《育 達 科 大 學 報》
第32期，民國101年9月，第93-103頁
Yu Da Academic Journal
Vol.32, September 2012, pp. 93-103.

一些積分的級數表示法

余啓輝 *

摘要

本篇論文研究三種不同類型的積分問題，利用高等微積分中三個重要的方法－參數微分法、逐項微分法和逐項積分法可以將這三種積分表示成冪級數或者是三角級數。此外我們舉出一些積分的例子實際的來做計算，而它們的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面我們利用數學軟體Maple算出這些積分以及它們無窮級數解的近似值。

關鍵字：積分、三個重要的方法、冪級數、三角級數、無窮級數

* 南榮技術學院通識教育中心助理教授

The Series Expressions of Some Integrals

Chii-Huei Yu *

Abstract

This paper studies three different types of integrals, and the three types of integrals can be expressed as power series or trigonometric series using three important methods in advanced calculus－differentiation with respect to a parameter, differentiation term by term, and integration term by term. In addition, we propose some integral examples to do calculation practically, and all their answers are presented in infinite series. On the other hand, we employ the mathematical software Maple to calculate the approximations of these integrals and their infinite series solutions.

Keywords: integrals, three important methods, power series, trigonometric series, infinite series

* Assistant Professor, Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology

壹、緒 論

在高等微積分或工程數學的課程裡有關積分(integrals)問題的研究是一項重要的課題，例如Gamma函數和Beta函數以及其他一些特殊函數都是以積分的型式呈現的，所以無論在物理、工程或是其他自然科學領域裡，有關積分的求解或數值計算都有其重要性，這方面的書籍可以參閱 (賴漢卿, 1979, 第六章；Ghorpade & Limaye, 2006, chap.9；Lang, 1983, chap.13；Ponnusamy, 2012, chap.7；Widder, 1961, chap.10)，相關的論文可以參考 (Baxa & Schoißengeier, 2002；Gray & Wang , 1992；Haber, 1975)。本篇文章主要是研究有關$\int_0^1 \frac{x^{ka+b-1}(\ln x)^m}{(1-px^a)^{k+1}}dx$，$\int_0^1 \frac{x^{b-1}(\ln x)^m(1-r\cos y\cdot x^a)}{1-2r\cos y\cdot x^a+r^2x^{2a}}dx$以及$\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}(\ln x)^m}{1-2r\cos y\cdot x^a+r^2x^{2a}}dx$這三種困難的積分問題，其中$a>0, b>0, y, p$為實數且$|p|<1$，$m, k$為任意非負整數。我們利用高等微積分中三個重要的方法－參數微分法(differentiation with respect to a parameter)、逐項微分法(differentiation term by term)和逐項積分法(integration term by term)，可以將這三種積分表示成冪級數(power series)或者是三角級數(trigonometric series)，也就是本文三個主要的結果－定理1、定理2和定理3。同時我們舉出幾個積分的例子，利用我們的結果可以將這些積分表示成無窮級數的型式。另一方面我們利用數學軟體Maple算出這些積分以及它們無窮級數解的近似值。

接著我們簡單的介紹一些本文所舉出的例子，首先例題1是求解積分$\int_0^1 \frac{x^{12}(\ln x)^5}{\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)^4}dx$，利用定理1可以得到它的無窮級數解為$-120\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+3}{3}}{(2n+13)^6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$，並且利用Maple算出它的近似值大約是-0.000471933238。其次例題2是研究積分$\int_0^1 \frac{(\ln x)^7\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{5}x^{\sqrt{3}}+\frac{16}{25}x^{2\sqrt{3}}\right)}dx$，利用定理2可以得到它的無窮級數解

為 $-5040\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^{n}}{(\sqrt{3}n+1/2)^{8}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$，藉由Maple得到它的近似值大約是 $-1.29023537366\cdot 10^{6}$。＝至於例題3是探討積分 $\int_0^1\frac{\sqrt{x}(\ln x)^{10}}{1-\frac{3}{7}x^{2/3}+\frac{9}{49}x^{4/3}}dx$，利用定理3可以得到它的無窮級數解為 $2419200\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}}{\left(\frac{2}{3}n+\frac{5}{6}\right)^{11}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$，Maple算出其近似值大約是42267.142703386。至於其它例子都是利用本文的推論得到答案的，其結果可以參考下面的例子說明。

