

國立彰化師範大學特殊教育學系

特殊教育學報，民 112，58 期，頁 33-84

DOI: 10.53106/207455832023120058002

數學學習困難學生與非數學學習困難 學生分數數值比較能力之差異與 具體－表徵－抽象策略之教學成效

林秀真

臺南市東區復興國民小學

楊憲明

國立臺南大學特殊教育學系

摘要

本研究的目的是探究數學學習困難學生（數困生）與非數學學習困難學生（非數困生）分數數值比較能力的差異，再以具體－表徵－抽象策略提昇數困生分數數值比較能力。研究一以四年級一般生(4TA)、六年級一般生(6TA)為非數困生，以六年級閱讀障礙數困生(6RDMD)與數障生(6MD)為數困生，施測後以二因子變異數分析說明研究結果。研究二以三名數困生為對象，自編介入方案進行教學，以圖示法、目視分析法與統計分析說明研究結果。研究結果如下：(1)數困生與非數困生的分數數值比較能力有顯著差異；(2)不同題目表徵形式對數困生與非數困生的分數數值比較能力有顯著差異；(3)不同學生組別與不同題目表徵形式對分數數值比較能力有顯著的交互作用，即不同學生組別的分數數值比較能力在不同題目表徵形式有顯著差異；(4)研究參與者依循具體操作、表徵圖示逐步建立抽象概念，具體－表徵－抽象策略對增進數困生之分數數值比較能力有立即成效；(5)數困生能以抽象數字或圖示解題，具體－表徵－抽象策略對增進數困生之分數數值比較能力有短期維持效果。

關鍵字：分數、數值、CRA 策略

通訊作者：楊憲明 Email: nutnhyang@gmail.com



壹、緒論

數學涉及各種知識形態，是有效適應生活的重要能力。國中小的數學教育聚焦於學習整數和分數(Bailey et al., 2014)。我國十二年基本國民教育課程綱要中的數學領域(教育部, 2018)於第一學習階段安排分數課程—認識平分與單位分數。國小的分數表現可以預測中學的代數知識、智力、整數計算(Siegler et al., 2012)，五年級的分數知識可預測中學代數與 16 歲的分數成就，16 歲的分數知識和數學成就有 0.80 的相關(Siegler et al., 2012)，短期研究(Bailey et al., 2012, 2014; Booth & Newton, 2012)亦是。

Geary 等人(2004)將數學知識分為概念與程序兩類。學習分數會促進數概念成熟(Bailey et al., 2014)，較好的分數概念具學習優勢(Hallett et al., 2010)，過度類化整數經驗易形成整數偏見(whole number bias)干擾分數學習(Bailey et al., 2014; Siegler & Pyke, 2013)，使學習分數感到困難(Fuchs et al., 2013)。學習障礙學生(簡稱學障生)的分數概念表現遠落後同儕(Hallett et al., 2010)，不僅臺灣(李盈盈, 2004; 洪素敏、楊德清, 2002)，其他國家亦是如此(Bailey et al., 2014; Kloosterman, 2010; Martin et al., 2007; Schneider & Siegler, 2010)。

概念性知識的核心能力之一是可以準確表示數值(magnitude)(Hecht & Vagi, 2012)。數值知識能避免錯誤的計算歷程(Siegler & Pyke, 2013)，理解數值可能是學習分數的關鍵(Siegler & LortieForgues,

2014)。學障生概念學習速度較一般生緩慢(Hansen et al., 2017)，可以仿作計算步驟卻不一定能說明概念(Hallett et al., 2012)。

研究者選定分數數值概念為第一部分研究主題。由文獻確知學障生的分數數值表現較同年級一般生困難，研究者欲增加低兩個年級的一般生組別，比較其與數學學習困難學生(簡稱數困生)分數數值比較能力的差異。國內數學課程於四年級教授等值分數，因此選定四年級以上的學生作為研究參與者，以一般生四年級組(簡稱 4TA)、一般生六年級組(簡稱 6TA)為非數學學習困難學生(簡稱非數困生)；以六年級具有數學學習困難的閱讀障礙生(簡稱閱障數困生, 6RDMD)、數學障礙生(簡稱數障生, 6MD)為數困生，探究四組學生分數數值比較能力的差異。

文獻支持教學能改善學生的數值知識(Booth & Siegler, 2008; Ramani & Siegler, 2008; Siegler & Ramani, 2009; Whyte & Bull, 2008)，小學數學課程應安排數值教學(Jordan et al., 2013)。王宣惠與洪儷瑜(2019)回顧二十年(1995-2017)來國內有關數學障礙(mathematics learning disabilities, MLD, 以下簡稱數障)的研究，指出國內期刊論文 70%以上在探討教學策略，顯示教學的重要性，但其中超過 60%僅是文獻探討，實徵研究未達 30%，足見研究與實務間的落差。鑑於文獻以數線估計、比較與排序來評量數值能力，研究者有別於現行教材，採用非精算系統，以參照點估算方式，結合表徵與策略教導數困生分數數值比較概念。

具體—表徵—抽象策略(concrete-representational-abstract sequence, CRA)結



合直接教學(direct instruction), 著重操作與多感官 (multisensory instructional techniques)(Fuchs et al., 2013; Gabriel, 2016; Gault, 2016; Johnson, 2014), 將抽象的數學概念轉化為具體操作的邏輯步驟, 結構化教導思考策略, 加上放聲思考將操作轉化為解題步驟, 教導畫圖表徵概念以便快速處理訊息增加概念理解, 最後以抽象符號成功解題。CRA 策略被實證能應用於多個數學主題, 故研究者在第二部分研究依據 CRA 策略設計教材與介入方案教導數困生分數數值比較概念。

本研究分為兩部分。第一部分研究以 4TA、6TA、6RDMD 與 6MD 為研究參與者, 探究四組學生分數數值比較能力的差異。第二部分研究依據 CRA 策略設計與實施介入方案改善數困生的數值概念。本研究有二個研究目的。

1. 探討 6TA、4TA、6RDMD 與 6MD 四組學生分數數值比較能力的差異。
2. 探討數困生接受 CRA 策略教學後分數數值比較能力的改變情形。

研究問題如下。

- 1-1 不同學生組別在分數數值比較測驗的差異為何?
- 1-2 不同題目表徵形式對學生分數數值比較測驗的表現測驗的表現差異為何?
- 1-3 不同學生組別與不同題目表徵形式對分數數值比較能力是否有顯著的交互作用?
- 2-1 探討數困生在接受 CRA 策略教學後的立即成效為何?
- 2-2 探討數困生在接受 CRA 策略教學後的短期維持效果為何?

貳、文獻探討

一、數學障礙的定義與特徵

學障出現率介於學齡人口的 5%至 13.8% (Heck, 2015)。精神疾病診斷與統計手冊第 5 版 (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders-V, 以下簡稱 DSM-5) 將學障更名為特定學習疾患 (Specific Learning Disorder) (孟瑛如、簡吟文, 2014), 歸類於神經發展性疾患 (Neurodevelopmental Disorders), 強調成因源自於神經發展異常, 以核心缺陷作為鑑定基準, 按功能與嚴重程度分為輕中重三級, 再以學習行為特徵分為閱讀、書寫與數學三個亞型 (連文宏、洪儷瑜, 2017)。數障約佔學障人口數的 26% (胡永崇, 2015), 約學齡人口總數的 5%至 8% (Cole & Wasburn-Moses, 2010; Geary, 2004)。數障生在學習過程中可能因注意力短暫、無法記憶與提取數學事實、忘記程序步驟等情況而有訊息處理困難 (Lerner & Johns, 2012, 2015), 特徵如下。

(一) 數字概念困難

數障生因直覺數感(subitizing)能力不佳無法自動化依數值排序數字(Landerl et al., 2004), 也因無法如同齡一般生採取有效策略(Geary, 2004), 因此大數字計算困難, 錯誤率高。

(二) 點數困難

數障生在點數知識的發展與應用呈現困難(Lerner, 2003)。根據發展順序, 點數知識有五大原則 (李俊仁, 2017; Geary, 2004; Geary et al., 2004), 前三項的一對一對應原則(one to one corresponded principle)、穩定順序原則(stable order princi-



ple)、基數原則(cardinal principle)是基本原則，後兩項的抽象原則(abstract principle)、順序無關原則(order irrelevance principle)是彈性原則(李俊仁，2017)。數障生僅在基本原則的表現最穩定(Geary, 2004)，但即便知道一對一對應原則，也可能因工作記憶在訊息處理過程中無法有效監控點數行為，而有重複點數第一個或最後一個物品的錯誤(Geary et al., 1992)。

(三) 計算困難

DSM-5 明列計算障礙(dyscalculia)為學障亞型之一，具有數學事實提取困難、計算流暢度不足、缺乏數概念、處理速度慢……等特徵(連文宏、洪儷瑜，2017；楊坤堂，2007)，出現位值錯誤、計算方向與程序錯誤、重組錯誤、缺少特定步驟知識……等錯誤(楊坤堂、鄧國彬，2005；Raghubar et al., 2009)。如多位數加減法頻繁出現數字加減錯誤、進退位沒有增減1、都以大數減小數……等錯誤。

(四) 自動化提取數學事實困難

從長期記憶直接提取數學事實的策略反應出以記憶為本位的問題解決歷程(memory-based problem solving processes)，三年級一般生即以此作為主要計算策略，但約有25%的五年級數障生仍頻繁使用手指點數策略(Geary, 2004; Geary et al., 2004)。一般生能彈性組合不同計算策略(Geary, 2004)，自動化檢索長期記憶減低工作記憶負荷。大部分學障生約比一般生延遲兩個年級才可能得以組合計算策略(Geary et al., 2004; Goldman et al., 1988)。文獻指出無法採用有效率的策略與無法自動化提取數學事實是數障的特徵，自動化提取困難為其核心缺陷。

(五) 理解困難

許多數障生併合閱讀和口語困難，難以理解數學符號及語言(楊坤堂，2007；Lerner, 2003)。因閱讀困難不易理解題目中比較、拿走、位值……等詞彙意思，也容易出現無法排除多餘訊息、訊息重點抓取錯誤、符號使用錯誤、無法理解題意，缺乏問題表徵能力或不會選擇適當策略……等困難(楊坤堂，2007)，難以保留新概念或類化與應用概念(Heck, 2015)。

(六) 分數學習困難

分數扮演學習實數屬性改變的關鍵角色，象徵數概念成熟(Bailey et al., 2014; Siegler & Lortie-Forgues, 2014)。早期出現分數學習困難的學生，困難會延續到高中與大學階段(Hansen et al., 2017; Hecht & Vagi, 2010; Mazzocco & Devlin, 2008)。Siegler 等人(2011, 2012)對10歲國小學生實施整數與分數測驗，結果指出分數知識和整數除法計算可有效預測高中代數和整體的數學表現。學障生學習分數所需時間約是一般生的2.5倍(Hansen et al., 2017)，不僅速度緩慢，錯誤也更多。

(七) 數學焦慮

學障生對概念、計算、推理……等與數學相關的作業易感到壓力與焦慮。腦科學使用功能性核磁共振(fMRI)確認大腦在特定區塊會顯示壓力與焦慮(Heck, 2015; Lerner & Johns, 2012, 2015; Mazzotti & Mustian, 2013)，因而削弱數字處理能力與抑制工作記憶，影響學習內容的轉化、儲存與使用(Lerner, 2003)。

二、分數的數值概念

(一) 概念性知識與程序性知識及發展順序



數學知識涵括概念與程序(Geary, 2004)。概念是一種心理表徵(Hurrell, 2018),即個體能解釋與說明數學事實和屬性間的關係(Hallett et al., 2010; Nahdi & Jatisunda, 2020)。理解概念可謂建立新知識與舊經驗間的連結(Nahdi & Jatisunda, 2020),在個人現有的知識基礎上再添新知識。程序性知識即個體可以完成目標導向的動作序列,產生預期的結果(Hallett et al., 2010; Nahdi & Jatisunda, 2020)。程序性知識的獨特之處在個體無需理解相關意義即可執行。

部分學者提出以概念優先(concepts-first approach)的方式學習(Skemp, 1976),另有學者認為先練習提取與實施程序,再藉著執行程序來學習概念(Hallett et al., 2010),亦有學者認為可結合兩種方法解題,沒有順序差別。如回答 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 差是多大的減法問題,必須先判斷分數大小決定計算順序再算出分母的最小公倍數與分子的差,過程涉及數值概念與計算程序,兼具兩種知識。Rittle-Johnson 等人(2001)指出學生會交互使用兩種知識學習,知識間會相互發展與增進然後再反饋。Hecht 與 Vagi (2010)及 Miller 等人(2011)亦獲得相似的研究結果。

(二) 整數與分數

國小數學始於整數,爾後學習分數和小數。學生運用整數屬性學習分數(Alibali & Sidney, 2015; Hansen et al., 2017; Newton et al., 2014),數字發展綜合論(An Integrative Theory of Numerical Development)提出整數屬性套用到其他數字學習並非全然不變(Siegler & Lortie-Forgues, 2014)。整數具有以下屬性(Bailey et al.,

2014; Newton et al., 2014; Siegler & Lortie-Forgues, 2014):(1)整數是一個集合,包含正負整數與 0,可用單一數字表示;(2)數字有特定的前後順序與接續的數字,兩個連續整數間並無其他整數在其中;(3)具有數值,可放置在數線上表示大小,一個位置只能放置一個整數;(4)可以進行加減乘除四則運算;(5)數值固定隨加法、乘法增多,隨減法、除法減少。

分數屬性如下(Bailey et al., 2014; Newton et al., 2014; Siegler & Lortie-Forgues, 2014):(1)須以兩個數字和「/」符號表示成 a/b , a 、 b 皆為整數,且 b 不為 0;(2)排序有特定的前後順序與接續的分數,兩個分數間存有無限個分數;(3)具有數值,可放置於數線上,同一位置可放置多個分數,表示相同數值;(4)可進行加減乘除四則運算;(5)數值並非固定隨著加法、乘法增多,減法、除法變小。

整數與分數的屬性既相似也衝突,數值為兩者共同屬性。

(三) 數值概念與相關研究

數值是數字發展的核心(Siegler & Lortie-Forgues, 2014),實數都具備此項屬性。Jordan 等人(2013)以整數數線估計的正確率評估學生的整數數值知識,結果指出數線估計會影響分數概念與計算的學習,整數數值知識較好的學生學習分數較有優勢。Bailey 等人(2012)表明六年級的數值能力可以預測七年級的數學成就。Bailey 等人(2014)指出一年級的整數數值知識可預測七年級與八年級的分數數值知識。Siegler 與 Pyke (2013)明示即使在統計上控制分數計算的能力,分數數值知識和整數除法仍可預測分數計算和數學成就,



且分數數值知識與數學成就間有高度相關。Siegler 等人(2011)的研究表明分數數值能力比分數計算更能解釋個別數學成就的差異。Hansen 等人(2017)觀察 536 名三到六年級學生分數知識的改變情況，發現六年級的數困生在數線估計、等值分數和排序分數這幾項測驗表現明顯落後同年級一般生，研究結果顯示當三年級的語文能力、注意力、整數數線估計、計算流暢度表現低落，分數概念發展落後的機率約是一般生的 1.5 倍，同時約有 2.5 倍的機會被鑑定為特殊生。

數值是數障的核心缺陷之一(Butterworth et al., 2011)。Hecht 與 Vagi (2010)比較四至五年級數困生和非數困生的分數表現，結果指出分數概念和課堂注意力行為可預測分數計算、文字題和數值的表現，數困生各項表現不僅顯著低於非數困生且進步速率越趨緩慢。分數數值是學習分數易感到困難的內容(Jordan et al., 2013)，提昇數值能力是改善分數學習的關鍵之一(Siegler & Lortie-Forgues, 2014)。Jordan 等人(2013)建議國小數學課程需要安排數值教學。Hansen 等人(2017)建議將等值、比較和排序數值及異分母的計算列為分數學習困難者的教學目標。

