $3^3\nmid n^k$

由①②③可得以下結論：

$\begin{cases} m<9 \text{ 時，有 } (m,n,k)=(3,3,2) \\ m\geq 9 \text{ 時，} 3^2\mid n^k \text{ 但 } 3^3\nmid n^k \rightarrow k=2,\ n=3p \text{ 且 } 3\nmid p \end{cases}$

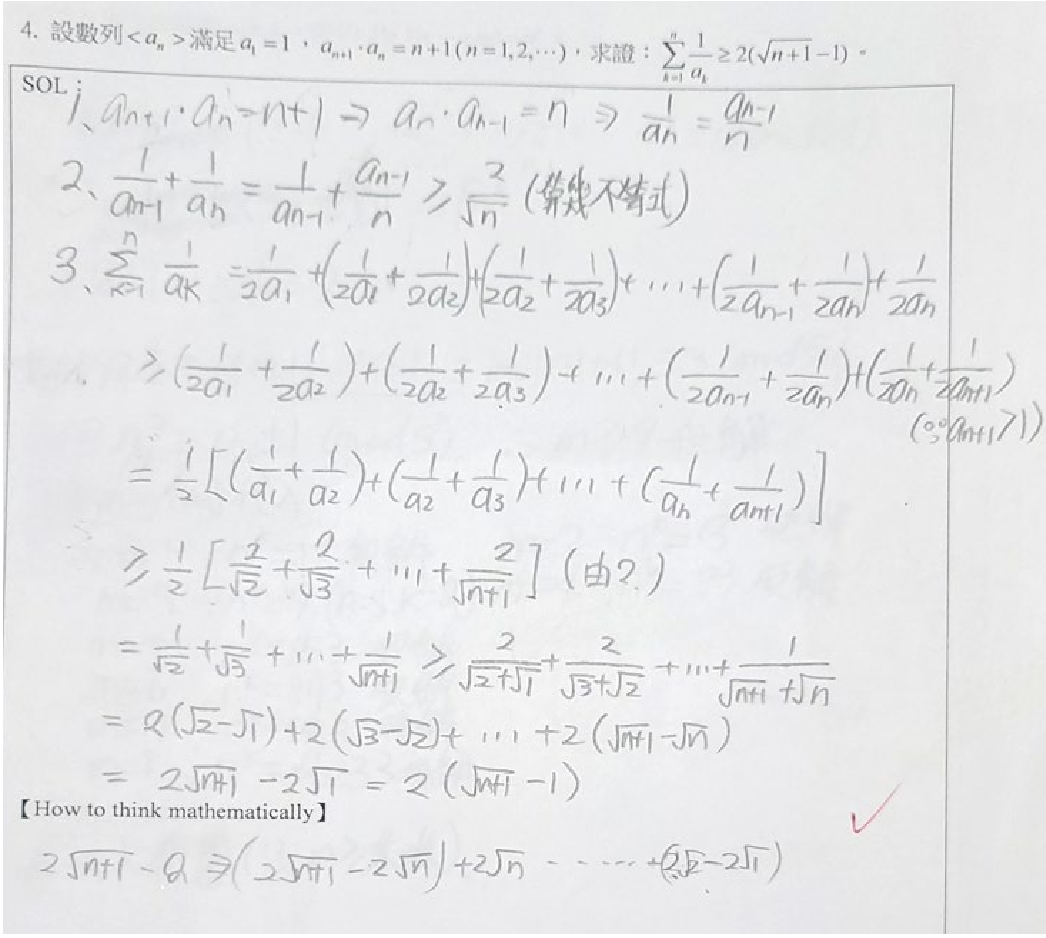
但 $m\geq 9$ 時，$\sum_{i=1}^{m} i!\equiv 1!+2!+3!+4!\equiv 3 \pmod{10}$ 不可能為平方數 → 無解#　　A：$(3,3,2)$

【How to think mathematically】

以同餘試之，$m\geq 4$ 時，就已不可能為平方數，

又 $k=2$ ∴ $m<4$.

6. SS6R4Q4



4. 設數列 $< a_n >$ 滿足 $a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=n+1\ (n=1,2,\cdots)$，求證：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge 2(\sqrt{n+1}-1)$。

SOL：

1、$a_{n+1}\cdot a_n=n+1 \Rightarrow a_n\cdot a_{n-1}=n \Rightarrow \frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}}{n}$

2、$\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{n}\ge\frac{2}{\sqrt{n}}$ (算幾不等式)

3、$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2a_1}+\left(\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}\right)+\left(\frac{1}{2a_2}+\frac{1}{2a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2a_{n-1}}+\frac{1}{2a_n}\right)+\frac{1}{2a_n}$

$\ge\left(\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}\right)+\left(\frac{1}{2a_2}+\frac{1}{2a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2a_{n-1}}+\frac{1}{2a_n}\right)+\left(\frac{1}{2a_n}+\frac{1}{2a_{n+1}}\right)$ ($\because a_{n+1}>1$)

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$

$\ge\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right]$ (由2)

$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ge\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1}=2(\sqrt{n+1}-1)$

【How to think mathematically】

$2\sqrt{n+1}-2\Rightarrow(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})+2\sqrt{n}\cdots\cdots+(2\sqrt{2}-2\sqrt{1})$

Journal of Special Education, 2022, Vol. 56, 31-79
DOI: 10.53106/207455832022120056002

Investigating the Qualitative Evaluation of High School Gifted Student's Mathematical Problem Solving Mental Path Using SOLO and Revised Bloom's Taxonomies

Erh-Tsung Chin
Graduate Institute of Science Education,
National Changhua University of Education

Cheng-Hua Tsai
Taichung Municipal Taichung
First Senior High School

Abstract

The purpose of this study was to use the Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO) taxonomy and the revised Bloom taxonomy as evaluation tools to analyze the problem-solving performance of high school gifted students in the mathematical contest tests and to explore the structural levels of their problem-solving strategies and mental paths. The research design adopted the case study and explicit feature analysis method, by deliberately selecting six high school mathematics gifted students with collecting their problem-solving manuscripts of six contest tests in the mathematics competition training course. The study refered to the theoretical framework of the two taxonomies to respectively integrate into evaluation criteria for analyzing the problem-solving performance of the six students and explored the manifestations of the structural levels and the developmental paths. The research results showed that: (1) The overall evaluation of these six case students' mathematics problem-solving performances had reached the "extended abstract structure level" in terms of SOLO; in the revised version of Bloom, their knowledge dimensions have reached the "metacognitive knowledge" level, and their cognitive process dimensions have also reached the "create" level. (2) There were several U-M-R loops appearing in the six case students' mathematics problem-solving mental paths. Meanwhile, it also showed that the higher the structure level of SOLO taxonomy, the better the level of the knowledge and cognitive process dimension of the revised version of Bloom in the case students' problem-solving performances.

***Key words*:** structure of the observed learning outcome, mathematical problem-solving performance, mathematical problem-solving mental path

Corresponding Author: Cheng-Hua Tsai E-mail: smofishmilkfish@gmail.com