*Journal of Da-Yeh University, Vol. 11, No. 1, pp. 9-14 (2002)*

# 對方形小孔徑近場繞射光強度分布函數之計算

楊國輝*　黃宏彥*　韓　斌**　劉昌杰**
*中州技術學院電子工程學系
彰化縣員林鎮山腳路 3 段 2 巷 6 號
**大葉大學電機工程學系
彰化縣大村鄉山腳路 112 號

## 摘　要

本文提出詳細計算於單色光均勻照射下, 方形小孔徑在 Fresnel 近場繞射中光強度分布函數之新的演算法, 並以新的計算方式比對在同條件下 Fraunhofer 遠場繞射因孔徑因素而衍生之像差問題。

**關鍵詞**：單色光, 遠場繞射, 近場繞射, 像差

# A Study of An Intensity Distribution Algorithm for Rectangular Aperture Near-Field Diffraction

GWO-HUEI YANG*, HONE-ENE HWANG*, PIN HAN** and CHENG-CHIEH LIU**
**Department of Electronic Engineering, Chung Chou Institute of Technology*
*6, Lane 2, Sec. 3, Shan-Jiau Rd, Yuan-lin, Taiwan*
***Department of Electrical Engineering, Da Yeh University*
*112 Shan-Jiau Rd, Da-Tsuen, Changhua, Taiwan*

## ABSTRACT

This study develops new explicit calculation methods concerning the distribution function of the light intensity of a rectangular aperture within a Fresnel near-field diffraction under monochromatic light illumination and makes some comparisons with the problems with the image aberration of Fraunhofer far-field diffraction due to the aperture factor.

***Key Words*****:** monochromatic light, far-field diffraction, near-field diffraction, image aberration

## 一、前言

小孔成像在光學信號處理上被廣泛的應用, 如小孔徑陣列相機 [6] 及圖像處理等 [3], 因為其具有長景深及寬頻寬（從可見光到 x-ray 及 γ -ray）[5] 之特性, 特別是對 x-ray 及紅外線波長, 因為缺少適當之成像元件, 所以小孔徑成像便具有獨特之優勢地位。而以往在探討方形小孔徑（rectangular aperture）投影成像上之問題時, 雖對其近、遠場繞射均有推導 [4], 然因遠場繞射之數學推導較為簡易, 所以一般應用上大多採用遠場繞射的結果作為參考之依據, 而主要也是因為近場繞射之數學推導則甚為繁雜, 且在計算分析上常使用 Fresnel integral 之數值查表法或用 Cornu's spiral 以獲得數據上之結果 [4], 甚為不便, 且不俱整體性, 所以以往對其近場繞射並未有進一步之研究, 換言之對此種小孔徑成像因近場繞射所生像差干擾問題之解決均未有提及 [4], 本文特別把近場繞射之 Fresnel integral 做詳細推導, 把從近場到遠場繞射範圍做整體性的結合, 精確計算指出像差形成之原因及解決之方法, 結論不僅提出創新的推導計算與事實印證可行性外, 並對小孔徑方形陣列成像 [2] 之像差問題上導引出更精確的參考依據。

## 二、理論

考慮單色光入射至屏上的一個方形小孔, 中心位置在 O（0,0,0）, 孔徑大小為 2a×2a, 在小孔邊上一點 D（ζ, η ,0）, 當孔徑不是甚小或成像位置不夠遠時, 光的均強性便出現問題, 也就是光經 D 點位置和光經 $\overrightarrow{P_oP_i}$ 方向之光程差, 就必須納入考慮而不可忽略, pinhole 之效果便不佳, 於是不論是處在近或遠場, 均可視為是 Fresnel 近似來討論。假設光由 $P_o$（$x'_0,y'_0,z'_0$）出發經方形小孔徑（2a×2a）至 $P_i$（$x_i,y_i,z_i$）, 如圖 1 所示。