$\frac{1}{2}$ 是學生判斷正確率最高的分數(Mazzocco et al., 2013; Siegler et al., 2011)，依此，研究者以整數 1 和分數 $\frac{1}{2}$ 作為參照點來評量研究參與者的數值能力。

(四) 分數教學策略的相關研究

閱覽文獻可發現許多分數教學的策略，如結合遊戲、閃示卡、操作活動、資訊設備等，目的都是增進學生對分數概念性與程序性知識的理解與應用。Everett 等

人(2014)對 3 名六年級分數學習低成就的學生實施 Look-Ask-Pick (LAP) 教學策略，使用閃示卡和遊戲來教導同分母與異分母分數加減法的文字題。研究結果指出 LAP 教學策略有效提升答題正確率，具有 3 週的正向保留效果。

Fuchs 等人(2013)對 290 名四年級學習高風險(at risk, AR)的學生進行教學，強調部分—整體的概念與圖示增進學生對分數概念和計算程序的理解。結果指出此教學能有效縮減 AR 生和一般生在分數測驗上的落差。Fuchs 等人(2016)將 213 名學習分數具有高風險的四年級生分為對照組與控制組，分別實施部分—整體關係的常規教學與 enVision MATH 課程(envision MATH program)，教導分數加法與乘法文字題再比較前後測差異。結果指出控制組在分數理解、計算與乘法文字題的測驗表現優於對照組。Sharp 與 Shih Dennis (2017)對 3 名四年級學障生實施繪圖策略(model drawing strategy, MDS)，教導分數比較與排序的文字題。結果指出 MDS 策略能提昇解題表現，且有 2 至 4 周的保留效果。

Westenskow 與 Moyer-Packenham (2015)隨機將 43 名五年級接受補救教學(Tier 2, T2 組)的數困生分為 3 組，分別使用實物操作(physical manipulatives, PM)、網路虛擬操作(virtual manipulatives, VM)和結合兩種操作來教導等值分數概念。結果顯示三種操作方式對學習分數等值概念和一般分數概念都有助益，以 PM 組進步最多。國內文獻也有類似 VM 的教學方式。黃彥齊(2012)運用虛擬教具對 2 名國小五年級學障生進行等值分數表徵轉換教學，結果指出虛擬教具對學習擴分及



約分概念與等值分數概念之圖形表徵轉符號表徵及符號表徵轉符號表徵的表現具有立即和保留成效。林嘉惠(2015)、阮秋華(2016)、周淑君(2018)使用萬用揭示板作為教學操作輔具，結果均指出虛擬操作有助學生理解分數概念。

CRA 策略能應用於多個數學概念教學，如國小的基本數學事實、位值、計算、分數等概念，中學的代數、方程式等數學課程。Minarti 與 Wahyudin (2019)以準實驗研究的方式對 2 個二年級班級實施 CRA 策略與直接學習法(direct learning)探討其數學概念理解是否具有差別。研究結果顯示兩種教學皆有助發展概念，學習 CRA 策略的班級進步程度較大並提昇學習態度。Berry 與 Thunder (2017)觀察一年級教師使用 CRA 策略授課，結果顯示教師讓學生使用有意義的具體物與表徵連結抽象符號來理解概念，同時以語言描述思考歷程，能讓學生深化概念減少錯誤。Gabriel (2016)將 292 名學生分為實驗組與對照組，分別實施 CRA 策略與常規教學以比較分數概念的差異。結果顯示實驗組的分數概念理解有 15%—20%的進步，對照組未呈現相同的進步。

Zulfakri 等人(2019)對 2 班七年級生各 31 人，分別實施 CRA 策略與常規教學以比較表徵與解題能力的差異。研究結果指出接受 CRA 策略教學的學生其表徵與解題能力的進步程度顯著高於接受常規教學的學生。CRA 策略亦可搭載互動式設備進行教學或用於其他教學法，Heck (2015)以 CRA 策略結合互動式白板教學，Rahmi 和 Arnawa (2018)使用 CRA 策略指導八年級

生進行探究式學習，都獲得可以提昇學生概念理解和學習動機的研究結果。

Flores 等人(2018)對 31 名五年級學困生分別實施多層次教學支持系統(multi-tiered systems of support, MTSS)中第二層次(Tier 2, T2 組)教學與 CRA 策略教學，再比較兩種教學方式對分數與小數文字題的學習效果。結果顯示接受 CRA 策略教學的學生在後測表現有較多的進步。Flores 等人推測是因為 CRA 策略在具體階段可以操作多種教具，在表徵階段使用多元圖示，提供學生多次示範和引導練習，且分別在具體階段與表徵階段的教具和數線上標示出 0 、 $\frac{1}{2}$ 和 1 ，有助學生更清楚數值。

綜觀文獻，CRA 策略具有實物操作、視覺圖示表徵與結構的教學步驟等有效教學要素，且符合國小階段學生具體階段與半具體階段的認知發展。

三、CRA 策略的起源、內容與教學步驟

CRA 策略是從具體(concrete)、表徵(representational)到抽象(abstract)三階段的教學策略，亦稱為 CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) 或 CSA (Concrete-Semiconcrete-Abstract)，源起布魯納(Bruner)，讓學生從具體操作開始學習，接著進入圖示表徵，最後習得使用抽象符號解題。CRA 策略三階段內容如下。

(一) 具體階段—Concrete (C)

此階段教師使用具體物(physical objects)呈現概念的外在物理表徵，讓學生在操作過程中以視覺、聽覺、觸覺、動覺(kinesthetic)……等多感官來建構和理解概念並放聲思考，引導學生發展出內在表徵幫助抽象概念的自動化(Azmidar et al., 2017; Berry & Thunder, 2017; Epler, 2019;



Flores et al., 2018; Hurrell, 2018; Johnson, 2014; Miller et al., 2011; Paulsen, 2005; Strickland, 2016; Witzel et al., 2008; Zulfakri et al., 2019)。教師以討論引領學生操作具體物建構對抽象概念的個別化認知(Moore, 2017)，討論讓操作和概念間的連結更清晰，避免產生迷思(Mills, 2019)。操作和討論是此階段的焦點，學生以此來連結和發展數學概念。

(二) 表徵階段—Representational (R)

此階段教師以圖片、圖畫搭建概念，學生學習把具體物轉換為半具體(semi-concrete)的視覺表徵，解決與具體階段相同型態的數學問題。此階段用圖示表徵具體物，連結具體階段的學習經驗和抽象階段的文字、數字和符號(Azmidar et al., 2017; Berry & Thunder, 2017; Cole & Wasburn-Moses, 2010; Flores et al., 2018; Hurrell, 2018; Johnson, 2014; Paulsen, 2005; Strickland, 2016; Witzel et al., 2008; Zulfakri et al., 2019)。此階段聚焦於學生能看懂、繪製和解釋圖示，用圖示理解概念和解題。

(三) 抽象階段—Abstract (A)

此階段把具體物和圖示改以數字或符號呈現，學生僅用抽象思考解決與前兩個階段一樣的數學問題(Azmidar et al., 2017; Berry & Thunder, 2017; Cole & Wasburn-Moses, 2010; Flores et al., 2018; Hurrell, 2018; Paulsen, 2005; Strickland, 2016; Witzel et al., 2008; Zulfakri et al., 2019)。此階段重點在於學生使用抽象符號理解概念和解題。

CRA 策略含有步驟結構化、放聲思考(think aloud)、視覺表徵、步驟連結、多感

官學習、主動學習等有效元素。三階段都必須使用數學詞彙和數字學習(Berry & Thunder, 2017; Flores et al., 2018)，每階段至少需要三節課，達到 80%的正確率(Heck, 2015)才進展到下一個階段。讓學生以適合自己的階段學習以減低數學焦慮(Azmidar et al., 2017; Berry & Thunder, 2017; Epler, 2019)。CRA 策略教學步驟如下(Azmidar et al., 2017; Heck, 2015; Hurrell, 2018; Miller et al., 2011)。

1. 具體階段

- (1)提供學生概念相關的具體物。
- (2)教師說明學習目的與目標。
- (3)教師說明示範與提問討論。
- (4)引導學生練習操作具體物解題。
- (5)學生獨立練習。
- (6)教師回饋。

2. 表徵階段

- (1)教師說明學習目的與目標。
- (2)繪圖表徵具體物。
- (3)教師說明示範與提問討論。
- (4)引導學生練習繪圖解題。
- (5)學生獨立練習。
- (6)教師回饋。

3. 抽象階段

- (1)教師說明學習目的與目標。
- (2)教師說明示範與提問討論。
- (3)引導學生練習使用抽象符號解題。
- (4)學生獨立練習。
- (5)教師回饋。

研究者依循學生認知發展階段與需求，參考上述文獻及參照點設計介入方案。



參、研究方法

一、研究方法

本研究分兩部分。第一部分的研究目的在探究 4TA、6TA、6RDMD 和 6MD 四組學生分數數值比較能力的差異，自變項是學生組別，依變項為分數數值能力。研究者將以混和設計二因子變異數分析來分析不同學生組別、不同分測驗及其交互作用對分數數值比較能力的影響。圖 1 為第一部分的研究架構圖。

第二部分的研究目的在探討應用 CRA 策略設計介入方案對提升數困生分數數值比較能力的成效。自變項為分數數值比較介入方案，依變項為六年級數困生的分數數值比較能力。圖 2 為第二部分的研究架構圖。考量研究參與者尋找不易，故從第一部分研究的 6RDMD 與 6MD 中尋找三位學生作為第二部分的研究參與者。因每位研究參與者有其個別需求，故採個別教學較易有成效；且為了對每位研

究參與者做深入教學及觀察 CRA 策略對其分數數值能力產生的變化，故採用單一個案研究法。

第二部分研究採用跨研究參與者多探測設計，包含基線期、介入期與維持期三個階段，實驗設計見圖 2，研究工具為自編的分數數值比較測驗。確認在引進自變項前收集至少三點基線探測以建立真正的基線，至少連續三點呈現穩定的未進步趨勢後再進入介入期。研究者在介入期實施分數數值比較介入方案，並於每節課教學後對研究參與者施測分數數值比較測驗，以蒐集測驗正確率作為資料點，預計收集 11 個資料點作為自變項對依變項的立即成效，其中至少連續三個資料點達 80% 的正確率，才停止教學進入維持期，並介入下一位研究參與者。在停止教學的一週後對研究參與者再次施測分數數值比較測驗，以測驗正確率為資料點，檢驗自變項停止後的短期維持效果，收集三個資料點後終止研究。

圖 1

第一部分研究實驗設計圖

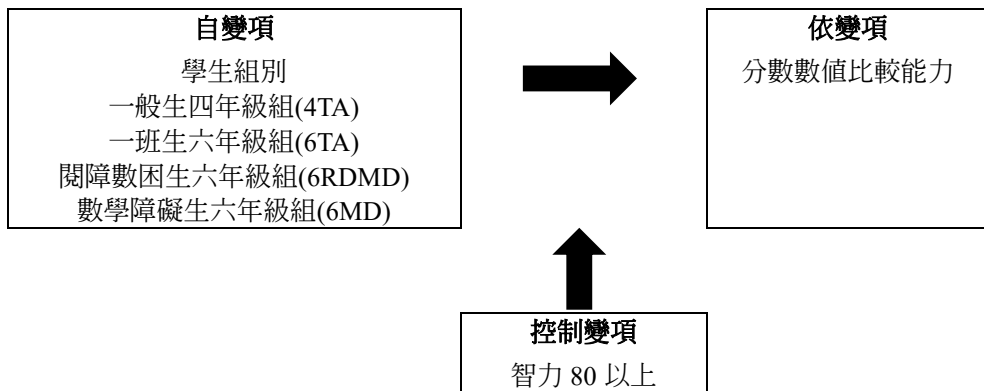
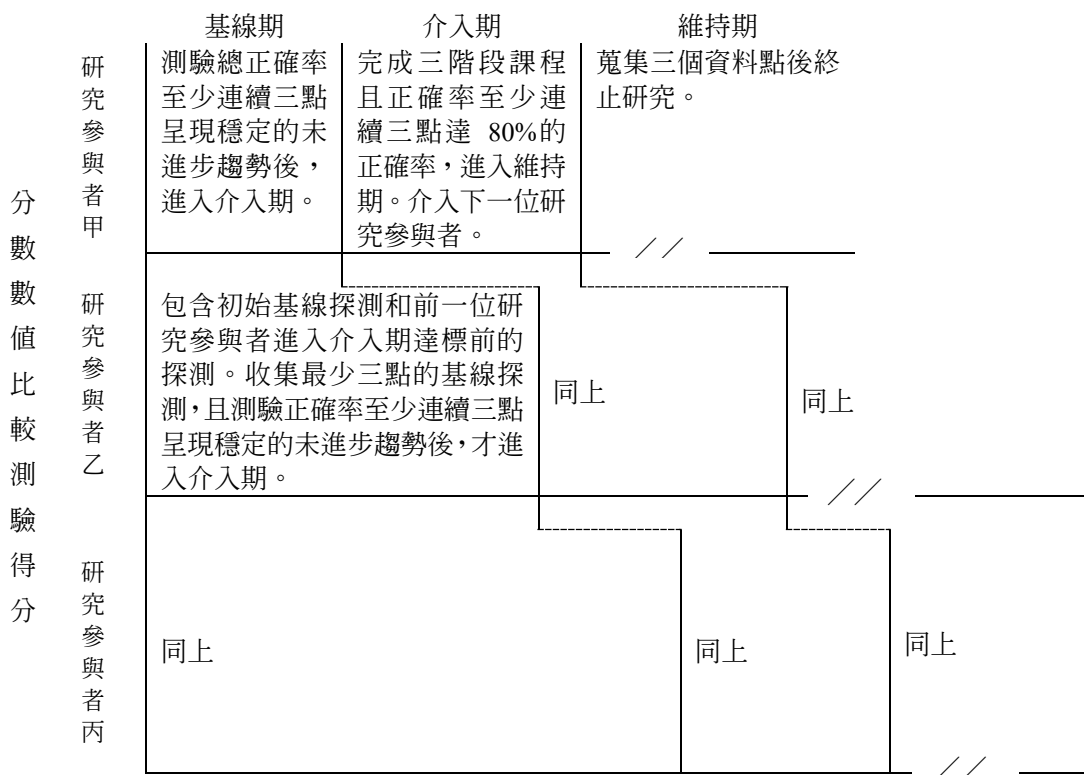


圖 2

第二部分研究實驗設計圖



註：//表示停止教學一週後再開始施測。

二、研究參與者

(一) 第一部分研究參與者之選取

等值分數概念為四年級教材，故以四年級與六年級一般生為 4TA 與 6TA，做為非數困生；以六年級閱障數困生與數障生為 6RDMD 與 6MD，做為數困生。

1. 4TA 與 6TA

研究者是在職資源班教師，從任職國小的四年級 13 個班與六年級 15 個班中隨機抽取一班作為 4TA 與 6TA 的施測班級。扣除班上的特殊生，以剩下的人數做籤，隨機抽取 15 人作為 4TA、6TA 的測

驗成績。為確保每位學生被抽到的機率相同，每抽出 1 張籤記錄座號後隨即把籤紙放回籤筒中再繼續抽出下一位學生，因此每次抽籤的全部籤紙數均相同。

2. 6RDMD 與 6MD

以臺南市教育局 109 學年度跨階段重新鑑定後領有鑑定文號的六年級學障生做為母群，從東區、北區、安南區、安平區的國小中找了 18 名六年級的正式閱障生，施測基本數學核心能力測驗（洪儷瑜、連文宏，2015）與分數數值比較測驗，找出數學核心能力表現低於切截值的 17 名



閱讀數困生，再刪去 2 名測驗得分位於極端值的學生，剩下 15 名學生作為 6RDMD 的研究參與者。另從東區、北區、安南區、安平區的國小中找了 15 名鑑定為正式數障的六年級生作為 6MD。

