

磁浮懸吊系統強健模糊控制器之分析及設計

陳昭雄 王茂祥

大葉大學機械與自動化工程學系

彰化縣大村鄉山腳路 112 號

摘要

磁浮懸吊系統是藉由控制電磁鐵所產生的電磁力來使受控體被吸引且定位於所需位置，然而此系統之電流與電磁力間是屬於非線性變化的關係，且所建立之數學模型與真實之物理系統往往存在著不確定性之差異，所以控制時必須克服系統之非線性與不確定性對控制系統之干擾。本文提出一種新的強健性模糊控制器的設計方法，用於解決非線性不確定系統的控制問題。首先，分析一乘一和 (product-sum) 形式模糊控制器的輸入與輸出行為，從結果顯示這種形式模糊控制器的輸出會近似於一增益隨狀態位置改變之狀態回授控制器，應用 H-inf 控制的設計技巧，我們提出一種具有系統化之模糊控制器的分析及設計方法，以確保受控系統之強健穩定控制，甚至是整個控制系統之性能，雖然受到系統非線性不確定性動態之干擾，透過模糊控制器參數之調整，可使此干擾對系統產生之誤差，限制在一預定之範圍內。最後，應用所提出的模糊控制器於真實磁浮懸吊系統之控制，以驗證本文所提方法之有效性。

關鍵詞：模糊控制，非線性系統，磁浮懸吊系統

Analysis and Design of a Robust Fuzzy Controller for a Magnetic Levitation Suspension System

CHAIIO-SHIUNG CHEN and MOU-CHANG WANG

Department of Mechanical and Automation Engineering, Da-Yeh University

112 Shan-Jiau Rd., Da-Tsuen, Changhua, Taiwan

ABSTRACT

This paper presents a new design method for fuzzy controllers to achieve H-inf optimal performance for a class of uncertain nonlinear systems. First, the dynamic behavior of a Product-Sum type fuzzy controller is analyzed, and the result reveals that this type of fuzzy controller behaves approximately like a state-space feedback controller with non-constant feedback gains, which are dependent on input signals. Based on the H-inf control design technique, a systematic analysis and design of the fuzzy controller is presented for guaranteeing stability, or even performance. Finally, the fuzzy controller is applied to a magnetic levitation system to confirm the validity of the controller.

Key Words: fuzzy control, nonlinear system, magnetic levitation suspension system



一、前言

磁浮是以非機械式接觸之方式運用電磁力將物體懸浮在空氣中的一種技術，其主要特點在於非機械式之接觸、無摩擦、無噪音、可在液態及真空特殊環境下工作，這些優點使得它有廣泛的應用在磁浮列車、磁浮軸承、磁浮平台、無塵室及磁浮風洞等。在產業界中，半導體廠中就必須運用磁浮技術來降低因搬運物件過程中產生的微粒量。而在交通運輸方面，磁浮系統為非接觸式的設計，故無車輪摩擦的問題，可以使能量耗損的問題降至最低，使得列車在行駛時能擁有高速的加速性，同時也能加長運輸工具的使用壽命。在風洞實驗中，利用非機械接觸式的電磁力解決了傳統機械式支撐物在實驗中干擾受測模型附近流場的問題，經由準確的位置控制對於改變受測模型在風洞中的姿態，也能變得更為方便。

磁浮系統電磁力的產生是由輸入電流經線圈感應出磁場，所以可利用電流的變化來改變電磁力的大小，但是電流與電磁力之間的關係是屬於非線性變化，且所建立之數學模型與真實之物理系統往往存在著不確定性之差異，所以控制時必須克服系統之非線性與不確定性對控制系統之干擾。模糊邏輯控制 (fuzzy logic control) 是以知識為基礎的控制策略，所有的控制規則是建構在專家的知識或是操作員的經驗，通常來說，模糊控制器對於無法用數學方法精確描述及無法建立模型的受控體或含有不確定性的受控體非常適合，然而建立模糊規則的方式一般是很主觀的，模糊控制器的設計會因設計人員的經驗、學識甚至觀點的不同，就算是針對同一控制目的都會有不同的設計結果，雖然模糊控制器擁有許多真實成功的應用案例，但是發展一有系統性分析及設計模糊控制器的分法，以確保控制系統基本動態特性如穩定性及強健性，至今仍是一待解之問題。