貳、主要的理論

接著介紹本文用到的公式和定理：

尤拉公式 (Euler's formula)：$e^{iy}=\cos y+i\sin y$，其中 $i=\sqrt{-1}$，y為任意實數。

棣美弗公式 (DeMoivre's formula)：$(\cos y+i\sin y)^n=\cos ny+i\sin ny$，其中$y$為任意實數且$n$為任意非負整數。

以下是我們用到的三個重要的性質，首先第一個性質可以參考 (Apostol, 1975, p283)：

參數微分法：假設I_1,I_2皆為實數區間，若兩變數函數$f(x,y)$以及它對y的一階偏微分$fy(x,y)$定義在$I_1\times I_2$且滿足以下條件:(i)對所有 $y\in I_2$，Lebesgue積分$\int_{I_1}f(x,y)dx$和$\int_{I_1}f_y(x,y)dx$都存在，(ii)存在一個在區間I_1的Lebesgue可積分函數$G(x)$使得$\left|f_y(x,y)\right|\le G(x)$對所有$(x,y)\in I_1\times I_2$。則$F(y)=\int_{I_1}f(x,y)dx$在區間$I_2$可微分且其微分$\frac{d}{dy}F(y)=\int_{I_1}f_y(x,y)dx$。

接著第二個重要的性質可以參考(Apostol, 1975, p230)：

逐項微分法：如果對所有非負整數n，函數f_n:(c,d)→R滿足下列三個條件：(i)存在一點$b_0\in(c,d)$使得$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(b_0)$收斂，(ii)所有函數$f_n$(b)在開區間(c,d)都可以微分，

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{db}f_n(b)$在(c,d)上均勻收斂(uniformly convergent)。則$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(b)$在開區間(c,d)上均勻收斂而且可以微分，其微分$\frac{d}{db}\sum_{n=0}^{\infty}f_n(b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{db}f_n(b)$。

最後第三個重要的性質來自(Apostol, 1975, p269)：

逐項積分法：令$\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$為I在區間I的Lebesgue可積分函數序列使得$\sum_{n=0}^{\infty}\int_I|g_n|$收斂，則$\int_I\sum_{n=0}^{\infty}g_n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_I g_n$。

我們利用上面三個重要的性質可以推導出本文的一些結果，首先是積分$\int_0^1\frac{x^{b-1}(\ln x)^m}{1-zx^a}dx$關於複數z的冪級數表示法：

引理：假設$a>0, b>0, m, k,$皆為任意非負整數且z為複數，$|z|<1$。則積分$\int_0^1\frac{x^{b-1}(\ln x)^m}{1-zx^a}dx=(-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{m+1}}\cdot z^n$。

證明：因為a>0,b>0, $|z|<1$，且0<x<1，所以$\frac{x^{b-1}}{1-zx^a}=x^{b-1}\sum_{n=0}^{\infty}z^n x^{an}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n x^{an+b-1}$

因此 $\int_0^1\frac{x^{b-1}}{1-zx^a}dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n x^{an+b-1}\right)dx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_0^1 x^{an+b-1}dx$ (利用逐項積分法)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{an+b}\cdot z^n \tag{1}$$

由(1)式知道本定理在m=0時成立，所以可以假設$m\geq 1$。利用參數微分法和逐項微分法，(1)式等號兩邊同時對b做m次微分得到

$$\int_0^1\frac{x^{b-1}(\ln x)^m}{1-zx^a}dx=(-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{m+1}}\cdot z^n \tag{2}$$