四組研究參與者共 60 名，每組各 15 名，特徵詳列於表 1 四組研究參與者特徵。

(二) 第二部分研究參與者之選取

以 6RDMD 與 6MD 為母群立意選取 3 名就讀研究者任職學校，且家長同意參加介入方案的六年級數困生做為研究參與者甲生、乙生、丙生。3 位研究參與者彼此獨立，以避免不一致介入效果和基線行為共變。以下分述三位研究參與者的背景與學習特質，表 2 為其共同特徵。

1. 甲生

三年級開始接受資源班直接教學服務迄今。於 109 學年度小六跨階段重新鑑定取得數障身分。魏氏兒童智力量表第四版 (Wechsler Intelligence Scale for Children-

Fourth Edition, WISC-IV)(Wechsler, 2003/2007)全量表 85；基本數學核心能力測驗四項核心能力得分均低於切截點；班級數學表現低下，最近 4 次數學月考班級 PR 值均為 PR1。

具備加減乘除四則運算能力與規則，計算速度慢且易錯誤，無法自動化題取基本數學事實，採用無效率點數手指的方式完成計算，多位數計算耗時且錯誤多。數感弱，無法快速覺察數字間的關係。文字題題意理解困難，常以關鍵字或是盲目抓取題目數字列式計算。

可直接比較同分母真分數與假分數的數值，帶分數需要先換算假分數才能比較數值，計算慢且易錯誤；比較異分母分數數值會有依據分母或分子的錯誤，通分換算會有計算程序的錯誤。書寫算式會因為無法判斷數值與題意理解困難而錯置分數前後位置。

表 1

四組研究參與者特徵

特徵	研究參與者			
	4TA	6TA	6RDMD	6MD
組別	4TA	6TA	6RDMD	6MD
場域	臺南市 公立國小	臺南市 公立國小	臺南市 公立國小	臺南市 公立國小
人數	15	15	15	15
年級	四年級	六年級	六年級	六年級
身分	未經過學障鑑定的 四年級學生	未經過學障鑑定的 六年級學生	109 學年度跨階段 重新鑑定為閱障	109 學年度跨階段 重新鑑定為數障
數學學習 困難界定			基本數學核心能 力測驗表現低於 切截值	數障



表 2

介入方案之研究參與者特徵

特徵	研究參與者		
	甲	乙	丙
代號			
場域	就讀研究者任職之臺南市公立國小	就讀研究者任職之臺南市公立國小	就讀研究者任職之臺南市公立國小
實際年齡	11 歲 9 個月	11 歲 9 個月	11 歲 11 個月
鑑輔會身分	109 學年度跨階段重新鑑定為數障	109 學年度跨階段重新鑑定為閱障	109 學年度跨階段重新鑑定為閱障
WISC-IV 全量表	全量表 85 語文理解 93 知覺推理 78 工作記憶 87 處理速度 99	全量表 89 語文理解 99 知覺推理 85 工作記憶 94 處理速度 89	全量表 83 語文理解 97 知覺推理 77 工作記憶 97 處理速度 78
數學月考班級 PR 值	五下期中 PR1 五下期末 PR1 六上期中 PR1 六上期末 PR1	五下期中 PR1 五下期末 PR4 六上期中 PR1 六上期末 PR1	五下期中 PR4 五下期末 PR4 六上期中 PR1 六上期末 PR4
基本數學核心能力測驗低於切截值的核心能力	數字概念 估算 簡單計算 複雜計算	數字概念 估算 複雜計算 應用	簡單計算 複雜計算 應用
是否接受其他教學方案	否	否	否

看圖寫分數的題型，如僅呈現半圓形，無法馬上辨識出是 $\frac{1}{2}$ 圓，需補畫出另一邊半圓，才能辨識此圖為 $\frac{1}{2}$ 圓， $\frac{1}{4}$ 圓亦是如此。研究參與者甲需要看見完整的 1，才能辨識圖形代表的分數。由上述可知研究參與者甲不論在分數概念或程序的學習都有困難。

2. 乙生

持發展遲緩身分入小學，一年級即開始接受資源班直接教學服務迄今。小六跨階段重新鑑定取得閱障身分。WISC-IV 全量表 89；基本數學核心能力測驗四項核心

能力得分均低於切截值；班級數學表現低下，最近 4 次數學月考班級 PR 值為 PR1、PR4、PR1、PR1。

具備加減乘除四則運算能力與規則，可直接提取基本數學事實，可心算個位數的四則運算，但多位數的乘除計算容易錯誤。文字題題意理解困難，多採關鍵字策略列式，可能因數值判斷錯誤或題意理解困難而列式錯誤。

可直接比較同分母真分數與假分數的數值，整數是個位數的帶分數可心算換為假分數，二位數以上的數字需要透過筆算



才能換算，計算過程容易有進退位錯誤；異分母分數數值比較依賴通分換算的方式。較容易習得程序性計算，概念學習速度慢且容易遺忘，面對需要認知彈性的作業，會出現依據分母或分子等概念性錯誤。由上述可知研究參與者乙對分數概念的學習有困難。

3. 丙生

四年級開始接受資源班直接教學服務迄今。小六跨階段重新鑑定取閱障身分。WISC-IV 全量表 83；基本數學核心能力測驗三項核心能力得分低於切截值；班級數學學習表現低下，最近 4 次數學月考班級 PR 值為 PR4、PR4、PR1、PR4。

具備加減乘除四則運算能力與規則，可直接提取基本數學事實，可心算個位數的四則運算，多位數四則計算正確率高。文字題題意理解困難，多採關鍵字策略列式，會因數值判斷錯誤或題意理解困難而列式錯誤。有時會沒耐性多加思考，隨意抓取題目數字列式。

可直接比較同分母真分數與假分數的數值，整數是個位數的帶分數可心算換算假分數，二位數以上的數字就需要透過筆算；異分母分數數值比較依賴通分換算的方式，若沒有通分就會直接依據分母或分子來比較。易習得程序性計算，對概念學習速度慢且易遺忘，面對需要認知彈性的作業，會出現依據分母或分子等概念性錯誤。由上述可知研究參與者丙對分數概念的學習具有困難。

三、介入方案

初案編寫完成後，商請四位現職資源班且教授數學五年以上的專家教師，填寫內容效度專家評鑑問卷，審核方案的內容

效度與確保實施程序的適切性。專家教師回饋方案設計內容符合 CRA 策略三階段，也有加入討論、教師說明與示範、引導練習與獨立練習等要素。建議將名稱由原先的「分數數值教學方案」更改為「分數數值比較介入方案」。研究者依據建議修改初案以確認方案。

方案依具體—表徵—抽象三階段進行，始於具體操作分數板，最後使用抽象數字比較分數數值。每節課皆有教師說明與示範、師生討論、引導學生練習與學生獨立練習解題等活動，學生分別使用分數板、圖示與抽象數字解決相同型態的題目，於每節課結束前完成一份測驗作為介入期的資料點。每階段以 3 節課為一輪，完成 3 節課的學習後，會在第 4 節課評量該階段的精熟度，若正確率達 80% 以上(含 80%)，會在下節課展開新階段教學。完成 9 節課的學習且測驗正確率連續三次達 80% 以上，就停止教學介入。各階段教學節數安排見表 3。若測驗正確率未達 80%，將持續停留在該階段重啟一輪 3 節課的學習，在第二輪的第 4 節再次評量，待結果達 80% 以上才進展到下一個階段。

研究者即方案實施者，地點在資源班教室，每週 4 節。每次教學僅一位研究參與者在場避免產生共變。商請搭檔教師觀課檢核與填寫評量表，計算介入完整率並回饋研究者以確保方案的介入完整性。

四、研究工具

研究工具為自編的分數數值比較測驗。第一部分研究用以比較四組研究參與者的表現差異，第二部分研究用以評量三位研究參與者的基線期能力、介入期的立即成效與維持期的短期維持效果。所有題



表 3

各階段教學節數

階段別	教學節數	進入下一階段標準
具體階段	第 1-3 節教學 第 4 節評量	
表徵階段	第 5-7 節教學 第 8 節評量	當前階段的測驗正確率 達 80%以上
抽象階段	第 9-11 節教學 第 12 節評量	

目皆經過預試確保測驗題目具有適當的難度與鑑別度，表 4、5 為六年級正試題本三個分測驗的雙向細目表；表 6、表 7 為六年級正試題本三個分測驗的雙向細目表與難度與鑑別度。詳見表 4、表 5、表 6、表 7。研究者在三個分測驗各編列 160 題題目，分為 16 份題目非完全相同的測驗複本，讓研究參與者每次評量使用之測驗非完全相同，以控制練習效應產生題本內容包含三個分測驗，使用 1 與 $\frac{1}{2}$ 為參照點，比較分數數值再排序。每個分測驗都有例題說明作答方式，放大加粗重點字詞加上灰底以提醒答題者。以下說明三個分測驗的題目。

1. 分測驗一：比比看（一）

題目形式為圖像加數字表徵，每題皆有數字與圖形表示分數數值，答題者以數字 1、2、3 排序三個分數，避免錯答符號「>」、「<」。例題詳見附錄一。

以 1 與 $\frac{1}{2}$ 為參照點答題，答題者需判斷 $\frac{3}{3}$ 等於 1； $\frac{2}{3}$ 的分子 2 比全部 3 的一半還多，所以 $\frac{2}{3}$ 大於 $\frac{1}{2}$ ； $\frac{1}{3}$ 的分子 1 比全部 3 的一半還要少，所以 $\frac{1}{3}$ 小於 $\frac{1}{2}$ 。

2. 分測驗二：比比看（二）

題目形式為純數字表徵，每題僅以數字表示分數數值。例題詳見附錄一。

與比比看（一）不同的是，比比看（二）僅以數字呈現題目，答題者只能看數字判斷分數數值。

3. 分測驗三：比比看（三）

題目形式為純數字表徵，僅以數字表示算式。答題者圈選答案，避免錯認「>」、「<」的符號。例題詳見附錄一。

例題的兩個算式含有等值與不等值的數字。需先判斷等值的數字 2，再比較不等值的數字 1 和 3，最後圈出含有較大數字的算式。在理解作答方式後，答題者需作答下面的試題。

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{8} \quad , \quad \frac{5}{10} + \frac{9}{9}$$

作答上面題目需先判斷 $\frac{3}{6}$ 和 $\frac{5}{10}$ 都等於 $\frac{1}{2}$ ，再比較不等值的 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{9}{9}$ 。接著以 1 為參照點，運用小於 1 和等於 1 的概念判斷出 $\frac{9}{9}$ 比 $\frac{1}{8}$ 大，最後圈出 $\frac{5}{10} + \frac{9}{9}$ 的算式。

五、資料分析

為探究四組研究參與者分數數值比較能力的差異，以學生組別為獨立樣本，測驗別為相依樣本，以混合設計二因子變異



表 4

四年級正試題本分測驗一與分測驗二的雙向細目表與難度、鑑別度

參照點	題型	題數	P/D	參照點	題型	題數	P/D	
分測驗一 以 1 爲 參照點	1、真、真	1	0.63/1.0	分測驗一 以 $\frac{1}{2}$ 爲 參照點	1/2、真、真	2	0.68/1.0	
	1、真、假	1	0.72/1.0				0.60/1.0	
	1、真、帶	1	0.75/1.0			1/2、假、假	1	0.68/1.0
	1、假、假	1	0.67/1.0			1/2、帶、帶	1	0.75/1.0
	1、假、帶	1	0.71/1.0			1/2、真、假	2	0.67/1.0
	1、帶、帶	1	0.59/1.0				0.75/1.0	
	帶、帶、帶	1	0.68/1.0			1/2、真、帶	2	0.69/1.0
	真、真、帶	1	0.64/1.0				0.64/1.0	
	真、假、假	1	0.60/1.0			1/2、假、帶	1	0.60/1.0
	真、帶、帶	1	0.63/1.0			1/2、帶、帶	1	0.75/1.0
		10				10		
分測驗二 以 1 爲 參照點	1、真、真	1	0.65/1.0	分測驗二 以 $\frac{1}{2}$ 爲 參照點	1/2、真、真	2	0.67/1.0	
	1、真、假	1	0.52/1.0				0.56/1.0	
	1、真、帶	1	0.76/1.0			1/2、假、假	1	0.65/1.0
	1、假、假	1	0.54/1.0			1/2、帶、帶	2	0.70/1.0
	1、假、帶	1	0.67/1.0				0.72/1.0	
	1、帶、帶	1	0.70/1.0			1/2、真、假	2	0.62/1.0
	帶、帶、帶	1	0.63/1.0				0.59/1.0	
	真、假、假	1	0.52/1.0			1/2、真、帶	2	0.74/1.0
	真、帶、帶	1	0.68/1.0				0.63/1.0	
	真、真、帶	1	0.53/1.0			1/2、假、帶	1	0.59/1.0
		10				10		

註：P 表示難度；D 表示鑑別度。

表 5

四年級正試題本分測驗三雙向細目表與難度、鑑別度

參照點	題型	題數	P/D
分測驗三 以 1 爲參照點	1+1 () 1+真	1	0.70/1.0
	1+真 () 1+真	1	0.54/1.0
	1+假 () 1+真	1	0.67/1.0
	1+帶 () 1+真	1	0.71/1.0
	1+1/2 () 1+1	1	0.71/1.0
	1+假 () 1+假	1	0.71/1.0
	1+帶 () 1+假	1	0.70/1.0
	1+1 () 1+帶	1	0.71/1.0
	1+帶 () 1+帶	2	0.62/1.0
			10

(續下頁)



表 5

四年級正試題本分測驗三雙向細目表與難度、鑑別度 (續)

參照點	題型	題數	P/D
分測驗三 以 $\frac{1}{2}$ 為參照點	1/2+1 () 1/2+1/2	1	0.75/1.0
	1/2+假 () 1/2+1/2	1	0.59/1.0
	1/2+帶 () 1/2+1/2	1	0.76/1.0
	1/2+真 () 1/2+1	1	0.65/1.0
	1/2+帶 () 1/2+1	1	0.50/1.0
	1/2+假 () 1/2+真	1	0.71/1.0
	1/2+假 () 1/2+假	1	0.62/1.0
	1/2+帶 () 1/2+帶	1	0.46/1.0
	1/2+帶 () 1/2+假	2	0.76/1.0
		10	

註：P 表示難度；D 表示鑑別度。

表 6

六年級正試題本分測驗一與分測驗二的雙向細目表

參照點	題型	題數	P/D	參照點	題型	題數	P/D	
分測驗一 以 1 為 參照點	1、真、真	1	0.70/1.0	分測驗一 以 $\frac{1}{2}$ 為 參照點	1/2、真、真	2	0.76/1.0	
	1、真、假	1	0.71/1.0					0.76/1.0
	1、真、帶	1	0.76/1.0			1/2、假、假	1	0.71/1.0
	1、假、假	1	0.69/1.0			1/2、帶、帶	1	0.70/1.0
	1、假、帶	1	0.75/1.0			1/2、真、假	2	0.76/1.0
	1、帶、帶	1	0.69/1.0					0.71/1.0
	帶、帶、帶	1	0.75/1.0			1/2、真、帶	2	0.75/1.0
	真、真、帶	1	0.75/1.0					0.75/1.0
	真、假、假	1	0.60/1.0			1/2、假、帶	1	0.74/1.0
	真、帶、帶	1	0.75/1.0			1/2、帶、帶	1	0.83/1.0
	10				10			
分測驗二 以 1 為 參照點	1、真、真	1	0.76/1.0	分測驗二 以 $\frac{1}{2}$ 為 參照點	1/2、真、真	2	0.76/1.0	
	1、真、假	1	0.76/1.0					0.71/1.0
	1、真、帶	1	0.74/1.0			1/2、假、假	1	0.68/1.0
	1、假、假	1	0.67/1.0			1/2、帶、帶	2	0.74/1.0
	1、假、帶	1	0.76/1.0					0.74/1.0
	1、帶、帶	1	0.76/1.0			1/2、真、假	2	0.71/1.0
	帶、帶、帶	1	0.76/1.0					0.71/1.0
	真、假、假	1	0.47/1.0			1/2、真、帶	2	0.71/1.0
	真、帶、帶	1	0.71/1.0					0.76/1.0
	真、真、帶	1	0.67/1.0			1/2、假、帶	1	0.76/1.0
	10				10			