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$\lambda$ ：光波波長

$x_o, y_o$：孔徑平面上之變數

$x_i, y_i$：成像平面上之變數

又　$f_x = x_i/\lambda z_i$；$f_y = y_i/\lambda z_i$

由文獻 [4] 得方形孔徑近場繞射光場分布：$U(x_i, y_i)$

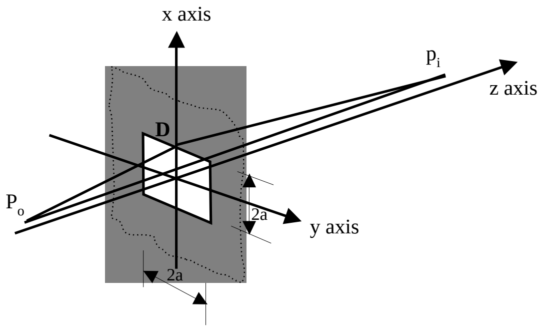


**圖 1. 方形小孔徑繞射之幾何結構圖**

$$U(x_i,y_i)$$
$$=\frac{1}{\lambda z_i}\exp[jk(z_i+\frac{{x_i}^2+{y_i}^2}{2z_i})]$$
$$\times\int\int_{-a}^{a}\exp[j\frac{\pi}{\lambda z_i}({x_o}^2+{y_o}^2)-j2\pi(f_x x_o+f_y y_o)]dx_o dy_o$$
$$=\frac{1}{\lambda z_i}\exp(jk(z_i+\frac{{x_i}^2+{y_i}^2}{2z_i})-j\lambda z_i(f_x^2+f_y^2)]$$
$$\times\int\int_{-a}^{a}\exp\{j\frac{\pi}{\lambda z_i}(x_o+f_x\lambda z_i)^2+(y_o-f_y\lambda z_i)^2]\}dx_o dy_o \qquad (1)$$

變數變換,

設 $\frac{2}{\lambda z_i}(x_o-f_x\lambda z_i)^2=\xi^2$, $\frac{2}{\lambda z_i}(y_o-f_y\lambda z_i)^2=\eta^2$ 帶入（1）：

$$U(x_i,y_i)$$
$$=\frac{e^{jkz_i}}{2j}\times\int_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a+x_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a-x_i)}e^{\frac{j\pi\xi^2}{2}}d\xi\times\int_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a+y_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a-y_i)}e^{\frac{j\pi\eta^2}{2}}d\eta \qquad (2)$$

Taylor series 展開公式得

$$e^{\frac{j\pi\xi^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot\xi^n=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{j^m\cdot\xi^{2m}}{m!}\cdot(\frac{\pi}{2})^m \qquad (3)$$

$$e^{\frac{j\pi\eta^2}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\cdot\eta^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n\cdot\eta^{2n}}{n!}\cdot(\frac{\pi}{2})^n \qquad (4)$$

（3）（4）帶入（2）

$$U(x_i,y_i)$$

$$=\frac{e^{jkz_i}}{2j}\times\int_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a+x_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a-x_i)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{j^m\cdot\xi^{2m}}{m!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^m d\xi$$

$$\times\int_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a+y_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a-y_i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n\cdot\eta^{2n}}{n!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^n d\eta$$

$$=\frac{e^{jkz_i}}{2j}\times\left\{\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{j^m\cdot\xi^{2m+1}}{(2m+1)\cdot m!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\right]\Bigg|_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a+x_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a-x_i)}\right\}$$

$$\times\left\{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n\cdot\eta^{2n+1}}{(2n+1)n!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]\Bigg|_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a+y_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a-y_i)}\right\}$$

$$=\frac{e^{jkz_i}}{2j}\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{j^m\cdot[(a-x_i)^{2m+1}+(a+x_i)^{2m+1}]}{(2m+1)\cdot m!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\cdot\left(\sqrt{2/\lambda z_i}\right)^{2m+1}\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n\cdot[(a-y_i)^{2n+1}+(a+y_i)^{2n+1}]}{(2n+1)\cdot n!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\cdot\left(\sqrt{2/\lambda z_i}\right)^{2n+1}\right\}\qquad(5)$$

由（5）式知 $\frac{2a^2}{\lambda z_i}=Num$，詳細計算當 Num≧1 時（已經進入 fresnel region），像差現象便嚴重出現；也就是說，近、遠場之界定並非只是 $z_i$ 之遠近大小單一決定而已，而是孔徑大小 a、λ、$z_i$ 三者相對比較值來決定的。本文不僅提出比文獻 [4] 更方便使用之數學推導結果，並藉此推導結果計算出一些實用的參考依據，如圖 2、3。