■ ■

附註A：上面(2)式等號右邊成立的主要原因說明如下：假設k為任意固定的正整

數，a為固定的正實數且z為固定的複數，$|z|<1$。則對任意$b_0>0$，我們可以找到包含b_0的開區間$\left(\frac{b_0}{2},\frac{3b_0}{2}\right)$使得函數$g(b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{k+1}}\cdot z^n$在$\left(\frac{b_0}{2},\frac{3b_0}{2}\right)$上均勻收斂，因此利用逐項微分法得到$\frac{d}{db}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{k}}\cdot z^n\right)=(-k)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{k+1}}\cdot z^n$，對所有$b\in\left(\frac{b_0}{2},\frac{3b_0}{2}\right)$。所以對任意$b>0$，函數$h(b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{an+b}\cdot z^n$可以連續對$b$做$m$次微分。而且其微分的結果會得到$\frac{d^m}{db^m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{an+b}\cdot z^n\right)=(-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{m+1}}\cdot z^n$。

利用上面的引理可以得到本文第一個主要的結果，有關積分$\int_0^1\frac{x^{ka+b-1}(\ln x)^m}{(1-px^a)^{k+1}}dx$b如何表示成實數$P$的冪級數：

定理1：假設$a>0, b>0, p$為實數且$|p|<1$，m, k為任意非負整數。則積分

$$\int_0^1\frac{x^{ka+b-1}(\ln x)^m}{(1-px^a)^{k+1}}dx=(-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+k}{k}}{(an+ak+b)^{m+1}}\cdot p^n$$。

證明：上面(2)式中令$z=p$為實數且$|p|<1$，我們得到

$$\int_0^1\frac{x^{b-1}(\ln x)^m}{1-px^a}dx=(-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^{m+1}}\cdot p^n \tag{3}$$

利用參數微分法和逐項微分法，(3)式等號兩邊同時對p做k次微分得到

$$\int_0^1\frac{x^{ka+b-1}(\ln x)^m}{(1-px^a)^{k+1}}dx=(-1)^m m!\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\binom{n}{k}}{(an+b)^{m+1}}\cdot p^{n-k} \tag{4}$$

$$=(-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+k}{k}}{(an+ak+b)^{m+1}}\cdot p^n \tag{5}$$

■ ■

附註B：上面(4)式等號右邊成立的原因跟附註A的說明是類似的。

另一方面，(5)式中令$x=e^{-t}$，可以得到以下的結果：

推論1：和定理1相同的假設，則$\int_0^\infty \frac{t^m e^{-(ak+b)t}}{(1-pe^{-at})^{k+1}}dt = m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+k}{k}}{(an+ak+b)^{m+1}}\cdot p^n$。

其次是本文第二個主要的結果，有關積分$\int_0^1 \frac{x^b(\ln x)^m(1-x^a r\cos y)}{1-2x^a r\cos y+x^{2a}r^2}dx$如何表示成實數$y$的餘弦三角級數：

定理2：假設 $a>0, b>0$，r, y為實數且$|r|<1$，m為任意非負整數。則積分$\int_0^1 \frac{x^{b-1}(\ln x)^m(1-r\cos y\cdot x^a)}{1-2r\cos y\cdot x^a+r^2x^{2a}}dx = (-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{(an+b)^{m+1}}\cos ny$ 。

證明：在(2)式中代入$z=re^{iy}$得到

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}(\ln x)^m}{1-re^{iy}x^a}dx = (-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{iy})^n}{(an+b)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{b-1}(\ln x)^m}{1-(r\cos y+ir\sin y)x^a}dx = (-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n\cos ny+ir^n\sin ny}{(an+b)^{m+1}}$$

(利用尤拉公式和棣美弗公式)

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{b-1}(\ln x)^m[(1-r\cos y\cdot x^a)+i(r\sin y\cdot x^a)]}{(1-r\cos y\cdot x^a)^2+(r\sin y\cdot x^a)^2}dx = (-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n\cos ny+ir^n\sin ny}{(an+b)^{m+1}} \tag{6}$$

利用(6)式等號兩邊的實部相等，我們得到

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}(\ln x)^m(1-r\cos y\cdot x^a)}{1-2r\cos y\cdot x^a+r^2x^{2a}}dx = (-1)^m m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{(an+b)^{m+1}}\cos ny \tag{7}$$