註：P 表示難度；D 表示鑑別度。



表 7

六年級正試題本第三大題雙向細目表

參照點	題型	題數	P/D
分測驗三 以 1 為參照點	1+1 () 1+真	1	0.71/1.0
	1+真 () 1+真	1	0.73/1.0
	1+假 () 1+真	1	0.76/1.0
	1+帶 () 1+真	1	0.71/1.0
	1+1 () 1+1	1	0.76/1.0
	1+1/2 () 1+1	1	0.71/1.0
	1+假 () 1+假	1	0.71/1.0
	1+帶 () 1+假	1	0.71/1.0
	1+1 () 1+帶	1	0.71/1.0
	1+帶 () 1+帶	1	0.64/1.0
		10	
分測驗三 以 $\frac{1}{2}$ 為參照點	1/2+1 () 1/2+1/2	1	0.76/1.0
	1/2+假 () 1/2+1/2	1	0.75/1.0
	1/2+帶 () 1/2+1/2	1	0.76/1.0
	1/2+1 () 1/2+1	1	0.65/1.0
	1/2+真 () 1/2+1	1	0.75/1.0
	1/2+帶 () 1/2+1	1	0.71/1.0
	1/2+假 () 1/2+真	1	0.68/1.0
	1/2+假 () 1/2+假	1	0.62/1.0
	1/2+帶 () 1/2+帶	1	0.65/1.0
	1/2+帶 () 1/2+假	1	0.71/1.0
		10	

註：P 表示難度；D 表示鑑別度。

數分析比較四組學生分數數值比較能力的差異，回答研究問題一。為了解 CRA 策略對提升分數數值比較能力的成效，採取圖示法、目視分析法、統計分析等量化方式分析資料，回答研究問題二。

肆、結果與討論

一、四組研究參與者的測驗表現

(一) 不同學生組別與不同測驗之交互作用對分數數值比較能力的影響

研究者以混和設計二因子變異數分析來分析不同學生組別、不同分測驗及其交

互作用對分數數值比較能力的影響，結果如圖 3、4、表 8、9。圖 3 為三個分測驗之各組研究參與者分數折線圖，分測驗一、二、三都以 6TA 得分最高，其次是 4TA、6RDMD，6MD 的得分最低。觀察圖 3 可見 6TA 與 4TA 分測驗一得分最高，分測驗三得分最低，分測驗一到三的得分曲線逐漸向下；6RDMD 與 6MD 分測驗一、二的得分曲線向下，但到分測驗三曲線又向上提昇，以分測驗二得分最低。圖 4 為四組研究參與者在各測驗得分折線圖，可見 6TA 在三個分測驗的得分最高，其次依序是 4TA、6RDMD 與 6MD。圖 3、4 顯示



圖 3

三個分測驗之各組研究參與者分數折線圖

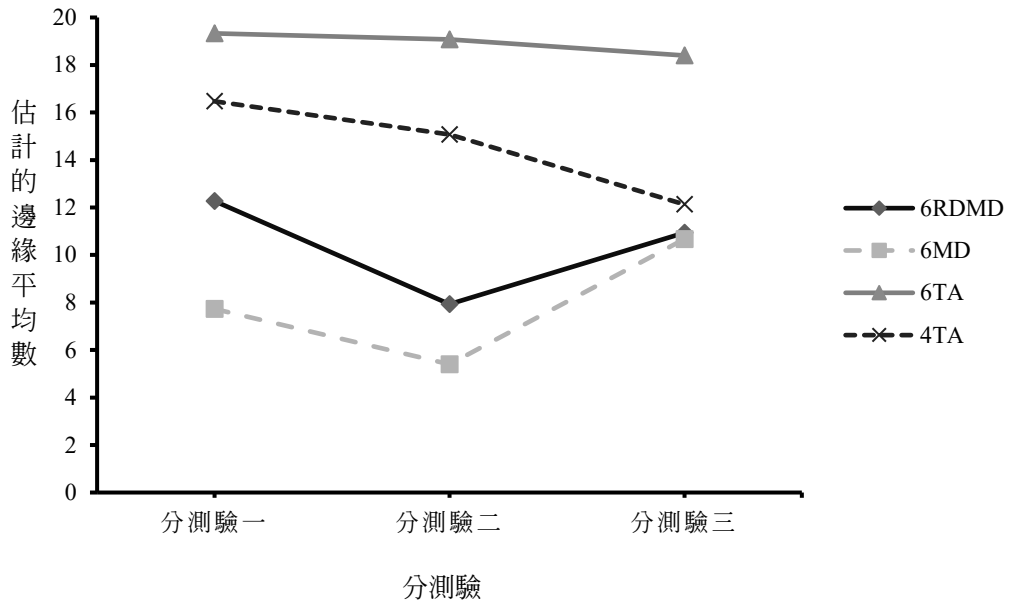
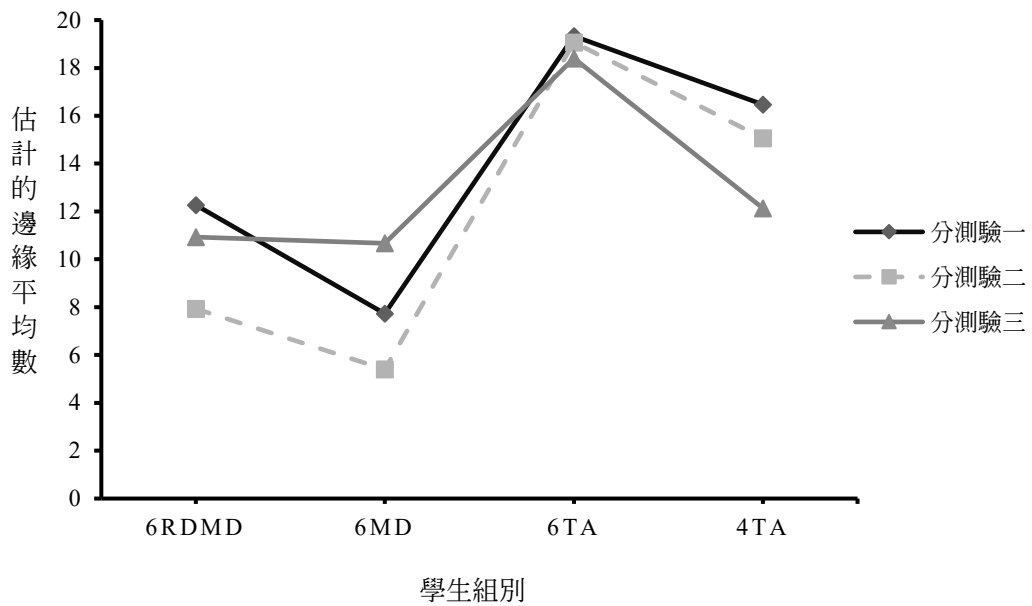


圖 4

四組研究參與者在各測驗得分折線圖



各測驗得分因組別不同而有所差異，各學生組別在不同測驗的得分情形也有所不同。

表 8 為不同測驗中不同學生組別得分之平均數與標準差摘要表，表 9 為不同測驗與不同學生組別得分之混和設計二因子變異數分析摘要表。由表 8、9 可獲得四組研究參與者測驗得分的混和設計二因子變異數分析結果。表 8 得知，分測驗一得分最高的是 6TA ($M = 19.33, SD = 1.35$)，最低的是 6MD ($M = 7.73, SD = 6.26$)。分測驗二得分最高的是 6TA ($M = 19.07, SD =$

0.88)，最低的是 6MD ($M = 5.40, SD = 3.50$)。分測驗三得分最高的是 6TA 組($M = 18.40, SD = 1.84$)，最低的是 6MD ($M = 10.67, SD = 1.68$)。表 9 顯示學生組別的主要效果($F = 50.17, p < .001$)、測驗別的主要效果($F = 7.55, p < .001$)及不同學生組別與不同測驗的交互作用($F = 7.30, p < .001$)皆有顯著。此結果說明不同學生組別、不同測驗與其交互作用對測驗得分都有顯著影響，即不同學生組別對測驗得分的影響在不同測驗有顯著差異。

表 8
不同測驗中不同學生組別得分之平均數與標準差摘要表

測驗別	學生組別	平均數	標準差	人數
分測驗一得分	6RDMD	12.27	6.30	15
	6MD	7.73	6.26	15
	6TA	19.33	1.35	15
	4TA	16.47	3.93	15
	總數	13.95	6.51	60
分測驗二得分	6RDMD	7.93	3.26	15
	6MD	5.40	3.50	15
	6TA	19.07	0.88	15
	4TA	15.07	4.13	15
	總數	11.87	6.33	60
分測驗三得分	6RDMD	10.93	1.16	15
	6MD	10.67	1.68	15
	6TA	18.40	1.84	15
	4TA	12.13	2.97	15
	總數	13.03	3.74	60

表 9
不同測驗與不同學生組別得分之混和設計二因子變異數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	平均平方和	F 檢定	P 值
學生組別	3,157.26	3	1,052.42	50.17	< .001***
測驗別	130.83	2	65.42	7.55	< .001***
學生別 × 測驗別	379.52	6	63.25	7.30	< .001***
誤差	970.31	112	8.66		
總和	5,812.55	179			

*** $p < .001$.



(二) 不同學生組別對分數數值比較能力的影響

為進一步分析學生組別的單純主要效果，以學生組別為自變項測驗得分為依變項，進行單因子變異數分析，表 10 為各測驗中不同學生組別得分的單因子變異數分析與事後分析比較摘要表。由表可見在分測驗一($F = 15.99, p < .001$)、分測驗二($F = 58.60, p < .001$)與分測驗三($F = 48.32, p < .001$)中，不同學生組別對測驗得分的影響皆有顯著差異。以 Scheffe 法進行事後比較，分測驗一中，6RDMD 與 6TA 的測驗得分(平均差異 = $-7.07, p = .003$)有顯著差異；6MD 與 6TA (平均差異 = $-11.60, p < .001$)、6MD 與 4TA (平均差異 = $-8.73, p < .001$)的測驗得分有顯著差異。分測驗二中，6RDMD 與 6TA (平

均差異 = $-11.13, p < .001$)、6RDMD 與 4TA (平均差異 = $-7.13, p < .001$)的測驗得分有顯著差異；6MD 與 6TA (平均差異 = $-13.67, p < .001$)、6MD 與 4TA (平均差異 = $-9.67, p < .001$)的測驗得分有顯著差異；6TA 與 4TA (平均差異 = $-4.00, p = .013$)的測驗得分有顯著差異。分測驗三中，6RDMD (平均差異 = $7.47, p < .001$)、6MD (平均差異 = $7.73, p < .001$)、4TA (平均差異 = $6.27, p < .001$)都與 6TA 的測驗得分有顯著差異。

總結表 10，在三個分測驗中，數困生 6RDMD 與 6MD 的平均分數皆顯著低於非數困生 6TA；分測驗一、二中，6MD 的平均分數顯著低於 4TA；在分測驗二、三中，非數困生 6TA 與 4TA 的平均得分有顯著差異。

表 10

各測驗中不同學生組別得分的單因子變異數分析與事後分析比較摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	平均平方和	F 檢定	P 值	事後比較	
測驗一得分	組間	1,151.92	3	383.97	15.99	< .001***	6RDMD < 6TA
	組內	1,344.93	56	24.02			6MD < 6TA
	總和	2,496.85	59				6MD < 4TA
測驗二得分	組間	1,790.53	3	596.84	58.60	< .001***	6RDMD < 6TA
	組內	570.40	56	10.19			6RDMD < 4TA
	總和	2,360.93	59				6MD < 6TA 6MD < 4TA 4TA < 6TA
測驗三得分	組間	594.33	3	198.11	48.32	< .001***	6RDMD < 6TA
	組內	229.60	56	4.10			6MD < 6TA
	總和	823.93	59				4TA < 6TA

*** $p < .001$.



(三) 不同測驗對分數數值比較能力的影響

爲進一步分析測驗別的單純主要效果，以測驗別爲自變項測驗得分爲依變項，進行重複量數變異數分析，表 11 爲各學生組別之不同測驗得分的變異數分析與事後分析比較摘要表。由表可見 6RDMD ($F = 4.44, p = .021$)、6MD ($F = 10.71, p < .001$)與 4TA ($F = 11.63, p < .001$)在不同測驗得分有顯著差異。以 Scheffe 法進行事後比較，6RDMD 分測驗二與分測驗一的得分 (平均差異= -4.33, $p = .018$) 及測驗二與分測驗三的得分 (平均差異= -3.00, $p = .010$) 有顯著差異。6MD 分測驗二與分測驗三的得分 (平均差異= -5.27, $p < .001$) 有顯著差異。4TA 分測驗三與分測驗一的得分 (平均差異= -4.33, $p < .001$) 及分測驗三與分測驗二的得分 (平均差異= -2.93, $p = .008$) 有顯著差異。

總結表 11, 非數困生 6TA 在三個分測驗的得分未有顯著差異，4TA 在分測驗三的分數顯著低於分測驗一、二；數困生 6RDMD 分測驗二的得分顯著低於分測驗

一、三，6MD 分測驗二的得分顯著低於分測驗三，6MD 三個分測驗的得分爲四組中最低。

二、CRA 策略對數困生在分測驗一的成效分析

圖 5 是三位研究參與者在分測驗一的得分折線圖，縱軸爲正確率(%), 橫軸爲評量次數。

(一) 甲生在分測驗一的成效分析

甲生基線期平均水準 20%，中數水準 20%，趨勢穩定度爲 100%，呈現水平等速的穩定趨勢，故進入介入期。介入期評量共 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 87.27%，中數水準 90%，趨勢穩定度 45%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。

從基線期至介入期趨勢方向與效果爲正向，重疊率 0%，趨勢穩定度由穩定到不穩定。折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 r^2 值爲 0.04，階段間的趨向變化與效果爲正向，介入期的正確率較基線期提昇。可知 CRA 策略

表 11

各學生組別之不同測驗得分的變異數分析與事後分析比較摘要表

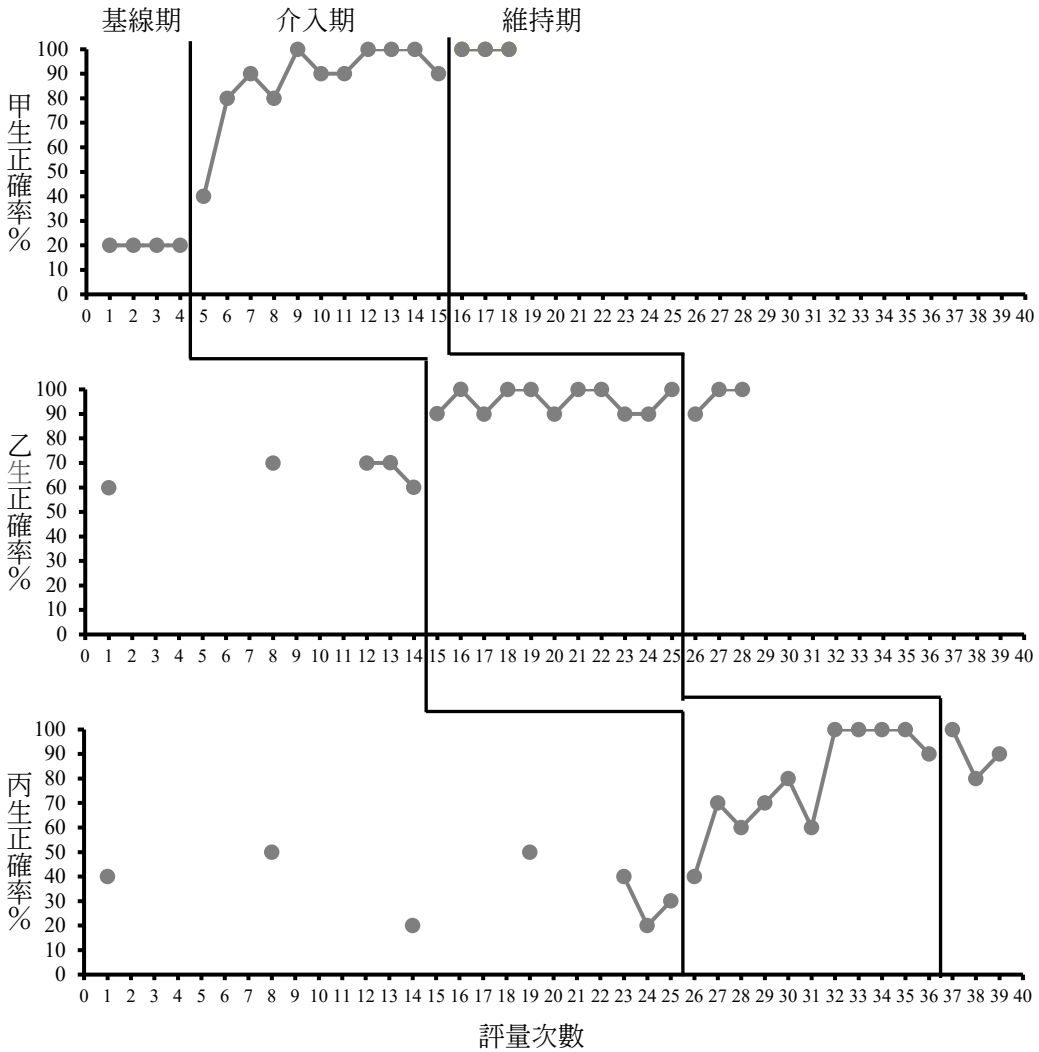
變異來源	離均差平方和	自由度	平均平方和	F 檢定	P 值	事後比較	
RDMD	測驗別	147.78	2	73.89	4.44	.021**	一>二
	測驗別誤差	465.56	28	16.63			三>二
MD	測驗別	208.93	2	104.47	10.71	<.001***	三>二
	測驗別誤差	273.07	28	9.75			
6TA	測驗別	6.93	2	3.47	1.76	.190	
	測驗別誤差	55.07	28	1.97			
4TA	測驗別	146.71	2	73.36	11.63	<.001***	一>三
	測驗別誤差	176.62	28	6.31			二>三

