《育達科大學報》
第 34 期，民國 102 年 4 月，第 229-240 頁
Yu Da Academic Journal
Vol.34, April 2013, pp. 229-240

無窮級數的求和問題

余啟輝*

摘要

本篇論文主要是研究八種無窮級數的求和問題。我們利用四種複數三角函數的級數展開式可以得到這八種無窮級數的答案。另一方面，我們舉出四個例子實際的求出一些無窮級數的解，並且利用數學軟體 Maple 計算這些無窮級數以及它們解的近似值。

關鍵字：無窮級數、複數三角函數、Maple

* 南榮技術學院通識教育中心助理教授

Evaluation of Infinite Series

Chii-Huei Yu *

Abstract

This paper mainly studies the evaluation of eight types of infinite series. We can obtain the answers of these eight types of infinite series by using series expansions of four complex trigonometric functions. On the other hand, we propose four examples to find the solutions of some infinite series practically, and using the mathematical software Maple to calculate the approximations of these infinite series and their solutions.

Keywords: infinite series, complex trigonometric functions, Maple

* Assistant Professor, Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology

壹、前言

在微積分和工程數學的課程裡有關無窮級數(infinite series)求和問題的研究是一項重要的課題，因為許多函數微分和積分的答案都可以用無窮級數的型式來表示，所以有關無窮級數的求和和數值計算都有其重要性。關於這方面的書籍和論文可以參考 (余啟輝，2012, 2011a, 2011b, 2011c；趙文敏，1990；Bromwich, 1957；Hardy, 1949；Knopp, 1948；Widder, 1961, chap.9)。本篇文章主要是研究八種不同類型無窮級數的求和問題，我們利用 $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\csc z$ 這四個複數三角函數(complex trigonometric functions)的級數展開式(series expansions)可以求出這八種無窮級數的答案，也就是本文四個主要的結果－定理 1, 2, 3, 4。另一方面，我們舉出四個例子實際的求出一些無窮級數的解，並且利用數學軟體 Maple 計算出這些無窮級數以及它們解的近似值。

貳、主要的結果

首先我們介紹本文中用到的符號和公式：

符號：複數 $z = a + ib$ ，其中 a, b 為實數，$i = \sqrt{-1}$ 。

公式：接著是四個複數三角函數的級數表示法，我們可以參考(葉能哲、賴漢卿，1984，pp.320-323)。以下我們都假設 z 為複數：

(i) $\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8z}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4z^2}$ ，對所有 $z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, k 為任意整數。

(ii) $\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 \pi^2 - z^2}$ ，對所有 $z \neq k\pi$, k 為任意整數。

(iii) $\sec z = 4\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2 \pi^2 - 4z^2}$ ，對所有 $z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, k 為任意整數。

(iv) $\csc z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2z}{n^2 \pi^2 - z^2}$ ，對所有 $z \neq k\pi$, k 為任意整數。

接著我們推導本文第一個主要的定理，首先我們需要一個引理：

引理 1：假設 a, b 為實數且 $(a, b) \neq \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right)$, k 為任意整數。則複數正切函數

$$\tan(a + ib) = \frac{\sin 2a}{\cosh 2b + \cos 2a} + i \frac{\sinh 2b}{\cosh 2b + \cos 2a} 。$$

證明：$\tan(a+ib) = \dfrac{\sin(a+ib)}{\cos(a+ib)}$

$$= \frac{\sin a \cdot \cosh b + i\cos a \cdot \sinh b}{\cos a \cdot \cosh b - i\sin a \cdot \sinh b}$$

$$= \frac{(\cos a \cdot \cosh b + i\sin a \cdot \sinh b)(\sin a \cdot \cosh b + i\cos a \cdot \sinh b)}{\cos^2 a \cdot \cosh^2 b + \sin^2 a \cdot \sinh^2 b}$$

$$= \frac{\sin a \cdot \cos a + i\sinh b \cdot \cosh b}{\cos^2 a \cdot \cosh^2 b + \sin^2 a \cdot \sinh^2 b}$$

$$= \frac{\sin 2a}{\cosh 2b + \cos 2a} + i\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b + \cos 2a} \qquad \blacksquare$$

定理 1：設 a, b 為實數且 $(a,b) \neq \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, 0\right)$，其中 k 為任意整數。則無窮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8a(2n+1)^2\pi^2 - 32a(a^2+b^2)}{[(2n+1)^2\pi^2 - 4(a^2-b^2)]^2 + 64a^2b^2} = \frac{\sin 2a}{\cosh 2b + \cos 2a}$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8b(2n+1)^2\pi^2 + 32b(a^2+b^2)}{[(2n+1)^2\pi^2 - 4(a^2-b^2)]^2 + 64a^2b^2} = \frac{\sinh 2b}{\cosh 2b + \cos 2a} \text{。}$$