在過去的幾年當中有許多作者研究非線性系統的模糊控制。Maliki 等人 [7] 展示了類似傳統 PD 控制器的 Fuzzy PD 控制器及採用小增益 (small gains) 的理論做出全域穩定的分析。Ollero 等人 [8] 使用一種稱為靈敏度索引 (sensitivity indices) 的方法去改善模糊控制系統的動態行為及強健性。Kang 等人 [6] 使用多變數圓準則 (multivariable circle criterion) 去分析模糊迴授線性化調整器的強健穩定性。Choi 等人 [4] 提出單一輸入模糊邏輯控制器 (single-input FLC)，並使用 “Popov Criterion” 證明可達到絕對穩定。在 [12] 文中，提出如果每一個模糊控制器

之模糊規則對應到每一獨立的子系統是李亞普諾夫方式穩定 (in the sense of Lyapunov)，則整個模糊控制系統也能以李亞普諾夫方式穩定。Chen 及 Chen [3] 提出將狀態空間分割成小部份之模糊空間，並且對每一個分割的模糊空間選擇適當的模糊規則來保證控制系統的穩定，然而對於高階的系統，狀態空間切割的方式變的繁雜，所以在設計的程序上會變得很耗時間。

在多種的模糊控制器推論方法中，最大-最小 (min-max) 及乘-和 (product-sum) 是兩種較常用的方法，因為他們能滿足許多直覺的標準。尤其乘-和模型有非常好的執行效果而且也是很容易用硬體系統來實現，因此，在本篇論文中，我們將分析乘-和形式的模糊控制器。近 10 年來，H-inf 最佳化控制理論已被發展出來且大量運用在探討強健穩定性及干擾排除的問題 [10]，本篇論文以 H-inf 控制理論為基礎，應用於強健性模糊控制器的系統化設計，使傳統具有不確定性的非線性動態系統能達到 H-inf 最佳化的執行效果，依本文所提模糊控制器設計方式，可將控制系統因系統的非線性效應所產生的誤差，壓制在預先設定的範圍。

二、磁浮懸吊系統之分析

磁浮懸吊系統其架構如圖 1 所示 [1]，其特性是從外部輸入電流至線圈，利用電磁效應原理經由矽鋼片產生電磁力，以吸引懸浮鐵片，本節將以磁路模型來分析直流電磁鐵，在分析前先設定以下的假設：

1. 磁通密度與磁場強度之間的關係為沒有磁滯及飽和現象，也就是兩者間的變化是線性的關係。
2. 電磁鐵的導磁係數 (permeability) 為無限大，且忽略空氣氣隙的邊緣效應 (field fringing)。
3. 在電磁鐵中的渦電流 (eddy current) 效應可忽略，且為無能量損失之系統。

從圖 1 中可推導出電磁鐵兩側邊的磁阻 R_s 及電磁鐵中心的磁阻 R_c 為

$$R_s = \frac{L_1}{\mu_0 \mu_r A_1} + \frac{L_2}{\mu_0 \mu_r A_2} + \frac{x}{\mu_0 A_1} + \frac{L_m}{\mu_0 \mu_r A_m} \quad (1)$$

$$R_c = \frac{L_c}{\mu_0 \mu_r A_c} + \frac{x}{\mu_0 A_c} \quad (2)$$

其中 μ_0 為真空導磁係數、 μ_r 為鐵心及懸浮物之相對導磁係數、 L_1 , L_c , L_2 為鐵心磁路的有效長度、 L_m 為懸浮物磁路的有



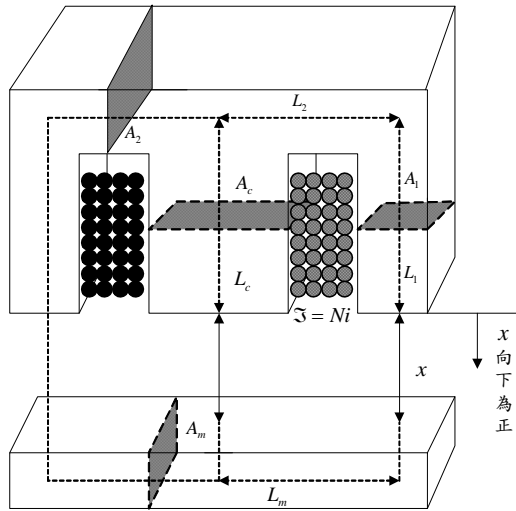


圖 1. 磁浮懸吊系統示意圖

效長度、 A_1 , A_2 , A_c 為鐵心的截面積、 A_m 為懸浮物的截面積和 x 為氣隙長度。所以總磁阻 R_T 為

$$R_T = R_c + \frac{1}{2}R_s = r_{corp} + r_{gap}x \quad (3)$$

其中 r_{corp} 為 R_T 中不含有 x 項的係數

$$r_{corp} = \frac{L_1}{\mu_0\mu_r A_1} + \frac{L_2}{\mu_0\mu_r A_2} + \frac{L_c}{\mu_0\mu_r A_c} + \frac{L_m}{\mu_0\mu_r A_m} \quad (4)$$