** $p < .05$. *** $p < .001$.



圖 5

三位研究參與者在分數數值比較測驗分測驗一的得分折線圖



對甲生以圖像與抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 100%，中數水準 100%，水準穩定度 100%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定水平、等速趨勢。介入期至維持期趨勢方向與效果為無變化，趨勢穩定度由不穩定到穩定，重疊率 100%。

折線圖可見介入期有存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f^2 值為 0.02。兩階段的斜率改變量為負值，但維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對甲生以圖像與抽象符號來比較分數數值有正向短期維持效果。



(二) 乙生在分測驗一的成效分析

乙生基線期平均水準 66%，中數水準 70%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定的退步趨勢，故進入介入期。介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 95.45%，中數水準 100%，趨勢穩定度 91%，呈現穩定的上升趨勢。從基線期至介入期趨向變化與效果為正向，重疊率 0%，趨勢穩定度由穩定到穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.00。介入期的正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對乙生以圖像與抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 96.67%，中數水準 100%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定上升趨勢。介入期至維持期趨勢方向與效果顯示為負向，趨勢穩定度由穩定到穩定，重疊率 100%，由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.16。兩階段的斜率改變量為正值，且維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對乙生以圖像與抽象符號來比較分數數值有正向短期維持效果。

(三) 丙生在分測驗一的成效分析

丙生基線期平均水準 35.71%，中數水準 40%，趨勢穩定度 0%，呈現不穩定狀態，可能因本階段最高值僅 20%，以致可接受的穩定範圍僅 0.4，故資料點未能落入此範圍內。但基線期表現仍呈現下降趨勢，故進入介入期。

介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 79.09%，中數水準 80%，趨

勢穩定度 27%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。從基線期至介入期趨勢方向與效果為正向，重疊率 9%，趨勢穩定度由不穩定到不穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.62。介入期的正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對丙生以圖像與抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 90%，中數水準 90%，趨勢穩定度 67%，呈現不穩定的下降趨勢。介入期至維持期趨勢穩定度由不穩定到不穩定，重疊率 100%。由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.14。兩階段的斜率改變量為負值，但維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對丙生以圖像與抽象符號來比較分數數值仍具有正向的短期維持效果。

三、CRA 策略對數困生在分測驗二的成效分析

圖 6 是三位研究參與者在分測驗二的得分折線圖，縱軸為分測驗二測驗正確率 (%)，橫軸為評量次數。

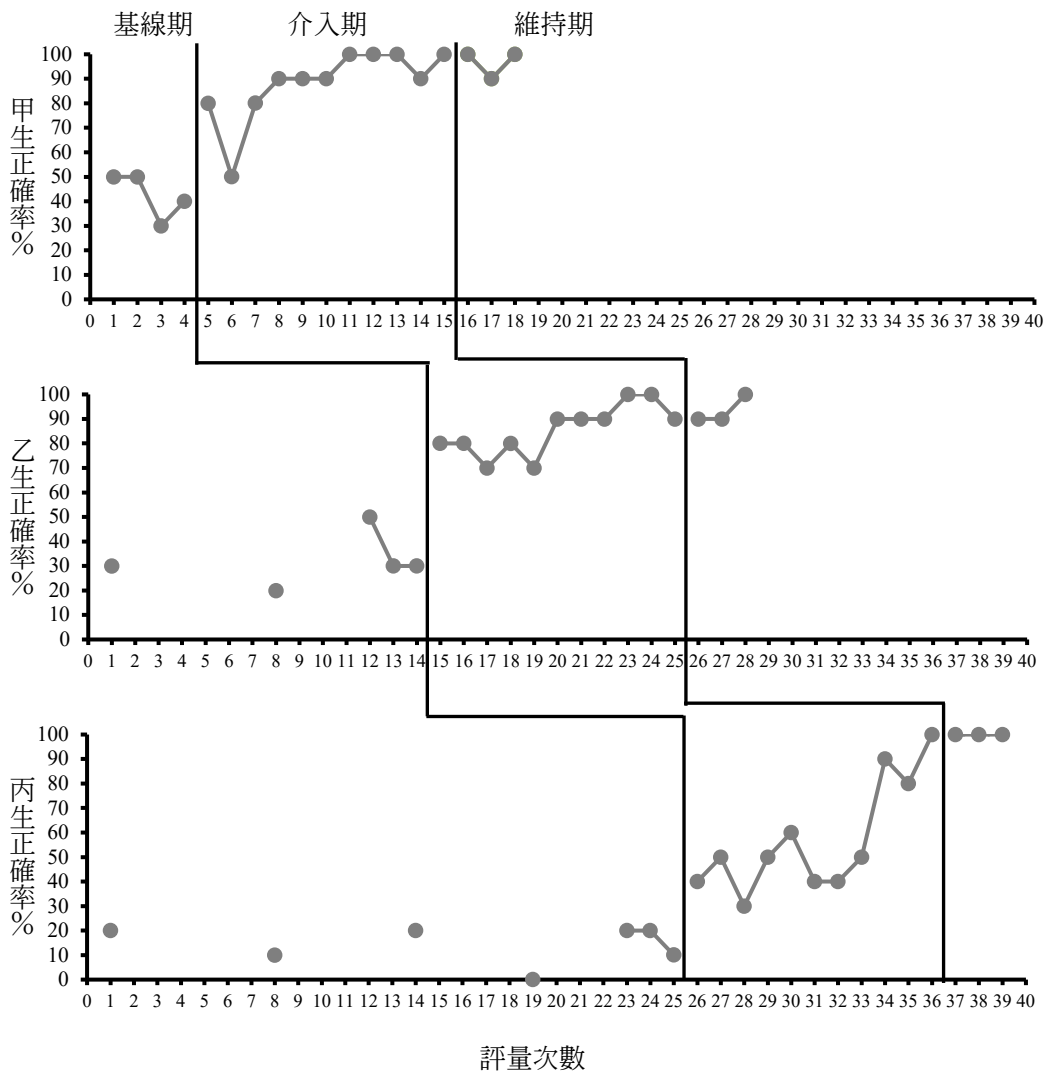
(一) 甲生在分測驗二的成效分析

甲生基線期平均水準 42.5%，中數水準 45%，呈現不穩定的退步趨勢，故進入介入期。介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次達 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 88.18%，中數水準 90%，趨勢穩定度 36%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。從基線期至介入期趨勢方向與效果為正向，重疊率 9%，趨勢穩定度由不穩定到不穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果



圖 6

三位研究參與者在分數數值比較測驗分測驗二的得分折線圖



量 f_2 值為 0.27，介入期的正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對甲生以抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 96.67%，中數水準 100%，趨勢穩定度 100%，為水平、等速的穩定趨勢。介入期至維持期趨勢方向與

效果為正向，趨勢穩定度由不穩定到穩定，重疊率 100%。由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.02。兩階段的斜率改變量為負值但維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對甲生以抽象符號來比較分數數值仍具有正向的短期維持效果。



(二) 乙生在分測驗二的成效分析

乙生基線期平均水準 32%，中數水準 30%，趨勢穩定度為 67%，呈不穩定的退步趨勢，故進入介入期。介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 85.45%，中數水準 90%，趨勢穩定度 36%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。從基線期至介入期趨勢方向與效果為正向，重疊率 0%，趨勢穩定度由不穩定到不穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.02。介入期的正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對乙生以抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

停止介入方案後一週，進行連續三次的維持期評量。維持期平均水準 93.33%，階段內中數水準 90%，水準穩定度 100%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定上升趨勢。

介入期至維持期趨勢方向與效果無變化，趨勢穩定度由不穩定到穩定，重疊率 100%。由折線圖可見介入期有明顯的趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.03。兩階段的斜率改變量為正值且維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對乙生以抽象符號來比較分數數值具有正向的短期維持效果。

(三) 丙生在分測驗二的成效分析

丙生基線期平均水準 14.29%，中數水準 20%，趨勢穩定度 67%，呈現不穩定的退步趨勢，故進入介入期。介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 57.27%，中數水準 50%，趨勢穩定度則為 18%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。從

基線期至介入期趨勢方向與效果為正向，重疊率 0%，趨勢穩定度由不穩定到不穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.28，介入期的分數數值比較正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對丙生以抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 100%，階段內中數水準 100%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定的等速趨勢。介入期至維持期趨向變化與效果為正向，趨勢穩定度由不穩定到穩定，重疊率 100%。由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.03。兩階段的斜率改變量為負值，但維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對丙生以抽象符號來比較分數數值仍具有正向的短期維持效果。

四、CRA 策略對數困生在分測驗三的成效分析

圖 7 是三位研究參與者在分數數值比較測驗分測驗三的得分折線圖，縱軸為分測驗三測驗正確率(%)，橫軸為評量次數。

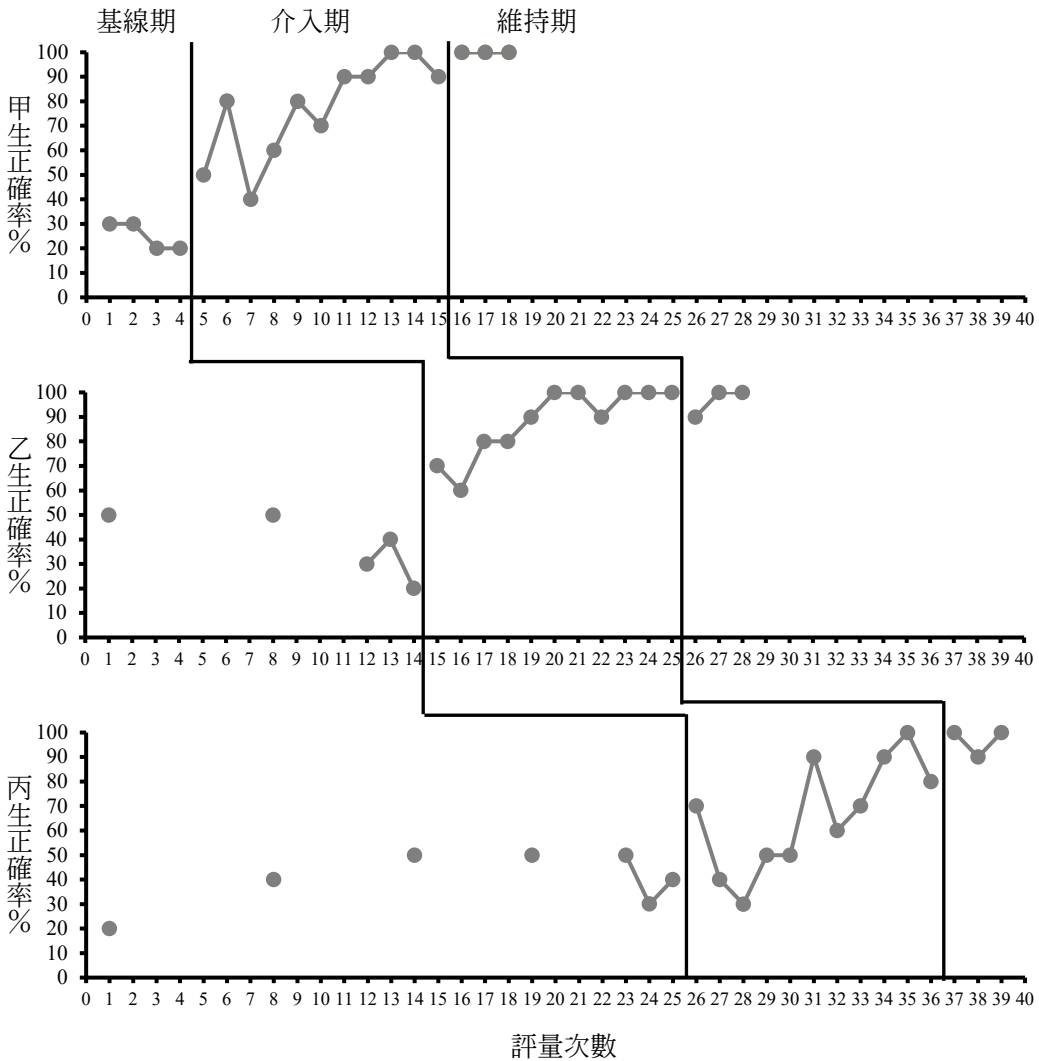
(一) 甲生在分測驗三的成效分析

甲生基線期平均水準 25%，中數水準 25%，趨勢穩定度 75%，呈現不穩定的退步趨勢，故進入介入期。介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 77.27%，中數水準 80%，趨勢穩定度 55%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。從基線期至介入期趨勢方向與效果為正向，重疊率 0%，趨勢穩定度由不穩定到不穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f_2 值為 0.25，介入期的正



圖 7

三位研究參與者在分數數值比較測驗分測驗三的得分折線圖



確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對甲生以抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 100%，中數水準 100%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定趨勢。介入期至維持期趨勢方向與效果為正向，趨勢穩定度由不穩定到穩定，重疊率

100%，由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f^2 值為 0.03。兩階段的斜率改變量為負值，但維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對甲生以抽象符號來比較分數數值仍具有正向的短期維持效果。



(二) 乙生在分測驗三的成效分析

乙生基線期平均水準 38%，中數水準 40%，趨勢穩定度 0%，呈現不穩定狀態，可能是因為本階段最高值僅 40%，以致可接受的穩定範圍僅 0.8，故資料點未能落入此範圍內。但基線期表現仍呈現下降趨勢，故進入介入期。

介入期評量共有 11 次，測驗正確率連續三次達 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準 88.18%，中數水準 90%，趨勢穩定度 55%，呈現不穩定的上升、進步趨勢。從基線期至介入期趨勢方向與效果為正向，重疊率 0%，趨勢穩定度由不穩定到穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f^2 值為 1.48，介入期的正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向可知 CRA 策略對乙生以抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 96.67%，中數水準 100%，趨勢穩定度 100%，呈現穩定的上升趨勢。介入期至維持期趨勢方向與效果為正向，趨勢穩定度由不穩定到穩定，重疊率 100%。由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f^2 值為 0.01。兩階段斜率改變量為正值，且維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對乙生以抽象符號來比較分數數值具有正向的短期維持效果。