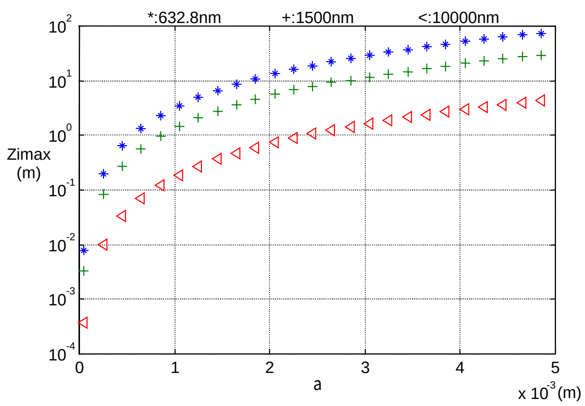


**圖 2. 針對可見光、近遠紅外光（632.8nm、1500nm、10000nm）三波長，計算對每個不同的小孔徑 2a×2a 值，其開始發生像差的最遠距離 Zimax 值**

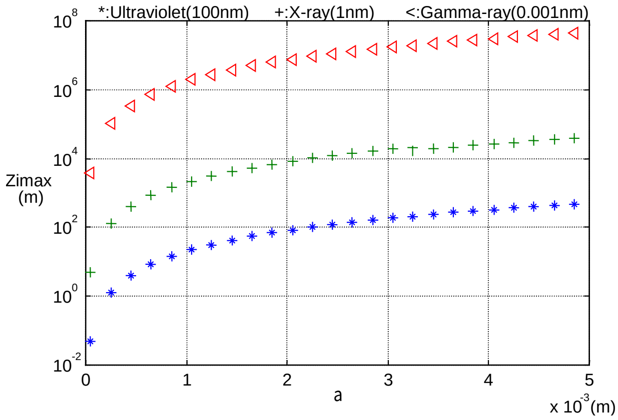


**圖 3. 針對紫外光、x-ray、Gamma-ray（100nm、1nm、0.001nm）三波長，計算對每個不同的小孔徑 2a×2a 值，其開始發生像差的最遠距離 Zimax 值**

## 三、計算結果、分析、比較

針對（5）式取 a=0.0005m，配合取不同之 Num 值，詳細計算之結果如圖 4、5 所示；另取 a=0.00025m，配合取不同之 Num 值，詳細計算之結果如圖 6、7 所示；再取 a=0.0001m，配合取不同之 Num 值，詳細計算之結果如圖 8、9 所示，由圖中看出像差出現之時機，可容易的由 Num 值掌握。

如對於 He-Ne 雷射波長 λ=632.8nm，取 a=0.0005m，則距離 $z_i$=90cm 時，如圖 4-(a) 顯示尚無像差出現，但當進入距離 $z_i$=70cm 時，像差之問題便開始嚴重如圖 4-(b) 所示，更甚者如圖 4-(c) 及 4-(d) 所示，僅能在成像處看到鑑別率極差之光斑，圖 10 各圖為圖 4 中各圖所對應之光成像圖案。