證明：由公式(i)得到：對所有 $(a,b) \neq \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, 0\right)$ (其中 k 為任意整數)，

$$\tan(a+ib) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(a+ib)}{(2n+1)^2\pi^2 - 4(a+ib)^2} \text{。}$$

利用引理 1 可以獲得

$$\frac{\sin 2a}{\cosh 2b + \cos 2a} + i\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b + \cos 2a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(a+ib)}{[(2n+1)^2\pi^2 - 4(a^2-b^2)] - i(8ab)} \tag{1}$$

由(1)式等號兩邊實部和虛部分別相等，我們得到無窮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8a(2n+1)^2\pi^2 - 32a(a^2+b^2)}{[(2n+1)^2\pi^2 - 4(a^2-b^2)]^2 + 64a^2b^2} = \frac{\sin 2a}{\cosh 2b + \cos 2a}$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8b(2n+1)^2\pi^2 + 32b(a^2+b^2)}{[(2n+1)^2\pi^2 - 4(a^2-b^2)]^2 + 64a^2b^2} = \frac{\sinh 2b}{\cosh 2b + \cos 2a} \qquad \blacksquare$$

其次推導本文第二個主要的定理，同樣我們需要一個引理：

引理 2：假設 a,b 為實數且 $(a,b)\neq(k\pi,0)$，其中 k 為任意整數。則複數餘切函數

$$\cot(a+ib)=\frac{\sin 2a}{\cosh 2b-\cos 2a}-i\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b-\cos 2a}$$ 。

證明：$\cot(a+ib)=\dfrac{\cos(a+ib)}{\sin(a+ib)}$

$$=\frac{\cos a\cdot\cosh b-i\sin a\cdot\sinh b}{\sin a\cdot\cosh b+i\cos a\cdot\sinh b}$$

$$=\frac{(\cos a\cdot\cosh b-i\sin a\cdot\sinh b)(\sin a\cdot\cosh b-i\cos a\cdot\sinh b)}{\sin^2 a\cdot\cosh^2 b+\cos^2 a\cdot\sinh^2 b}$$

$$=\frac{\sin 2a}{\cosh 2b-\cos 2a}-i\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b-\cos 2a}$$ ■

定理 2：假設 a,b 為實數且 $(a,b)\neq(k\pi,0)$，其中 k 為任意整數。則無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(n^2\pi^2-a^2-b^2)}{(n^2\pi^2+b^2-a^2)^2+4a^2b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{\sin 2a}{\cosh 2b-\cos 2a}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(n^2\pi^2+a^2+b^2)}{(n^2\pi^2+b^2-a^2)^2+4a^2b^2}=\frac{-b}{a^2+b^2}+\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b-\cos 2a}$$ 。

證明：由公式(ii)得到：對所有$(a,b)\neq(k\pi,0)$ (其中 k 為任意整數)，

$$\cot(a+ib)=\frac{1}{a+ib}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a+ib)}{n^2\pi^2-(a+ib)^2}$$ 。

利用引理 2 我們得到

$$\frac{\sin 2a}{\cosh 2b-\cos 2a}-i\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b-\cos 2a}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a+ib)}{n^2\pi^2-(a+ib)^2} \tag{2}$$

再利用(2)式等號兩邊實部和虛部分別相等，我們獲得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(n^2\pi^2-a^2-b^2)}{(n^2\pi^2+b^2-a^2)^2+4a^2b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{\sin 2a}{\cosh 2b-\cos 2a}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(n^2\pi^2+a^2+b^2)}{(n^2\pi^2+b^2-a^2)^2+4a^2b^2}=\frac{-b}{a^2+b^2}+\frac{\sinh 2b}{\cosh 2b-\cos 2a}$$ ■

接著推導本文第三個主要的定理，同樣我們需要一個引理：

引理 3：假設 a,b 為實數且 $(a,b)\neq\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,0\right)$，其中 k 為任意整數。則複數正割函數 $\sec(a+ib)=\dfrac{2\cos a\cdot\cosh b}{\cosh 2b+\cos 2a}+i\dfrac{2\sin a\cdot\sinh b}{\cosh 2b+\cos 2a}$。