(三) 丙生在分測驗三的成效分析

丙生基線期平均水準 40%，中數水準 40%，趨勢穩定度為 67%，呈現不穩定退步狀態，故進入介入期。介入期評量共有 11 次，測驗正確率達到連續三次 80% 以上的停止介入標準。介入期平均水準

66.36%，中數水準 70% 趨勢穩定度 0%，呈現不穩定狀態。可能是因為本階段最高值為 100，採用 10% 的水準穩定度，以致可接受的穩定範圍僅 0.1，以致資料點未能落入此範圍內。但仍可見介入期的趨勢內資料路徑整體為上升趨勢，呈現不穩定的上升、進步趨勢。

從基線期至介入期趨向變化與效果為正向，重疊率 36%，趨勢穩定度由不穩定到不穩定。從折線圖可見基線期存在趨勢且兩階段斜率不同，迴歸效果量 f^2 值為 0.07，介入期的正確率較基線期提昇，階段間的趨向變化與效果為正向，可知 CRA 策略對丙生以抽象符號來比較分數數值具有立即成效。

維持期平均水準 96.67%，中數水準 100%，趨勢穩定度 67%，呈現不穩定等速趨勢。介入期至維持期趨向變化與效果為正向，趨勢穩定度由不穩定到不穩定，重疊率 100%。由折線圖可見介入期存在趨勢且與維持期的斜率不同，迴歸效果量 f^2 值為 0.02。兩階段的斜率改變量為負值，但維持期的平均水準高於介入期，顯示 CRA 策略對丙生以抽象符號來比較分數數值仍具有正向的短期維持效果。

五、綜合討論

(一) 數困生與非數困生分數數值比較能力的差異

研究者以四組研究參與者為獨立樣本，以測驗為相依樣本，進行混合設計二因子變異數分析，發現不同學生組別與不同測驗對分數數值比較能力會產生顯著的交互作用，進一步進行學生組別與測驗別的單純主要效果考驗，發現分數數值比較能力會因不同學生組別與不同測驗而有顯



著差異。進一步進行事後比較，結果發現在圖像加數字表徵的分測驗一，6MD 的測驗得分顯著低於 6TA 與 4TA，6RDMD 的測驗得分低於 6TA，雖低於 4TA 但未達顯著。說明在圖像支持下，6RDMD 的分數數值比較能力雖低於同年級同儕但仍高於 6MD，6MD 即使提供圖像，其分數數值比較能力仍舊明顯困難。

6RDMD 與 6MD 分測驗二的得分皆明顯低於 6TA 與 4TA，說明數困生使用抽象數字比較 3 個分數數值有明顯困難，並未隨著年級增加而提昇此能力。6RDMD 與 6MD 的測驗三得分皆顯著低於 6TA，雖低於 4TA 但未達顯著，說明六年級數困生分數數值比較能力明顯低於同年級非數困生，能力雖低於四年級非數困生，但差異未達統計上的顯著。

從測驗得分來看，非數困生 6TA 三個分測驗得分沒有明顯差異，4TA 分測驗三得分顯著低於分測驗一與二。兩組表現差異的可能原因在於等值分數概念的精熟度與測驗題型不同所致。分測驗三需先判斷題目中的等值分數與不等值分數再比較不等值分數的數值大小，等值分數概念是四年級教材，6TA 隨著年級增進數值概念的精熟度較高，可能因此影響測驗表現。

分測驗一、二差異在於題目形式。由表 8 可見 6MD 與 6RDMD 都是分測驗二得分最低，顯示僅有純數字表徵的分測驗二對 6MD 與 6RDMD 最困難，其中 6RDMD 分測驗一的平均得分顯著高於分測驗二，6MD 則沒有一樣的表現。說明圖像有助 6RDMD 判斷分數數值，但對 6MD 未有相同的協助效果。表 11 可見此兩組學生在分測驗三的平均得分皆顯著高於分測

驗二，分測驗二、三的差異在所需比較的分數個數不同，這可能是造成兩個分測驗得分差異的原因。

綜上，6TA、6RDMD 與 6MD 都是六年級學生但數值概念有所差異，數困生的分數數值比較能力明顯落後同年級一般生。與 Hallett 等人(2010)及 Hansen 等人(2017)、Hecht 與 Vagi (2010)的研究結果一致，同年級學生的分數概念表現有個別差異，六年級數困生的數值能力明顯落後六年級一般生。4TA 分測驗三的分數最低卻仍舊高於 6MD，說明即使給予 6MD 圖像支持，其測驗得分依舊低於 4TA，此落差可能是分數數值概念困難所致並非因其發展落後。此結果與 Hallett 等人(2010)提出學生概念性知識的個別差異可能與數值能力相關，與發展過程無關的說法一致。6MD 的分數數值比較能力是四組中最低，數障生數值概念的困難程度勝於閱障數困生與一般生，此結果與 Hech 與 Vagi (2012)提出數障生在概念測驗的表現大都是低概念組，不因年級升高而有所改變的結果一致。

(二) CRA 策略的教學成效

1. CRA 策略對數困生的立即成效

附錄二之圖 1 可見三生作答帶分數、假分數與真分數混合題型，會一致認為帶分數的數值最大，其餘兩個分數則依據分母或分子的數值來比較大小作答；若三個分數都是帶分數，則直接依據分母或分子的數值來比較大小作答。

甲生在基線期的測驗都依據分母數值比較大小，分母數字越大數值就越大。乙生在分測驗一能依據塗色區塊比較數值大小，在沒有圖像支持的分測驗二和三仍出



現依據分母的錯誤類型。丙生一開始也依據分母數字決定數值大小，在分測驗三會以兩邊分子分母相加後的答案來比較大小。在操作分數板的過程中三生因為看見各單位分數的分數板理解同樣的 1 切割得越少塊其中一塊就越大，切割的越多塊其中一塊就越小，進而說出「分母小反而比較大」，理解不能僅以分母或分子的數字來判斷數值大小。在後來的放聲思考歷程中，可以聽見研究參與者運用此概念來比較分數數值。

舉例甲生在抽象階段放聲思考比較 $1\frac{2}{3}$ 、 $1\frac{2}{4}$ 、 $1\frac{2}{5}$ 三個分數數值的歷程如下：「三個分數都有相同的 1 和 2 小塊，但是切 3 塊比較大塊，切 4 塊比較小一點點，切 5 塊再切的更小塊。所以 $1\frac{2}{3}$ 最大， $1\frac{2}{5}$ 最小。」

丙生在基線期是依據圖像中的空白部分來比較數值大小，如附錄二之圖 2。表徵階段，甲生與乙都能看完整的圖像比較數值，不受圖像中空白部分影響。丙生則覺得雖然有畫斜線標示出分數代表的部份但仍不容易辨識，要看很久才能確定斜線區塊的大小差異或是根本看不出來，認為要擦掉空白部份僅留下斜線部份才能辨識圖像所表示的分數數值大小。丙生在介入期具體階段操作分數板排出分數後，才理解分測驗一圖像的塗色部分就是分數板排出的樣子。在每節課結束前的測驗，會描繪分測驗一圖像的塗色部分框線確認塗色範圍，如附錄二之圖 3，才能正確比較分數數值。表徵階段繪圖時，丙生在描畫圓形與畫上斜線後，會再把空白部份擦掉，僅留下斜線部分再來比較分數數值，如附錄二之圖 4。

表 12 可見 CRA 策略對三生具立即成效，甲生在三個分測驗分別具有小至中的效果量，乙生在分測驗三有顯著的大效果量，丙生在三個分測驗分別有大、中、小效果量。其中，分測驗一、二以丙生的立即成效最佳，達大效果量；分測驗三以乙生的立即成效最佳，達顯著大效果量。

此研究結果與 Gabriel (2016) 的研究結果相近，CRA 策略有助理解分數概念，對教導分數數值比較有所成效。差異在於本研究以數困生為教學對象，Gabriel 則是一般生。就三位研究參與者個別的進步來看，甲生在分測驗一、三基線期的表現是三位中最落後的，但基線期與介入期分別有小至中的效果量，此結果與 Paulsen (2005) 的結果相似，說明數障生在接受 CRA 策略教學後，在數學概念約有中等的效果量。

另本研究與 Flores 等人(2018)的研究都以 1 與 $\frac{1}{2}$ 為比較參照點，不同之處在於本研究僅以 1、 $\frac{1}{2}$ 為參照點，教導六年級數困生分數數值比較；Flores 等人以五年級學習困難學生為對象，教學分數小數文字題並在數線上標示出 0。

綜上，以分數數值為教學內容雖搭配不同題型、包含其他主題或對不同年級的研究參與者，CRA 策略都有教學成效。視覺化呈現數值、結構化的步驟、師生討論及放聲思考，讓教師可以清楚知道學生數值比較的歷程再討論及回饋學生，有助加深師生互動與學生對課程的參與程度，加以每週四節課的密集練習，都是 CRA 策略有效提昇研究參與者分數數值比較能力的原因。



表 12

各研究參與者在各分測驗的立即成效摘要表

	基線期與介入期 階段間目視分析資料	研究參與者		
		甲	乙	丙
分 測 驗 一	中數水準變化(%)	70	30	40
	重疊率(%)	0	0	9
	效果量	0.04	0.00	0.62
分 測 驗 二	中數水準變化(%)	45	60	30
	階段平均水準(%)	42.5/88.18	32/85.45	14.29/57.27
	重疊率(%)	9	0	0
分 測 驗 三	效果量	0.27	0.02	0.28
	中數水準變化(%)	40	50	30
	階段平均水準(%)	25/77.27	38/88.18	40/66.36
	重疊率(%)	0	0	36
	效果量	0.25	1.48	0.07

2. CRA 策略對數困生的短期維持效果

由維持期的測驗作答情形可見僅乙生可完全使用抽象數字作答，甲生和丙則以抽象數字搭配部分圖像比較數值。見附錄二之圖 5、6、7。

由圖可見甲生和乙生會將假分數換成帶分數，以帶分數或帶分數與真分數比較數值，丙生會混用帶分數換假分數與假分數換帶分數，同分母分數的題型會換成假分數，比較假分數與真分數；異分母分數題型會換成帶分數再劃掉相同的整數 1，並自行繪圖比較比較剩下的真分數。進入維持期後，丙生能觀看完整的圖形比較數值，不須擦掉空白部分。

三生都會把等於 1 的分數標示出「=1」，以此為參照點來比較分數數值。三生都能以口語「一半」連結數學用語「 $\frac{1}{2}$ 」，知道一半就是 $\frac{1}{2}$ ，但放聲思考時僅乙生較

頻繁使用準確的數學用語「比 $\frac{1}{2}$ 大」、「比 $\frac{1}{2}$ 小」來語音化思考歷程。甲生與丙生即使知道一半等於 $\frac{1}{2}$ ，依舊多使用「比一半多」、「比一半少」的口語表達，在介入期與維持期測驗作答時也以「一半」來自我提醒數值大小。如附錄二之圖 5 和附錄二之圖 8。

由表 13 可見 CRA 策略對三生都有短期維持效果。甲生在分測驗三有小效果量的短期維持效果，乙生在分測驗一、二分別有中與小效果量的短期維持效果，丙生在分測驗一、二有小效果量的短期維持效果。此研究結果與 Strickland (2016) 的研究結果均指出 CRA 策略對學習內容具有短期的維持效果，唯本研究因為時間限制，僅測得一週後的維持效果。

3. 討論研究過程

為確保研究工具能有效評量出研究參與者的能力，邀請專家教授與專家教師填



表 13

各研究參與者在各分測驗的短期維持效果摘要表

	介入期與維持期 階段間的目視分析資料	研究參與者		
		甲	乙	丙
分 測 驗 一	中數水準變化(%)	10	0	10
	重疊率(%)	100	100	100
	效果量	0.02	0.16	0.14
分 測 驗 二	中數水準變化(%)	10	0	50
	重疊率(%)	100	100	100
	效果量	0.02	0.03	0.03
分 測 驗 三	中數水準變化(%)	20	10	30
	重疊率(%)	100	100	100
	效果量	0.03	0.01	0.02

寫研究工具內容效度專家評鑑問卷提昇工具效度；為確保介入方案的內容效度，邀請專家教師填寫問卷進行評鑑；為落實介入方案的實施完整性，邀請搭檔教師觀課並填寫介入完整性評量表給予回饋，評量結果多為總是達成與經常達成，介入完整性介於 95%—100%，平均 97.5%，顯示研究者能確實且一致性的對三位研究參與者實施介入方案。

4. 設計與應用此份教材待考量事項

(1) 僅能了解短期維持效果

本研究僅於介入方案停止後一週進行為期一週 3 次的維持期評量，未能拉長間隔時間檢視長期維持效果，故長期維持效果有待驗證。

(2) 教具的選用

研究者預設以分母 1—10 的長方形圖像做為測驗題目與操作教具，但市面上的

長方形分數教具往往缺少分母 7 與 9，故選擇含有分母數字 1—10 的圓形教具，如圖 8，為求一致性，介入方案內容與測驗題目亦改用圓形圖像。

(3) 研究參與者的繪圖能力與所需時間

由於繪製的表徵圖像是圓形，考量繪圖的便利性與準確性，準備洞洞尺進行教學，如圖 9。但僅以 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 的圖像較容易畫線等分，其餘分數依舊不易畫線等分，尤其是 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{10}$ 花費許多時間嘗試與修改，以致每節課能繪製的題目有限，也考驗學生耐性。

(4) 師生討論

三位學生在師生討論時會依據各自經驗說出不同的繪圖與記憶方式，比研究者事前準備的說法更有助理解與記憶，故師生討論是成就 CRA 策略教學不可或缺的要點。



圖 8

木製圖形分數板

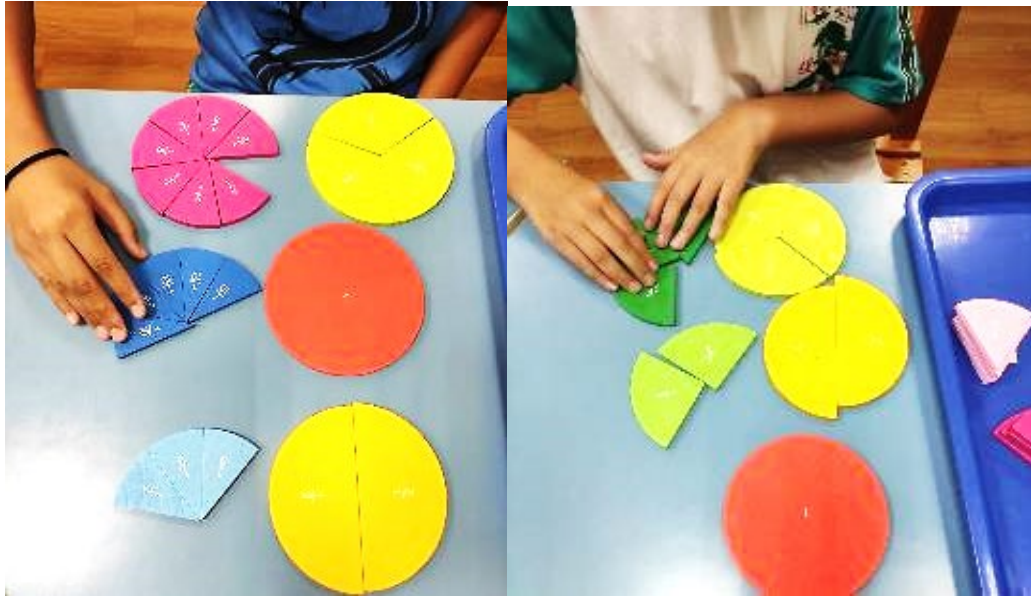
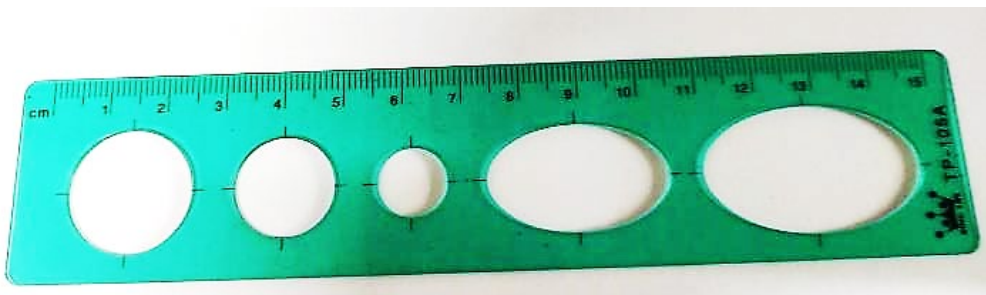