■ ■

在(7)式中令$x = e^{-t}$，可以獲得以下的結果：

推論2：和定理2相同的假設，則$\int_0^\infty \frac{t^m e^{-bt}(1-r\cos y\cdot e^{-at})}{1-2r\cos y\cdot e^{-at}+r^2e^{-2at}}dt = m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{(an+b)^{m+1}}\cos ny$ 。

最後是本文第三個主要的結果，將積分$\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}(\ln x)^m}{1-2x^a r\cos y+x^{2a}r^2}dx$ 的答案寫成與實數 y的正弦三角級數相關的表示法：

定理3: 和定理2相同的假設且 $y \neq k\pi$，k為任意整數。則積分

$$\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}(\ln x)^m}{1-2r\cos y\cdot x^a+r^2x^{2a}}dx=\frac{(-1)^m m!}{\sin y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{(an+b)^{m+1}}\sin ny \text{。}$$

證明：由上面(6)式等號兩邊虛部相等可以得到本定理的結果 ■

在定理3的積分中代入 $x=e^{-t}$ 可以得到以下的推論：

推論3：和定理3相同的假設，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t^m e^{-(a+b)t}}{1-2r\cos y\cdot e^{-at}+r^2e^{-2at}}dt=$

$$\frac{m!}{\sin y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{(an+b)^{m+1}}\sin ny \text{。}$$

參、例子說明

其次我們針對上面提到的幾種類型的積分問題，舉出一些例子實際的利用本文的結果來求解：

例題1:由定理1得到積分$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{12}(\ln x)^5}{\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)^4}dx$ 的無窮級數解為$\displaystyle -120\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+3}{3}}{(2n+13)^6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ，

以下我們利用Maple算出此積分和它的無窮級數解的近似值：

```
>evalf(int(x^12*ln(x)^5/(1-x^2/3)^4,x=0..1),25);
-0.000047193323878590144481455 91
>evalf(-120*sum(product(n+3-i,i=0..2)/(3!*(2*n+13)^6)*(1/3)^n,n=0..infinity),35);
-0.000047193323878590144481455 87
```

例題2:由定理2可以得到積分$\displaystyle\int_0^1\frac{(\ln x)^7\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{5}x^{\sqrt{3}}+\frac{16}{25}x^{2\sqrt{3}}\right)}dx$的無窮級數解為

$$-5040\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^n}{(\sqrt{3}n+1/2)^8}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$，同樣利用Maple可以求出此積分及其無窮級數近似值：

```
>evalf(int(ln(x)^7*(1+2*sqrt(2)/5*x^sqrt(3))/(sqrt(x)*(1+4*sqrt(2)/5*x^sqrt(3)+16/25*x^(2*sqrt(3)))),x=0..1),20);
```

$$-1.2902353736641998632 \cdot 10^6$$

```
>evalf(-5040*sum((-4/5)^n*cos(n*Pi/4)/(sqrt(3)*n+1/2)^8,n=0..infinity),20);
```

$$-1.2902353736641998630 \cdot 10^6 + 0.I$$

上面Maple得到的答案中出現了虛數I($\sqrt{-1}$)，是因為Maple用自己內建的特殊函數計算的緣故，但因為虛數部分為0，所以是可以忽略的。

例題3： 由定理3很容易得到積分 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}(\ln x)^{10}}{1-\frac{3}{7}x^{2/3}+\frac{9}{49}x^{4/3}}dx$ 的無窮級數解為 $2419200\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}}{\left(\frac{2}{3}n+\frac{5}{6}\right)^{11}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$，以下是Maple求出此積分及其無窮級數解的近似值：

```
>evalf(int(sqrt(x)*ln(x)^10/(1-3/7*x^(2/3)+9/49*x^(4/3)),x=0..1),32);
42267.142703386342826986153379629
>evalf(2419200*sqrt(3)*sum((3/7)^(n-1)*sin(n*Pi/3)/(2/3*n+5/6)^11,n=0..infinity),32);
```

$$42267.142703386342827024789981422 + 3.4485655408344220639363222681327.10^{-17}I$$

上面Maple計算的答案中出現了虛數I，同樣是因為Maple用自己內建的特殊函數計算的緣故，但因為虛數部分非常小，所以也是可以忽略的。接著利用本文的推論以及Maple的計算可以得到以下的結果：例題4：