證明：

$$\begin{aligned}\sec(a+ib)&=\frac{1}{\cos(a+ib)}\\&=\frac{1}{\cos a\cdot\cosh b-i\sin a\cdot\sinh b}\\&=\frac{\cos a\cdot\cosh b+i\sin a\sinh b}{\cos^2 a\cdot\cosh^2 b+\sin^2 a\cdot\sinh^2 b}\\&=\frac{2\cos a\cdot\cosh b}{\cosh 2b+\cos 2a}+i\frac{2\sin a\cdot\sinh b}{\cosh 2b+\cos 2a}\end{aligned}$$

■

定理 3：設 a,b 為實數且 $(a,b)\neq\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,0\right)$，其中 k 為任意整數。則無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)[(2n-1)^2\pi^2-4a^2+4b^2]}{[(2n-1)^2\pi^2-4a^2+4b^2]^2+64a^2b^2}=\frac{\cos a\cdot\cosh b}{2\pi(\cosh 2b+\cos 2a)}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)ab}{[(2n-1)^2\pi^2-4a^2+4b^2]^2+64a^2b^2}=\frac{\sin a\cdot\sinh b}{16\pi(\cosh 2b+\cos 2a)}$$ 。

證明：由公式(iii)得到：對所有 $(a,b)\neq\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,0\right)$(其中 k 為任意整數)，

$$\sec(a+ib)=4\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2\pi^2-4(a+ib)^2}$$ 。

利用引理 3 我們得到

$$\frac{2\cos a\cdot\cosh b}{\cosh 2b+\cos 2a}+i\frac{2\sin a\cdot\sinh b}{\cosh 2b+\cos 2a}=4\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2\pi^2-4(a+ib)^2}\qquad(3)$$

再利用(3)式等號兩邊實部和虛部分別相等，可以獲得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)[(2n-1)^2\pi^2-4a^2+4b^2]}{[(2n-1)^2\pi^2-4a^2+4b^2]^2+64a^2b^2}=\frac{\cos a\cdot\cosh b}{2\pi(\cosh 2b+\cos 2a)}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)ab}{[(2n-1)^2\pi^2-4a^2+4b^2]^2+64a^2b^2}=\frac{\sin a\cdot\sinh b}{16\pi(\cosh 2b+\cos 2a)}$$

■

最後推導本文第四個主要的結果，同樣我們也是需要一個引理：

引理 4：假設a,b為實數且$(a,b)\neq(k\pi,0)$，其中k 為任意整數。則複數餘割函數

$$\csc(a+ib)=\frac{2\sin a\cdot\cosh b}{\cosh 2b-\cos 2a}-i\frac{2\cos a\cdot\sinh b}{\cosh 2b-\cos 2a}\text{。}$$

證明：

$$\begin{aligned}\csc(a+ib)&=\frac{1}{\sin(a+ib)}\\&=\frac{1}{\sin a\cdot\cosh b+i\cos a\cdot\sinh b}\\&=\frac{\sin a\cdot\cosh b-i\cos a\cdot\sinh b}{\sin^2 a\cdot\cosh^2 b+\cos^2 a\cdot\sinh^2 b}\\&=\frac{2\sin a\cdot\cosh b}{\cosh 2b-\cos 2a}-i\frac{2\cos a\cdot\sinh b}{\cosh 2b-\cos 2a}\end{aligned}\qquad\blacksquare$$

定 理 4：假 設 a,b 為 實 數 且 $(a,b)\neq(k\pi,0)$ ，其 中 k 為 任 意 整 數 。則 無 窮 級 數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2a(n^2\pi^2-a^2-b^2)}{(n^2\pi^2-a^2+b^2)^2+4a^2b^2}=\frac{-a}{a^2+b^2}+\frac{2\sin a\cdot\cosh b}{\cosh 2b-\cos 2a}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2b(n^2\pi^2+a^2+b^2)}{(n^2\pi^2-a^2+b^2)^2+4a^2b^2}=\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{2\cos a\cdot\sinh b}{\cosh 2b-\cos 2a}\text{。}$$

證明：由公式(iv)得到：對所有$(a,b)\neq(k\pi,0)$ (其中k 為任意整數)，

$$\csc(a+ib)=\frac{1}{a+ib}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2(a+ib)}{n^2\pi^2-(a+ib)^2}\text{。}$$

由引理 4 我們得到

$$\frac{2\sin a\cdot\cosh b}{\cosh 2b-\cos 2a}-i\frac{2\cos a\cdot\sinh b}{\cosh 2b-\cos 2a}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2(a+ib)}{n^2\pi^2-(a+ib)^2}\qquad(4)$$