圖 9

洞洞尺



伍、結論與建議

一、研究結論

1. 數困生與非數困生的分數數值比較能力有顯著差異。6RDMD 與 6MD 的測

驗得分皆顯著低於 6TA；分測驗一、二中，6MD 的測驗得分顯著低於 4TA。

2. 不同題目表徵形式對數困生與非數困生的分數數值比較能力有顯著差異。研究發現 6TA 在三個分測驗的得分沒有顯著差異；4TA 在純數字表徵分測驗三



- 得的分顯著低於圖像加數字表徵的分測驗一與純數字表徵的分測驗二；6RDMD 與 6MD 在純數字表徵分測驗二的得分都顯著低於圖像加數字表徵的分測驗一與純數字表徵的分測驗三。
3. 不同學生組別與不同題目表徵形式對分數數值比較能力有顯著的交互作用影響，即不同學生組別的分數數值比較能力在不同題目表徵形式有顯著差異。
 4. CRA 策略對增進數困生之分數數值比較能力有立即成效。CRA 策略結構化的教學方式，讓研究參與者依循具體操作、表徵圖示逐步建立抽象概念，多次的討論與練習達到階段內的精熟學習，對提昇數困生的分數數值比較能力皆有正向的立即成效。
 5. CRA 策略對增進數困生之分數數值比較能力有短期保留效果。本研究於介入期結束後一週進行維持期評量，數困生分別以抽象數字、操作經驗或圖示解題，CRA 策略對三位研究參與者的分數數值比較能力具有短期的保留效果。

二、研究建議

(一) 選用適切的教具與圖示

由於 CRA 策略的三階段環環相扣，表徵階段需觀察具體階段的教具來繪圖，因此需慎選教具。日後教具選用不僅要考量涵蓋教學所需的分母數字與繪圖的便利性與正確性，亦可使用繪圖輔具節省時間。

具體階段操作分數板時，學生能有效避免依據分母數字比較數值的錯誤。建議日後在低年級進行單位分數數值比較教學時，除了課本圖示與附件可增加分數板操作活動，符合學生認知發展亦有助建立概念；中年級可加入繪圖教學銜接抽象概念。

(二) 討論及表達

討論與放聲思考是 CRA 策略的重要環節，師生間的語言互動將影響教學。過程中師生會進行討論，教師需示範放聲思考的過程與內容並鼓勵學生發表，討論互動的語言需貼近學生的生活經驗與背景知識以提昇學習效果。

(三) 留意個別學習精熟度

CRA 策略的後一階段建立於前一階段學習的精熟度，因此在完成階段教學後需進行測驗，確定具有 80% 的正確率才能開啓下一階段學習。教學時需留意學生的個別學習進度，勿因團體教學而忽略個別精熟度。

三、對未來研究的建議

(一) 增加施測對象人數

本研究的第一部分研究僅以臺南市 30 位一般生與 30 位數困生為研究參與者。未來研究可擴大研究參與者的人數，或以至少 30 位數障生為研究參與者。

(二) 擴大施測對象年段範圍

本研究的第一部分研究僅以臺南市四年級與六年級一般生與六年級數困生為研究對象，未來可擴大選取其他年段學生，以瞭解各階段數困生與一般生的能力差異。

(三) 以心理能力為研究內容

本研究的內容之一是探究數困生與非數困生分數數值比較能力之差異，此能力為學生學習後所獲得的能力，使用的分數數值比較測驗偏向學科成就測驗，尚無法確切探知數困生的數值比較能力是否為核心缺陷。未來研究可以數困生的基礎心理能力為研究主題，以進一步探尋數困生的



數值能力困難是否為核心缺陷或是發展落後所致。

(四) 持續評量以檢視長期的保留效果

本研究僅於介入期後一週進行三次的維持期評量，未能於間隔較長的時間檢視介入方案的長期保留效果，未來研究可拉長研究階段的長度，以獲取間隔較長時間後的長期保留效果。

(五) 應用 CRA 策略於數學領域不同範疇或是分數不同向度之內容

本研究介入方案內容為分數數值概念。對於本研究未實施的其他範疇，如小數，或許也可使用 CRA 策略進行教學，並探討 CRA 策略應用於不同實數數值比較教學成效的異同。或可再進一步探討學生在提昇分數數值概念後，對後續其他分數概念或是分數計算學習的影響，以進一步探討概念性知識與程序性知識間的關係。

(六) 探討不同參與者人數對研究的影響

本研究的教學情境為個別化與個別教學，故可視研究參與者個別的學習精熟度規劃教學節數。為更貼近實務現場，未來研究可採小組或團體教學，以探討不同參與者人數對 CRA 策略教學效果的影響。

(七) 探究不同教學對象的成效

本研究的研究參與者為通過臺南市鑑輔會跨階段鑑定的六年級學障生，未來可擴及其他年級、類別的學生，以探究不同教學對象間的成效差異。

榮華、陳心怡，譯)。中國行為科學社。

(原著出版於 2003) [Wechsler, D. (2007). *Wechsler Intelligence Scale for Children-Fourth Edition (WISC-IV) Chinese Version: Manual* (Yung-Hua Chen, & Hsin-Yi Chen, Trans.). Chinese Behavioral Science. (Original work published 2003)]

王宜惠、洪儷瑜(2019)。我們真的認識數學障礙嗎？—臺灣數學障礙 20 年研究回顧與問題探究。《特殊教育研究學刊》，44(1)，59—90。[Wang, Hsuan-Hui, & Hung, Li-Yu (2019). Understanding mathematics learning disabilities: Two decades of research in Taiwan. *Journal of Bulletin of Special Education*, 44(1), 59-90.] [https://doi.org/10.6172/BSE.201903_44\(1\).0003](https://doi.org/10.6172/BSE.201903_44(1).0003)

李俊仁(2017)。數學計算障礙的認知分析。載於詹士宜、楊淑蘭(主編)，*突破數學學習困難：理論與實務*(頁 19—37)。心理。[Lee, Jun-Ren (2017). Cognitive analysis of mathematical dyscalculia. In Shih-Yi Chan, & Shu-Lan Yang (Eds.), *Breaking through mathematics learning difficulties: Theory and practice* (pp. 19-37). Psychology Publishing.]

李盈盈(2004)。分數也可以這樣教。《國教輔導》，44(1)，31—33。[Lee, Ying-Ying (2004). Fractions can be taught in this way. *Guidance of Elementary Educa-*

參考文獻

Wechsler, D. (2007). *魏氏兒童智力量表第四版(WISC-IV)中文版：指導手冊*(陳



- tion, 44(1), 31-33.] <http://doi:10.6772/GEE.200410.0031>
- 阮秋華(2016)。萬用揭示板結合鷹架策略應用在三年級分數補救教學之研究〔未出版碩士論文〕。國立臺北教育大學。〔Juan, Chiu-Hua (2016). *The study of applying magic board combined with scaffolding strategies to fraction remedial instruction for the third graders* [Unpublished master's thesis]. National Taipei University of Education.〕
- 孟瑛如、簡吟文(2014)。由 DSM-5 的改變談學習障礙未來的鑑定與教學輔導趨勢。輔導季刊, 50(4), 28-34。〔Meng, Ying-Ru, & Chien, Yin-Wen (2014). Discussing future trends of identification and instructional guide with learning disabilities through modification of DSM-5. *Guidance Quarterly*, 50(4), 28-34.〕
- 林嘉惠(2015)。以萬用揭示板融入分數教學對國小三年級學童同分母分數加減問題解題表現之研究〔未出版碩士論文〕。國立臺南大學。〔Lin, Chia-Hui (2015). *The study of integrating magic board into fraction teaching on third graders' performance of solving addition and subtraction of fractions with the same denominator* [Unpublished master's thesis]. National University of Tainan.〕
- 周淑君(2018)。萬用揭示板融入國小三年級分數單元對學童學習成就之影響研究〔未出版碩士論文〕。國立臺南大學。〔Chou, Shu-Chun (2018). *The study of learning achievement on fraction in third grades using magic board as teaching aid* [Unpublished master's thesis]. National University of Tainan.〕
- 洪素敏、楊德清(2002)。創意教學～分數的補救教學。科學教育研究與發展季刊, 29, 33-52。〔Hung, Su-Min, & Yang, Der-Ching (2002). Innovating instruction—Remedial teaching of fractions. *Research and Development in Science Education Quarterly*, 29, 33-52.〕
- 洪儷瑜、連文宏(2015)。基本數學核心能力測驗。中國行為科學社。〔Hung, Li-Yu, & Lien, Wen-Hung (2015). *The Basic Arithmetic Core Competency Test*. Chinese Behavioral Science.〕
- 胡永崇(2015)。學習障礙者之教育。載於王文科(主編), 特殊教育導論(第2版, 頁 311-348)。五南。〔Hu, Yung-Chung (2015). Education of learning disabilities. In Wen-Ke Wang (Ed.), *Introduction to special education* (2nd. ed., pp. 311-348). Wu-Nan.〕
- 連文宏、洪儷瑜(2017)。數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵及其差異分析。臺灣數學教育期刊, 4(1), 35-62。〔Lien, Wen-Hung, &



- Hung, Li-Yu (2017). Profile of arithmetic knowledge of junior high school students with mathematics learning disabilities with/without reading disabilities. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 4(1), 35-62.] <https://doi.org/10.6278/tjme.20170317.002>
- 教育部(2018)。十二年基本國民教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines for the 12-year basic education elementary school, junior high school, and upper secondary school – The domain of mathematics.*] https://www.k12ea.gov.tw/files/class_schema/課綱/12-數學/12-1/十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域.pdf
- 黃彥齊(2012)。運用虛擬教具對國小學習障礙學生等值分數表徵轉換教學成效之研究[未出版碩士論文]。國立臺南大學。[Huang, Yen-Chi (2012). *The effect of using virtual manipulative on the representational ability in equivalent fraction learning for elementary school students with learning disabilities* [Unpublished master's thesis]. National University of Tainan.]
- 楊坤堂(2007)。數學學習障礙。五南。[Yang, Kun-Tang (2007). *Mathematics learning disabilities*. Wu-Nan.]
- 楊坤堂、鄧國彬(2005)。數學學習障礙學生的認識與教學。臺北市立特殊教育中心。[Yang, Kun-Tang, & Deng, Kuo-Bin (2005). *Understanding and teaching students with learning disabilities in mathematics*. Special Education Center, University of Taipei.]
- Alibali, M. W., & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction*, 37, 56-61. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.003>
- Azmidar, A., Darhim, D., & Dahlan, J. A. (2017). Enhancing students' interest through mathematics learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 895, Article 12072. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012072>
- Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(3), 447-455. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004>
- Bailey, D. H., Siegler, R. S., & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 17(5), 775-785. <https://doi.org/10.1111/desc.12155>



- Berry, R. Q., III, & Thunder, K. (2017). Concrete, representational, and abstract: Building fluency from conceptual understanding. *Virginia Mathematics Teacher*, 43(2), 28-32.
- Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001>
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, 79(4), 1016-1031. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x>
- Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From brain to education. *Science*, 332(6033), 1049-1053. <https://doi.org/10.1126/science.1201536>
- Cole, J. E., & Wasburn-Moses, L. H. (2010). Going beyond "The Math Wars": A special educator's guide to understanding and assisting with inquiry-based teaching in mathematics. *Teaching Exceptional Children*, 42(4), 14-20. <https://doi.org/10.1177/004005991004200402>
- Epler, P. L. (2019). Strategies for teaching math to middle and high school students with special needs. In S. Ikuta (Ed.), *Handmade teaching materials for students with disabilities* (pp. 232-252). IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-5225-6240-5.ch010>
- Everett, G. E., Harsy, J. D., Hupp, S. D. A., & Jewell, J. D. (2014). An investigation of the Look-Ask-Pick mnemonic to improve fraction skills. *Education and Treatment of Children*, 37(3), 371-391. <https://doi.org/10.1353/etc.2014.0025>
- Flores, M. M., Hinton, V. M., & Meyer, J. M. (2018). Teaching fraction concepts using the concrete-representational-abstract sequence. *Remedial and Special Education*, 41(3), 165-175. <https://doi.org/10.1177/0741932518795477>
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Jordan, N. C., Siegler, R., Gersten, R., & Chngas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), 683-700. <https://doi.org/10.1037/a0032446>
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Malone, A. S., Wang, A., Hamlett, C. L., Jordan, N. C., Siegler, R. S., Chngas, P. (2016). Effects of



- intervention to improve at-risk fourth graders' understanding, calculations, and word problems with fractions. *The Elementary School Journal*, 116(4), 625-651. <https://doi.org/10.1086/686303>
- Gabriel, F. (2016). Understanding magnitudes to understand fractions. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 21(2), 36-40.
- Gault, R. (2016). *A multiple case study examining how third-grade students who struggle in mathematics make sense of fraction concepts* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Central Florida. <http://stars.library.ucf.edu/etd/5081/>
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15. <https://doi.org/10.1177/00222194040370010201>
- Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., & Yao, Y. (1992). Counting knowledge and skill in cognitive addition: A comparison of normal and mathematically disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 54(3), 372-391. [https://doi.org/10.1016/0022-0965\(92\)90026-3](https://doi.org/10.1016/0022-0965(92)90026-3)
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88(2), 121-151. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2004.03.002>
- Goldman, S. R., Pellegrino, J. W., & Mertz, D. L. (1988). Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning-disabled students. *Cognition and Instruction*, 5(3), 223-265. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0503_2
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395-406. <https://doi.org/10.1037/a0017486>
- Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(4), 469-486. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.07.009>
- Hansen, N., Jordan, N. C., & Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fraction: A longitudinal study of student growth from third through sixth



- grade. *Contemporary Educational Psychology*, 50, 45-59. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002>
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 102(4), 843-859. <https://doi.org/10.1037/a0019824>
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(2), 212-229. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.08.012>
- Heck, J. V. (2015). *Using interactive whiteboard technology to implement the concrete-representational-abstract mathematical sequence*. <https://www.slideshare.net/JanetVanHeck/using-interactive-whiteboard-technology-to-implement-the-concreterepresentational-abstractjpeg>
- Hurrell, D. (2018). I'm proud to be a toy teacher: Using CRA to become an even more effective teacher. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(2), 32-36.
- Johnson, S. N. (2014). *Fractions: Seeing the whole picture in many parts*. <https://teachersinstitute.yale.edu/curriculum/units/2014/1/14.01.10.x.html>
- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116(1), 45-58. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001>
- Kloosterman, P. (2010). Mathematics skills of 17-year-olds in the United States: 1978 to 2004. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(1), 20-51. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.1.0020>
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9-year-old students. *Cognition*, 93(2), 99-125. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004>
- Lerner, J. W. (2003). *Learning disabilities: Theories, diagnosis, and teaching strategies* (9th ed.). Houghton Mifflin.
- Lerner, J. W., & Johns, B. H. (2012). *Learning disabilities and related mild disabilities: Teaching strategies and new directions* (12th ed.). Cengage Learning.