r_{gap} 為 R_T 中含有 x 項的係數

$$r_{gap} = \frac{1}{2\mu_0 A_1} + \frac{1}{\mu_0 A_c} = \frac{1}{\mu_0 A_1} \quad (5)$$

其磁路模型之等效磁路如圖 2 所示。若直流電磁鐵中之線圈匝數為 N 和線圈電流為 i ，則磁動勢為

$$\mathfrak{S} = Ni \quad (6)$$

所以電磁鐵的磁通量為

$$\phi_c = \frac{\mathfrak{S}}{R_T} = \frac{Ni}{r_{corp} + r_{gap}x} \quad (7)$$

線圈電感量 $L(x)$ 則為

$$L(x) = \frac{N\phi_c}{i} = \frac{N^2}{r_{corp} + r_{gap}x} \quad (8)$$

由 (8) 式中可知電感 $L(x)$ 為空氣氣隙 x 的函數，也就是電

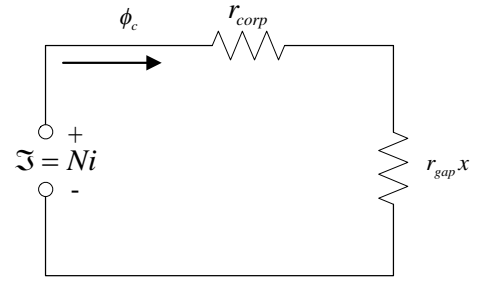


圖 2. 磁路模型之等效磁路

感的變化量與氣隙的變化有關，而電感 $L(x)$ 所儲存的能量可表示如下

$$W_f = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad (9)$$

根據電磁力對於懸浮鐵片所做的機械功等於電磁鐵在磁場中所消耗掉的儲能，因此可推得電磁力 $f_{mag}(i, x)$ 如下：

$$f_{mag}(i, x) = -\frac{dW_f}{dx} \quad (10)$$

將 (8) 式和 (9) 式代入 (10) 式可得

$$f_{mag}(i, x) = \frac{1}{2}i^2 \cdot \frac{N^2 r_{gap}}{(r_{corp} + r_{gap}x)^2} = \frac{\alpha i^2}{2(x + \beta)^2} \quad (11)$$

其中

$$\alpha = N^2 / r_{gap}, \quad \beta = r_{corp} / r_{gap} \quad (12)$$

從 (11) 式中可得知電磁力 $f_{mag}(i, x)$ 與線圈電流 i 平方成正比，與氣隙 x 的平方成反比。由圖 1 可推得磁浮懸吊系統之動態分程式如下：

$$m\ddot{x} = mG_w - f_{mag}(i, x) \quad (13)$$

其中 G_w 為地心引力常數。在操作平衡點處 (i_0, x_0) 我們假設電磁力與地心引力平衡，即

$$f_{mag}(i_0, x_0) = mG_w \quad (14)$$

令 $i = i_0 + \delta i$ 和 $x = x_0 + \delta x$ ，則可得電磁力 $f_{mag}(i, x)$ 在平衡點 (i_0, x_0) 處線性化之方程式如下：



$$f_{mag}(i, x) \overset{\Delta}{=} f_{mag}(i_0, x_0) + \frac{\partial}{\partial i} f_{mag}(i_0, x_0) \delta i + \frac{\partial}{\partial x} f_{mag}(i_0, x_0) \delta x + \Delta(i, x) \quad (15)$$

其中 $\Delta(i, x)$ 為非線性之高階項，令

$$k_i = \frac{\partial}{\partial i} f_{mag}(i_0, x_0) = \frac{\alpha i_0}{(x_0 + \beta)^2} \quad (16)$$

$$k_x = \frac{\partial}{\partial x} f_{mag}(i_0, x_0) = \frac{-\alpha i_0^2}{(x_0 + \beta)^3} \quad (17)$$