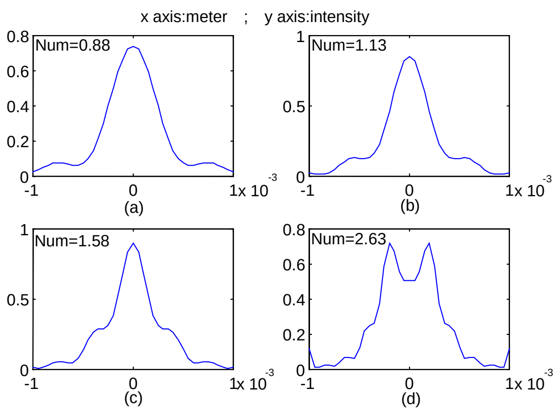


**圖 4. 取 λ=632.8nm，a=0.0005m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖**

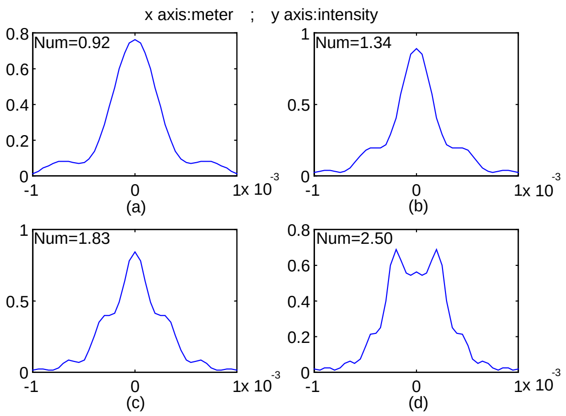


圖 5.  取λ=248nm,  a=0.0005m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖

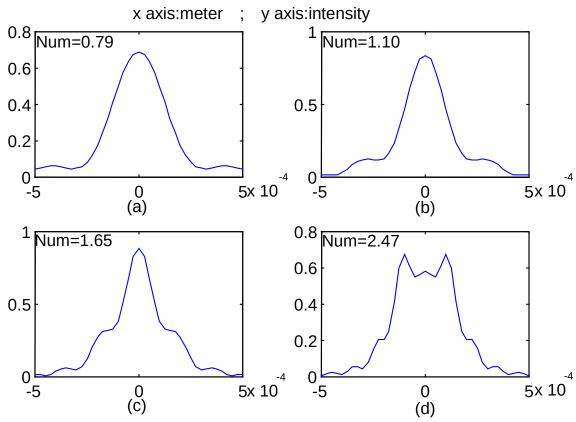


圖 6.  取λ=632.8nm,  a=0.00025m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖

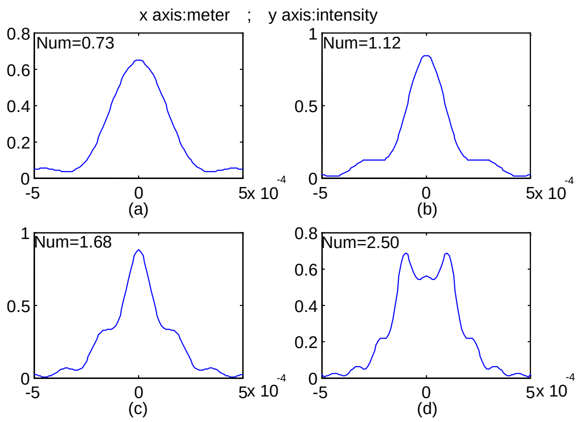


圖 7.  取λ=248nm,  a=0.00025m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖

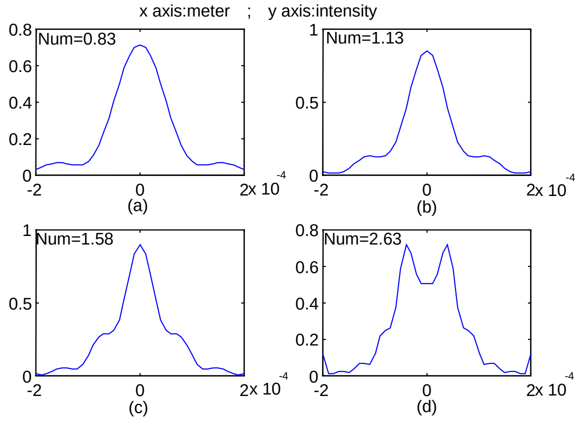


圖 8.  取λ=632.8nm,  a=0.0001m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖

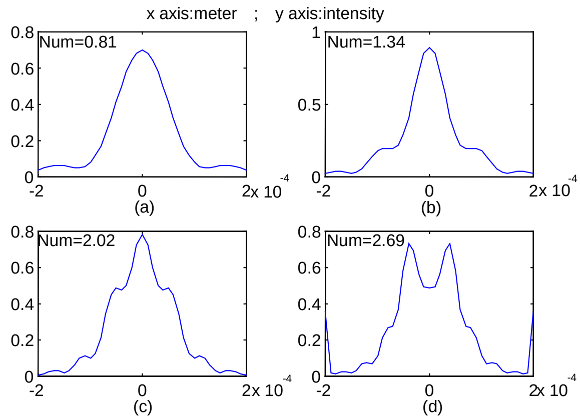


圖 9.  取λ=248nm,  a=0.0001m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖

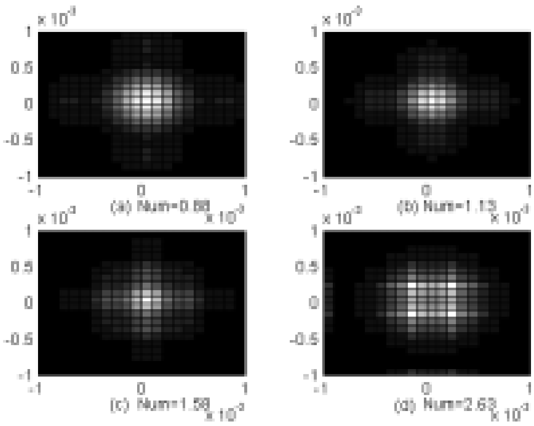

圖 10.  取λ=632.8nm,  a=0.0005m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖

而對於相同波長下，取 a=0.00025m，則距離 $z_i$=25cm 時，如圖 6-(a) 顯示尚無像差出現，但當進入距離 $z_i$=18cm 時，像差之問題便開始嚴重如圖 6-(b) 所示，更甚者如圖 6-(c) 及 6-(d) 所示，也僅能在成像處看到鑑別率極差之光斑，圖 11 各圖為圖 6 中各圖所對應之光成像圖案。

再對於相同波長下，取 a=0.0001m，則距離 $z_i$=4cm 時，如圖 8-(a) 顯示尚無像差出現，但當進入距離 $z_i$=2.8cm 時，像差之問題便開始嚴重如圖 8-(b) 所示，更甚者如圖 8-(c) 及 8-(d) 所示，也僅能在成像處看到鑑別率極差之光斑，圖 12 各圖為圖 8 中各圖所對應之光成像圖案。

如對於深紫外準分子雷射波長λ=248nm，取 a=0.0005m，則距離 $z_i$=220cm 時，如圖 5-(a) 顯示尚無像差出現，但當進入距離 $z_i$=150cm 時，像差之問題便開始嚴重如圖 5-(b) 所示，更甚者如圖 5-(c) 及 5-(d) 所示，僅能在成像處看到鑑別率極差之光斑，圖 13 各圖為圖 5 中各圖所對應之光成像圖案。

而對於相同波長下，取 a=0.00025m，則距離 $z_i$=70cm 時，如圖 7-(a) 顯示尚無像差出現，但當進入距離 $z_i$=45cm 時，像差之問題便開始嚴重如圖 7-(b) 所示，更甚者如圖 7-(c) 及 7-(d) 所示，也僅能在成像處看到鑑別率極差之光斑，圖 14 各圖為圖 7 中各圖所對應之光成像圖案。

再對於相同波長下，取 a=0.0001m，則距離 $z_i$=10cm 時，如圖 9-(a) 顯示尚無像差出現，但當進入距離 $z_i$=6cm 時，像差之問題便開始嚴重如圖 9-(b) 所示，更甚者如圖 9-(c) 及 9-(d) 所示，也僅能在成像處看到鑑別率極差之光斑，圖 15 各圖為圖 9 中各圖所對應之光成像圖案。