- Lerner, J. W., & Johns, B. H. (2015). *Learning disabilities and related disabilities: Strategies for success* (13th ed.). Cengage Learning.
- Martin, W. G., Strutchens, M., & Elliott, P. (Eds.). (2007). *The learning of mathematics, 69th NCTM yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Mazzocco, M. M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science, 11*(5), 681-691. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x>
- Mazzocco, M. M., Myers, G. F., Lewis, K. E., Hanich, L. B., & Murphy, M. M. (2013). Limited knowledge of fraction representations differentiates middle school students with mathematics learning disability (dyscalculia) versus low mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 115*(2), 371-387. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.01.005>
- Mazzotti, V. L., & Mustian, A. L. (2013). Themes and dimensions of learning disabilities. In J. P. Bakken, F. E. Obiakor, & A. F. Rotatori (Eds.), *Learning disabilities: Identification, assessment, and instruction of students with LD* (pp. 27-53). Emerald.
- Miller, S. P., Stringfellow, J. L., Kaffar, B. J., Ferreira, D., & Mancl, D. B. (2011). Developing computation competence among students who struggle with mathematics. *Teaching Exceptional Children, 44*(2), 38-46. <https://doi.org/10.1177/004005991104400204>
- Mills, J. (2019). Making multiplication meaningful: Teaching for conceptual understanding. *Teachers and Curriculum, 19*(1), 17-25. <https://doi.org/10.15663/tandc.v19i1.334>
- Minarti, E. D., & Wahyudin, E. D. (2019). Conceptual understanding and mathematical disposition of college student through concrete-representational-abstract approach (CRA). *Journal of Physics: Conference Series, 1157*, Article 042124. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/4/042124>
- Moore, S. D. (2017). *Why teach mathematics with manipulatives*. https://www.hand2mind.com/media/contentmanager/content/Why_Teach_Math_with_Manipulatives.pdf
- Nahdi, D. S., & Jatisunda, M. G. (2020). Conceptual understanding and procedural knowledge: A case study on



- learning mathematics of fractional material in elementary school. *Journal of Physics: Conference Series*, 1477, Article 042037. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1477/4/042037>
- Newton, K. J., Willard, C., & Teufel, C. (2014). An examination of the ways that students with learning disabilities solve fraction computation problems. *The Elementary School Journal*, 115(1), 1-21. https://doi.org/10.1163/_afco_asc_2291
- Paulsen, K. J. (2005). Infusing evidence-based practices into the special education preparation curriculum. *Teacher Education and Special Education: The Journal of the Teacher Education Division of the Council for Exceptional Children*, 28(1), 21-28. <https://doi.org/10.1177/088840640502800103>
- Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing-Cobbs, L., Fletcher, J., & Fuchs, L. (2009). Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 42(4), 356-371. <https://doi.org/10.1177/0022219409335211>
- Rahmi, I., & Arnawa, I. M. (2018). Developing learning instrument based on guided inquiry using cra sequence to improve students' problem solving skill. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research (AS-SEHR)*, 285, 219-221. <https://doi.org/10.2991/icm2e-18.2018.51>
- Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79(2), 375-394. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x>
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 36(5), 1227-1238. <https://doi.org/10.1037/a0018170>
- Sharp, E., & Shih Dennis, M. (2017). Model drawing strategy for fraction word problem solving of fourth-grade students with learning disabilities. *Remedial and Special Education*, 38(3),



- 181-192. <https://doi.org/10.1177/0741932516678823>
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, 8(3), 144-150. <https://doi.org/10.1111/cdep.12077>
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994-2004. <https://doi.org/10.1037/a0031200>
- Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 545-560. <https://doi.org/10.1037/a0014239>
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697. <https://doi.org/10.1177/0956797612440101>
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Strickland, T. K. (2016). Using the CRA-I strategy to develop conceptual and procedural knowledge of quadratic expressions. *Teaching Exceptional Children*, 49(2), 115-125. <https://doi.org/10.1177/0040059916673353>
- Westenskow, A., & Moyer-Packenham, P. (2015). Using an iceberg intervention model to understand equivalent fraction learning when students with mathematical learning difficulties use different manipulatives. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 23(2), 45-62. https://doi.org/10.1564/tme_v23.2.01
- Whyte, J. C., & Bull, R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skills in preschoolers. *Developmental Psychology*, 44(2), 588-596. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.44.2.588>
- Witzel, B. S., Riccomini, P. J., & Schneider, E. (2008). Implementing CRA with secondary students with learning disabilities in mathematics. *Intervention in*



School and Clinic, 43(5), 270-276.
<https://doi.org/10.1177/1053451208314734>

Zulfakri, Z., Ikhsan, M., & Yusrizal, Y.
(2019). Improving the ability of repre-

sentation and problem solving through
concrete representational abstract
(CRA) approach in mathematical
learning. *International Journal for Ed-
ucational and Vocational Studies*, 1(3),
244-248.

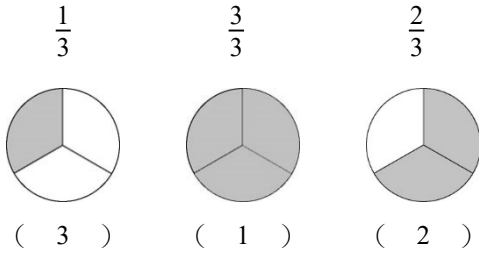


附錄一

1. 分測驗一：比比看（一）

例題：

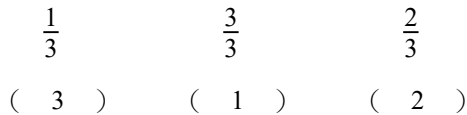
請依據圖形排序三個分數。由大排到小，依序寫上 1、2、3，最大的寫 1，最小的寫 3。



2. 分測驗二：比比看（二）

例題：

請依據題目排序三個分數。由大排到小，依序寫上 1、2、3，最大的寫 1，最小的寫 3。



3. 分測驗三：比比看（三）

例題：

請判斷兩個算式的答案大小，將答案比較大的算式圈起來。

不要計算，直接作答。

1+2 , 2+3



附錄二

圖 1

三位研究參與者依據分母或依據分子的錯誤作答

(4) $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{5}{4}$
(3) (1) (2)

(5) $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{6}{6}$
(2) (3) (1) *看分母*

(6) $\frac{3}{9}$ $1\frac{4}{7}$ $\frac{2}{4}$
(3) (1) (2)

(7) $\frac{6}{27}$ $\frac{6}{6}$ $\frac{6}{5}$ *看分子*
(1) (2) (3)

(8) $\frac{5}{5}$ $1\frac{1}{5}$ $1\frac{2}{5}$ *看分子*
(3) (1) (2)

(9) $\frac{3}{5}$ $1\frac{3}{4}$ $1\frac{3}{6}$ *看*
(3) (2) (1)



圖 2

丙生依據圖像空白部分比較數值

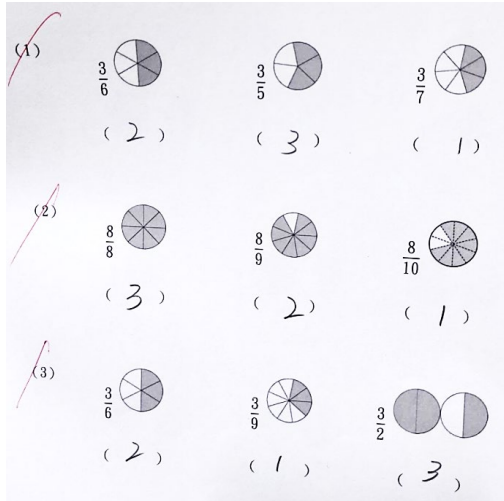


圖 3

丙生描繪圖像塗色部分的框線

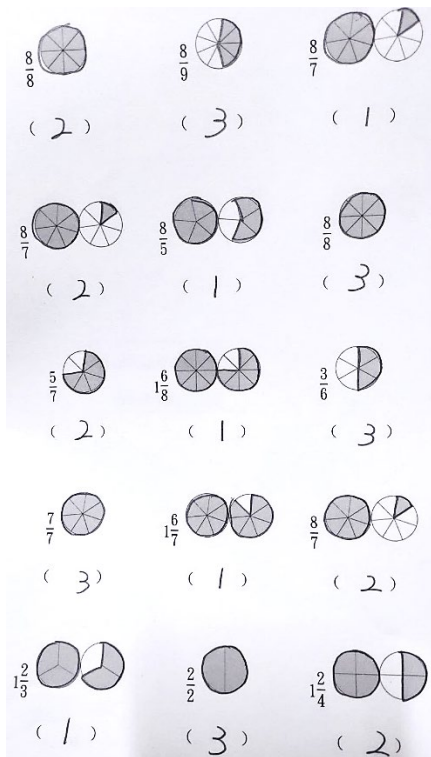


圖 4

研究參與丙在表徵階段所繪製的圖像

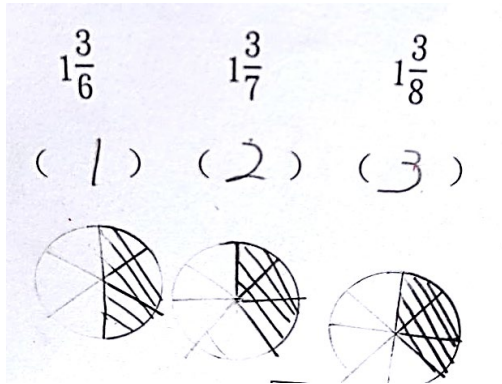


圖 5

甲生在維持期的測驗作答情形

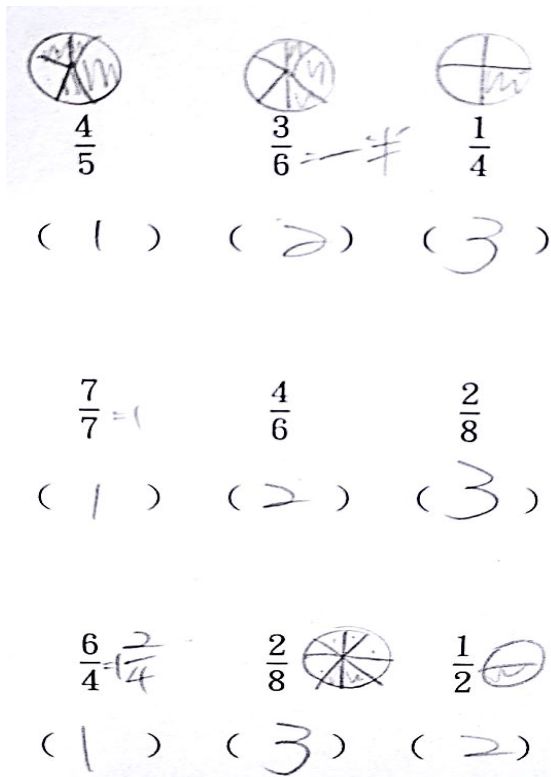


圖 6


研究參與乙在維持期的測驗作答情形

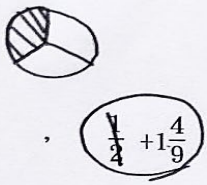
$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$	$\frac{6}{6} = 1$
(3)	(1)	(2)
$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$	$\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$	$\frac{6}{6} = 1$
(2)	(1)	(3)
$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$1\frac{1}{6}$
(2)	(3)	(1)
$\frac{8}{8} = 1$	$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$	$1\frac{8}{9}$
(3)	(2)	(1)





圖 7


研究參與丙在維持期的測驗作答情形

(5) $\frac{6}{8} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$, $\frac{6}{8} + \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$ 

(6) $\frac{6}{8} + \frac{8}{8} = 1$, $\frac{1}{4} + 1\frac{4}{9}$ 

(7) $\frac{6}{8} + 1\frac{2}{8} = \frac{15}{8}$, $\frac{1}{4} + \frac{4}{8}$ 

(8) $\frac{3}{4} + \frac{10}{9} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ 

(9) $\frac{6}{8} + 1\frac{1}{7} = \frac{8}{7}$, $\frac{6}{8} + \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ 


(10) $\frac{6}{8} + 1\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7} + 1\frac{4}{5}$ 

圖 8

丙生以口語一半標示數值

$\frac{5}{10}$ 一半 $\frac{3}{8}$ 一半 $\frac{4}{3}$ 一半

(2) (3) (1)



Differences in Comparison Ability on Fraction Magnitude for Students with and without Mathematics Learning Difficulties and Teaching Effectiveness of the Concrete-Representational-Abstract Strategy

Hsiu-Chen Lin

Fu-Hsing Primary School,
Tainan City

Hsian-Ming Yang

Department of Special Education,
National University of Tainan

Abstract

Purpose

The mathematics education in junior and elementary schools focuses on integers and fractions (Bailey et al., 2011). According to the Curriculum Guidelines of 12-year Basic Education in Taiwan (Ministry of Education, 2018), the mathematics curriculum includes fraction in the first learning stage, emphasizing the recognition of equal parts and unit fractions. Geary (2004) categorizes mathematical knowledge into conceptual and procedural types. One core ability of conceptual knowledge is accurate representation of magnitude (Hecht & Vagi, 2012). Literature indicates that students with learning disabilities (LD) experience difficulties in fraction magnitude representation compared to same-grade students without LD. That the intervention improving students' magnitude knowledge based on the previous notion, Jordan and colleagues (2013) suggested the incorporation of magnitude instruction in elementary mathematics curriculum. A retrospective review of two decades (1995-2017) of domestic research on mathematical difficulties indicates that over 70% of



the articles in domestic journals focused on teaching strategies, highlighting the importance of intervention (Wang & Hung, 2019). However, practical researches accounted for less than 30%, indicating a gap between research and practice. The purposes of this study were to explore the differences in the ability to compare fraction magnitude between students with and without mathematics learning difficulties, and to use CRA strategy as intervention for students with mathematics learning difficulties to improve their fraction magnitude comparison ability.

Methods

The researcher recruited fourth and sixth graders with typical achievement (4TA and 6TA) as participants without mathematics learning difficulties, as well as sixth graders with reading disabilities (6RDMD) and with mathematics disabilities (6MD) as participants with mathematics learning difficulties. In the first part of the study, a researcher-made test was administered to measure participants' fraction magnitude comparison ability, and the results were explained by mixed design two-factor analysis of variance. In the second section, the researcher designed intervention based on CRA strategy to teach three students with mathematics learning difficulties. The results of the study were illustrated by graphic method, visual analysis method and statistical analysis.

Results

The results are as follows. (1) There is a significant difference in the ability to compare fraction magnitude between students with and without mathematics learning difficulties. In all three subtests, the test scores of 6RDMD and 6MD are significantly lower than 6TA; test scores in fraction magnitude comparison tasks with graphics and number representation (subtest 1) and fraction magnitude comparison tasks with number representation (subtest 2) of 6MD are significantly lower than 4TA. (2) Different representations of test questions result in significant differences in the ability to compare fraction magnitude between students with and without mathematics learning difficulties. The scores of 6TA in all three subtests are not significantly different; the test scores in addition comparison task with number representation (subtest 3) of 4TA are significantly lower than in fraction magnitude comparison tasks with graphics and number representation (subtest 1) and fraction magnitude comparison tasks with number representation (subtest 2); the scores in fraction magnitude comparison tasks with number representation (subtest 2) of 6RDMD and 6MD are significantly lower than in addition comparison task with number representation (subtest 3). (3) Different student groups and different representations of test questions have a significant interactive effect on the fraction magnitude comparison ability. Students' magnitude comparison ability in different groups shows significant differences in test questions with different representa-



tions. (4) Students with mathematics learning difficulties learned abstract concepts through physical operations and graphics. For students with mathematics learning difficulties, the CRA strategy has an immediate effectiveness on improving their fraction magnitude comparison ability. (5) Students with mathematics learning difficulties could use abstract numbers or graphics to solve fraction magnitude comparison problems. For students with mathematics learning difficulties, the CRA strategy has a short-term maintenance effect on improving their fraction magnitude comparison ability.

Conclusions

Based on the findings the researcher points out three teaching suggestions: select teaching aids carefully, encourage students' participation in discussion and monitor individual learning proficiency. For future researches, the researcher suggested that the number and the age range of students being tested could be expanded to understand the differences between students with and without mathematical difficulties at different education level, and the topics could focus on the reasons for the difficulty of numerical magnitude based on students' mental ability. Additionally, the effectiveness of CRA strategy on different numbers and age range of students and on different mathematics knowledge is also worth exploring.

Key words: fraction, magnitude, CRA strategy