利用(4)式等號兩邊實部和虛部分別相等，可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2a(n^2\pi^2-a^2-b^2)}{(n^2\pi^2-a^2+b^2)^2+4a^2b^2}=\frac{-a}{a^2+b^2}+\frac{2\sin a\cdot\cosh b}{\cosh 2b-\cos 2a}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2b(n^2\pi^2+a^2+b^2)}{(n^2\pi^2-a^2+b^2)^2+4a^2b^2}=\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{2\cos a\cdot\sinh b}{\cosh 2b-\cos 2a}\qquad\blacksquare$$

參、例子說明

以下針對本文所探討的幾種無窮級數，舉出四個例子實際的利用本文四個主要的定理來求出一些無窮級數的答案，同時我們利用 Maple 計算這些無窮級數以及它們解的近似值：

例題 1:由定理 1 可以得到無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8(2n+1)^2\pi^2-160}{[(2n+1)^2\pi^2+12]^2+256}=\frac{\sin 2}{\cosh 4+\cos 2}$，接著我們利用 Maple 算出此無窮級數以及 $\frac{\sin 2}{\cosh 4+\cos 2}$ 的近似值：

```
>evalf(sum((8*(2*n+1)^2*Pi^2-160)/(((2*n+1)^2*Pi^2+12)^2+256),n=0..infinity),16);
```

$$0.03381282607989676 + 0.\,I$$

```
>evalf(sin(2)/(cosh(4)+cos(2)),16);
```

$$0.03381282607989668$$

上面 Maple 得到的答案中出現了虛數 $I(=\sqrt{-1})$，是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的緣故，但由於虛數部分為 0，所以是可以忽略的。此外，由定理 1 可以得到另外一個無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(2n+1)^2\pi^2+832}{[(2n+1)^2\pi^2-20]^2+2304}=\frac{\sinh 4}{\cosh 4+\cos 6}$。以下利用 Maple 算出此無窮級數以及 $\frac{\sinh 4}{\cosh 4+\cos 6}$ 的近似值：

```
>evalf(sum((16*(2*n+1)^2*Pi^2+832)/(((2*n+1)^2*Pi^2-20)^2+2304),n=0..infinity),16);
```

$$0.9653858790221330 + 0.\,I$$

```
>evalf(sinh(4)/(cosh(4)+cos(6)),16);
```

$$0.9653858790221328$$

同樣是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的原因，所以上面的答案才會出現虛數 I。其次，我們研究另外一種類型的無窮級數求和問題：

例題 2:由定理 2 我們得到無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(n^2\pi^2-13)}{(n^2\pi^2+5)^2+144}=\frac{2}{13}-\frac{\sin 4}{\cosh 6-\cos 4}$，

同樣利用 Maple 算出此無窮級數以及 $\frac{2}{13}-\frac{\sin 4}{\cosh 6-\cos 4}$ 的近似值：

>evalf(sum(4*(n^2*Pi^2-13)/((n^2*Pi^2+5)^2+144),n=1..infinity),16);

0.1575858642224908

>evalf(2/13-sin(4)/(cosh(6)-cos(4)),16);

0.1575858642224908

另一方面，利用定理 2 可以求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(n^2\pi^2+17)}{(n^2\pi^2+15)^2+64}=\frac{-4}{17}+\frac{\sinh 8}{\cosh 8-\cos 2}$ 。

以下利用 Maple 算出此無窮級數和 $\frac{-4}{17}+\frac{\sinh 8}{\cosh 8-\cos 2}$ 的近似值：

>evalf(sum(8*(n^2*Pi^2+17)/((n^2*Pi^2+15)^2+64),n=1..infinity),16);

0.7644265318868724

>evalf(-4/17+sinh(8)/(cosh(8)-cos(2)),16);

0.7644265318868720

例題 3:利用定理 3 得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)[(2n-1)^2\pi^2-12]}{[(2n-1)^2\pi^2-12]^2+256}=\frac{\cos 2\cdot\cosh 1}{2\pi(\cosh 2+\cos 4)}$