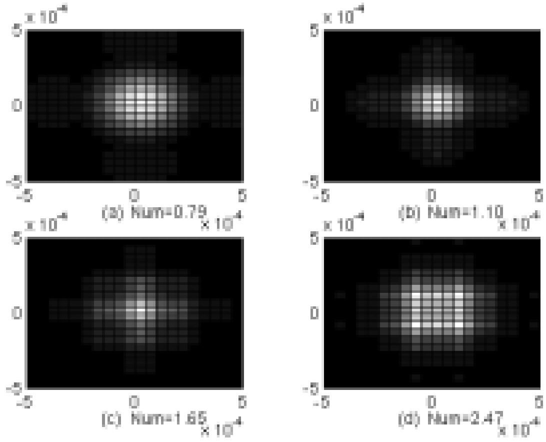


**圖 11. 取λ=632.8nm，a=0.00025m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖**

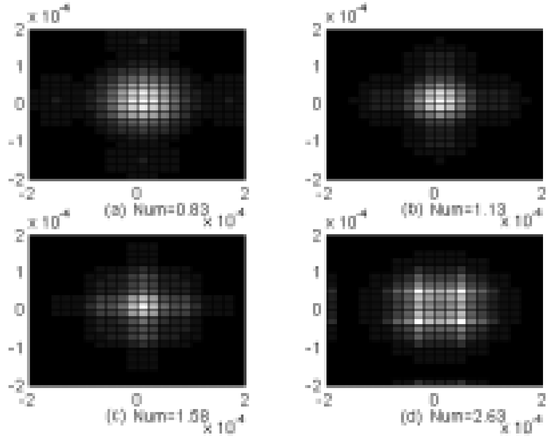


**圖 12. 取λ=632.8nm，a=0.0001m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖**

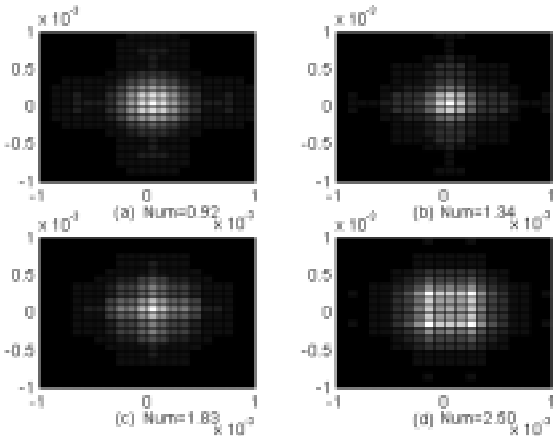


**圖 13. 取λ=248nm，a=0.0005m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖**

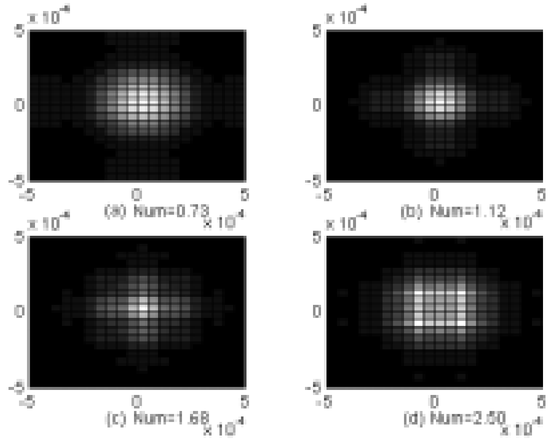


**圖 14. 取λ=248nm，a=0.00025m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈**

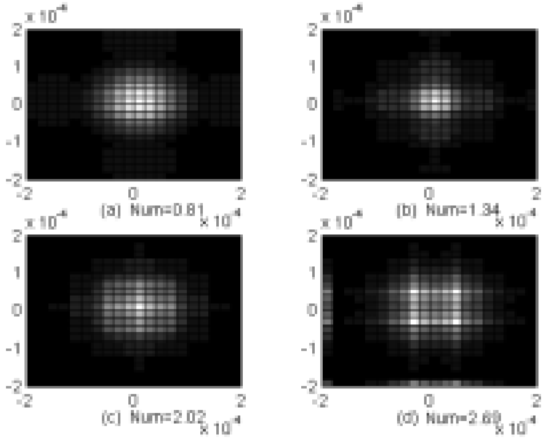


**圖 15. 取λ=248nm，a=0.0001m 對不同 Num 值之近遠場繞射光場分佈圖**

本文經計算又得圖 2 及 3，其為橫坐標表示半孔徑 a 之大小，縱坐標表示對於不同之 a 值開始發生像差的最遠距離 Zimax，也就是說如果要得到沒有像差之影像，成像距離至少必須大於 Zimax，否則成像會因為愈進入近場範圍內，所生之干擾會愈嚴重，且干擾之頻率也愈大，中心點之亮暗表現也會有一定之規則 [1]。

## 四、結論

由以上之結果看出，對於方形小孔徑成像之像差問題，本文確實提出更嚴謹之分析及精確之解決方法；近、遠場之界定並非只是 $z_i$ 之遠近大小單一決定而已，而是孔徑大小 a、光波波長λ、孔徑至成像平面距離 $z_i$ 三者相對比較值來決定的，也就是說當λ、$z_i$ 均固定下，孔徑大小 a 由小變大，繞射就可從無像差之遠場到有像差之近場範圍；本文推出之 Num 值，亦可延伸至小孔徑方形陣列成像之應用上 [2]，本文之結果也相對給予在像差之問題上，其在設計光罩時孔距及陣列面積大小上之考量，尤其對於需要高品質成像之場合及不能用普通光學成像之系統 [3,5,6]，均具有指標意義。

## 參考文獻

1. 黃宏彥、楊國輝、韓斌（民 90），方形小孔徑近場繞射光強度分布之研究，第十六屆全國技術及職業教育研討會，工業類，電子組論文集，頁 91-100。
2. 隋成華（民 83），小孔陣列遠場衍射光強分布，中國激光，21(8)，頁 673-677。
3. Fenimore, E. E. (1978) Coded aperture imaging: predicted performance of uniformly redundant arrays. *Applied Optics*, 17(22), 3562-3570.
4. Keigo, I. (1983) *Engineering Optics*, 2nd Ed., 64. Kyoritsu Shuppan Co., Tokyo.
5. Kumar, A. S. and R. M. Vasu (1987) Generation of optimum random pinhole arrays for multiple imaging. *Applied Optics*, 26(18), 3858-3859.
6. Newman, P. A. and V. E. Rible (1966) Pinhole array camera for integrated circuits. *Applied Optics*, 5(7), 1225-1227.

**收件：90.03.07　修正：90.05.04　接受：90.05.15**