將 (14) 至 (17) 式代入 (13) 式可得

$$\delta \dot{x} = -\frac{k_i}{m} \delta i - \frac{k_x}{m} \delta x - \frac{1}{m} \Delta(i, x) \quad (18)$$

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (\delta x, \delta \dot{x})^T$ 和 $\delta i(t) = u(t)$ 則 (18) 式可改寫成狀態空間方程式形式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_x}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_i}{m} \end{bmatrix} \left(u(t) + \frac{1}{k_i} \Delta(i, x) \right) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(u(t) + b^{-1}l(\mathbf{x}, u)) \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_x}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_i}{m} \end{bmatrix}, \quad b = \frac{-k_i}{m}$$

$$l(\mathbf{x}, u) = \frac{-1}{m} \Delta(i, x) \quad (20)$$

(19) 式即稱為 “Perturbed Lure” 系統，而 $l(\mathbf{x}, u)$ 為系統非線性之高階項，同時也可能包含系統未知之不確定性與干擾，此非線性高階項樣式未知，很難用回授線性化 (feedback linearization) [9] 方式消除，其在控制時將影響系統之控制性能，甚至造成控制系統之不穩定，我們假設其在可控制的區域 $\Omega \subset R^n$ 範圍內為有限值即

$$\|l(\mathbf{x}, u)\| < \infty \quad (21)$$

底下我們將發展一有系統性之強健模糊控制器之設計方法，以壓制 $l(\mathbf{x}, u)$ 對控制系統之干擾，並使磁浮懸吊系統確保預設之控制性能。

三、乘一和型式模糊控制器之分析

如圖 3 的模糊控制系統，其中模糊控制器可視成狀態輸入 \mathbf{x} 與控制器輸出 u 間的非線性轉換。在每個狀態輸入 x_i 上設計出相對應之口語化模糊集合如圖 4 所示，其中 $\mu_{A_i^{j_i}}$ 為 $A_i^{j_i}$ 的歸屬函數、 $X_i^{j_i}$ 為歸屬函數 $\mu_{A_i^{j_i}}$ 的中心、 $j_i = -m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i$ 及 $i = 1, 2, \dots, n$ 。假如模糊規則中 IF 部分包含各所有輸入模糊集合的可能組合，則所建構之模糊規則庫將包含 $N = \prod_{i=1}^n (2m_i + 1)$ 條模糊規則，其形式如下：

$$R_c^{(j_1, \dots, j_n)} : \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^{j_1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^{j_n}, \text{ THEN } u \text{ is } B^{(j_1, \dots, j_n)}, \quad j_i = -m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

其中 $B^{(j_1, \dots, j_n)}$ 為輸出之模糊集合。在 (22) 中的每一條 IF-THEN 規則定義成 $A_1^{j_1} \times \dots \times A_n^{j_n} \rightarrow B^{(j_1, \dots, j_n)}$ 之映射，而控制器輸出經解模糊化而得單一明確值。假如使用 “Singleton” 模糊化、“Product” 模糊推論、及 “Center-Average” 的方法解模糊化，則模糊控制器之輸出如下：[11]

$$u = \frac{\sum_{j_n=-m_n}^{m_n} \dots \sum_{j_1=-m_1}^{m_1} Y^{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{j_i}}(x_i)}{\sum_{j_n=-m_n}^{m_n} \dots \sum_{j_1=-m_1}^{m_1} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{j_i}}(x_i)} \quad (23)$$

其中 $Y^{(j_1, \dots, j_n)}$ 為模糊集合 $B^{(j_1, \dots, j_n)}$ 的中心值。從 (23) 式中可以看成模糊控制器執行一個複雜從 R^n 到 R 的非線性映射。因為輸入模糊集合的歸屬函數選擇使用三角型形式，所以在任何時間都會有 2^n 條的模糊規則被觸發，其觸發總強度可證明其和為 1，即

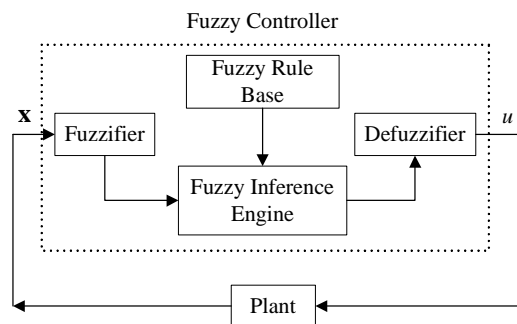
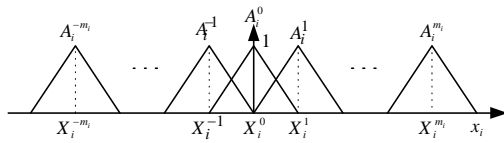