。同樣利用 Maple 算出此無窮級數以及 $\frac{\cos 2\cdot\cosh 1}{2\pi(\cosh 2+\cos 4)}$ 的近似值：

>evalf(sum((-1)^(n-1)*(2*n-1)*((2*n-1)^2*Pi^2-12)/(((2*n-1)^2*Pi^2-12)^2+256),n=1..infinity),16);

$$-0.03287738018762944+3.000830686136350\cdot 10^{-20}\,\mathrm{I}$$

>evalf(cos(2)*cosh(1)/(2*Pi*(cosh(2)+cos(4))),16);

$$-0.03287738018762936$$

上面 Maple 計算得到的答案中虛數的部分很小，所以是可以忽略的。另一方面，由定理 3 也可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10\cdot(-1)^{n-1}(2n-1)}{[(2n-1)^2\pi^2-84]^2+6400}=\frac{\sin 5\cdot\sinh 2}{16\pi(\cosh 4+\cos 10)}$ 。

以下利用 Maple 算出此無窮級數以及 $\frac{\sin 5\cdot\sinh 2}{16\pi(\cosh 4+\cos 10)}$ 的近似值：

>evalf(sum(10*(-1)^(n-1)*(2*n-1)/(((2*n-1)^2*Pi^2-84)^2+6400),n=1..infinity),16);

$$-0.002613997195711750-3.010864257515594\cdot 10^{-21}\,\mathrm{I}$$

```
>evalf(sin(5)*sinh(2)/(16*Pi*(cosh(4)+cos(10))),16);
```

$$-0.002613997195711751$$

例題 4: 利用定理 4 可以求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n-1}(n^2\pi^2-20)}{(n^2\pi^2-12)^2+256}=\frac{-1}{5}+\frac{2\sin 4\cdot\cosh 2}{\cosh 4-\cos 8}$ 。

接著利用 Maple 算出兩者的近似值：

```
>evalf(sum(8*(-1)^(n-1)*(n^2*Pi^2-20)/((n^2*Pi^2-12)^2+256),n=1..infinity),16);
```

$$-0.4074209070474550+8.633176290622048\cdot 10^{-21}\,\mathrm{I}$$

```
>evalf(-1/5+2*sin(4)*cosh(2)/(cosh(4)-cos(8)),16);
```

$$-0.4074209070474552$$

此外，利用定理 4 也可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10(-1)^{n-1}(n^2\pi^2+26)}{(n^2\pi^2+24)^2+100}=\frac{5}{26}-\frac{2\cos 1\cdot\sinh 5}{\cosh 10-\cos 2}$ ，我們利用 Maple 算出此無窮級數和 $\frac{5}{26}-\frac{2\cos 1\cdot\sinh 5}{\cosh 10-\cos 2}$ 的近似值如下：

```
>evalf(sum(10*(-1)^(n-1)*(n^2*Pi^2+26)/((n^2*Pi^2+24)^2+100),n=1..infinity),16);
```

$$0.1850272413809699+7.845076368072704\cdot 10^{-21}\,\mathrm{I}$$

```
>evalf(5/26-2*cos(1)*sinh(5)/(cosh(10)-cos(2)),16);
```

$$0.1850272413809700$$

肆、結論

由上面的討論可以知道複數三角函數是建立本文四個定理的重要依據，也是求解我們所探討的八種無窮級數的主要基礎。另一方面，我們看到Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，甚至我們可以利用Maple來設計一些無窮級數的求和問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會繼續將觸角延伸到其他微積分和工程數學的問題上，並且利用Maple發展出新的方法來解決這些問題。

參考文獻

余啟輝 (2012, 11 月)。Maple 在驗證兩種無窮級數相等上的應用。SOD2012 第十屆管理學術研討會，國立勤益科技大學，MIS003。

余啟輝 (2011a, 12 月)。廣義二項式定理在無窮級數求和問題上的應用。國立屏東科技大學 100 學年度通識教育學術研討會，國立屏東科技大學，296-306 頁。

余啟輝 (2011b, 6 月)。三角級數與無窮級數的求和問題。2011 南榮通識教育學術研討會，南榮技術學院，48-57 頁。

余啟輝 (2011c, 6 月)。一些無窮級數的求和方法。2011 南榮通識教育學術研討會，南榮技術學院，58-69 頁。

葉能哲、賴漢卿 (合譯)，高木貞治 (原著) (1984)。高等微積分(解析概論)。台北市：文笙書局。

趙文敏 (1990)。無窮級數。台北市：正中書局。

Bromwich, T. J. (1957). *An Introduction to the Theory of Infinite Series* (2nd ed.). London.

Hardy, G. H. (1949). *Divergent Series*, Oxford：Oxford University Press.

Knopp, K. (1948). *Theory and Application of Infinite Series* (2nd ed.). New York：Hafner.

Widder, D. V. (1961). *Advanced Calculus*(2nd ed.). Englewood Cliffs, N. J.：Prentice-Hall, Inc.