例題4： 利用推論1得到積分 $\int_0^{\infty}\frac{t^4e^{-19t}}{\left(1-\frac{3}{7}e^{-3t}\right)^6}dt$ 的無窮級數解為 $24\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+5}{5}}{(3n+19)^5}\left(\frac{3}{7}\right)^n$，用Maple算出其近似值大約為0.00004471749。

例題5： 利用推論2可以求出積分 $\int_0^{\infty}\frac{t^2e^{-3t}\left(1-\frac{1}{4}e^{-4t}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{-4t}+\frac{1}{4}e^{-8t}}dt$ 的無窮級數解為 $2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(4n+3)^3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cong$ 0.0752650427863。

例題6：利用推論3可以求出積分$\int_0^\infty \frac{t^6 e^{-7t}}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-5t}+\frac{1}{16}e^{-10t}}dt$的無窮級數解為
$720\sqrt{2}\cdot\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{(5n+2)^7}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cong 0.00088148491359$。

肆、結論

由以上幾個例子可以知道定理1、定理2和定理3是解決本文所探討的三種主要積分問題的理論依據，並且我們看到參數微分法、逐項微分法和逐項積分法在我們整個理論推導中扮演著重要的角色。事實上這三種方法在微分和積分問題上的應用非常廣泛，很多困難的問題利用它們都可以迎刃而解。至於Maple在一些函數積分問題上的應用可以參考(余啟輝, 2012a, 2012b, 2012c, 2012d, 2012e)。未來我們會繼續將觸角延伸到其他困難的偏微分或多重積分問題的研究上，同時利用Maple做為我們輔助解題的工具，來計算答案的近似值。

參考文獻

余啟輝(2012a, 5月)：Maple在求解兩種積分問題上的應用。第九屆服務業管理與創新學術研討會。台南市：南台科技大學。

余啟輝(2012b, 5月)：參數微分法在積分問題上的應用。2012南榮通識教育學術研討會。台南市：南榮技術學院。157-165頁。

余啟輝(2012c, 6月)：Maple 的應用－以兩種特殊的積分問題為例子。KC2012第八屆知識社群國際研討會。台北市：中國文化大學，803-811頁。

余啟輝(2012d, 6月)：Maple在一些積分問題上的應用。2012ICSSMET安全管理與工程技術國際研討會。嘉義縣：吳鳳科技大學，290-294頁。

余啟輝(2012e, 6月)：Maple在求解瑕積分問題上的應用。2012數位與科技生活創新應用學術研討會。桃園縣：創新技術學院。

賴漢卿(1979)：應用數學(高等微積分、工程數學)。台北市：文笙書局。

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical Analysis*(2nd ed.). Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Baxa, C., & Schoißengeier, J. (2002). Calculation of Improper Integrals Using (n α)-Sequences. *Monatshefte für Mathematik*, 135(4), pp. 265-277.

Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2006). *A Course in Calculus and Real Analysis.* New York： Springer Co.

Gray, H. L., & Wang, S. (1992). A New Method for Approximating Improper Integrals. *SIAM Journal on Numerical Analysis, 29*(1), pp. 271-283.

Haber, S. (1975). Adaptive Integration and Improper Integrals. *Mathematics of Computation, 29*(131), pp. 806-809.

Lang, S. (1983). *Undergraduate Analysis.* New York：Springer-Verlag.

Ponnusamy, S. (2012). *Foundations of Mathematical Analysis.* New York：Springer Co.

Widder, D. V. (1961). *Advanced Calculus*(2nd ed.). Englewood Cliffs, N. J.：Prentice-Hall, Inc.