圖 3. 模糊邏輯控制系統



圖 4. 輸入模糊集合對應到 x_i 的歸屬函數

$$\sum_{j_n=-m_n}^{m_n} \cdots \sum_{j_1=-m_1}^{m_1} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{j_i}}(x_i) = 1 \quad (24)$$

因此，(23) 式可重寫如下：

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j_n=-m_n}^{m_n} \cdots \sum_{j_1=-m_1}^{m_1} Y^{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{j_i}}(x_i) \\ &= \sum_{j_n=l_n}^{l_n+1} \cdots \sum_{j_1=l_1}^{l_1+1} Y^{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{j_i}}(x_i) \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $x_i \in [X_i^{l_i}, X_i^{l_i+1}]$ 及 $i=1, 2, \dots, n$ 。假設在 (25) 式中之 $Y^{(j_1, \dots, j_n)}$ 選擇如下：

$$Y^{(j_1, \dots, j_n)} = K_1^{j_1} X_1^{j_1} + K_2^{j_2} X_2^{j_2} \cdots K_n^{j_n} X_n^{j_n} \quad (26)$$

其中 $K_i^{j_i}$, $i=1, 2, \dots, n$ 為一有限增益， $\Delta K_i^{j_i}$ 為 $K_i^{j_i}$ 及 $K_i^{j_i+1}$ 之間的變化值：

$$K_i^{j_i+1} = K_i^{j_i} + \Delta K_i^{j_i} \quad (27)$$

將 (26) 式和 (27) 式代入 (25) 式且經簡化可得 [3]

$$\begin{aligned} u &= K_n^{l_n} x_n + \cdots + K_1^{l_1} x_1 + \Delta K_n^{l_n} [x_n - \mu_{A_n^{l_n}}(x_n) X_n^{l_n}] \\ &\quad + \cdots + \Delta K_1^{l_1} [x_1 - \mu_{A_1^{l_1}}(x_1) X_1^{l_1}] \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $x_i \in [X_i^{l_i}, X_i^{l_i+1}]$ 且 $i=1, 2, \dots, n$ 。從 (28) 式中得知此模糊控制器就類似於增益隨鄰近輸入模糊集合中心 $(X_1^{l_1}, X_2^{l_2}, \dots, X_n^{l_n})^T$ 改變的狀態迴授控制器，而其相對應的迴授增益值為 $(K_1^{l_1}, K_2^{l_2}, \dots, K_n^{l_n})$ ，事實上，可以將此種控制器視為增益隨狀態位置改變的狀態迴授控制器。

四、強健模糊控制系統之設計

考慮一個型式如 (19) 式之 n 階動態系統，在本節中，我們將設計一強健模糊控制器，當在未知的非線性項 $l(\mathbf{x}, u)$ 干擾時，下述的 H-inf 最佳化執行性能指標能被滿足 [10]

$$\int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \leq \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) + \rho^2 \int_0^T l^2(\mathbf{x}, u) dt \quad (29)$$

其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ 為所給定的權重矩陣，而 ρ 為壓制係數。如果系統的初始值為 $\mathbf{x}(0)=0$ ，則 H-inf 執行效能能在 (29) 式中就可以改寫成

$$SUP_{l(\mathbf{x}, t) \in L_2[0, T]} \frac{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}}{\|l(\mathbf{x}, t)\|} \leq \rho \quad (30)$$

其中 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}} = \int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt$ 及 $\|l(\mathbf{x}, u)\| = \int_0^T l^2(\mathbf{x}, u) dt$ ，此為 L_2 增益形式；如果 $\rho = \infty$ 則表示系統誤差未被壓制。假設模糊控制器的架構與第三節所描述的相同，則模糊控制器的輸出可由 (28) 式得到。因為在 (27) 式的係數 $K_i^{j_i}$ 支配着模糊控制器的執行效能，所以我們要提出一種新的設計方針去選擇模糊控制器所適合的這些係數，以滿足 (29) 式 H-inf 最佳化性能指標要求。假設我們選擇 (27) 式的係數 $K_i^{j_i}$ 如下：

$$K_i^{j_i} = k_i + r s_i + \delta_i^{j_i} \quad (31)$$

$$j_i = -m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i \text{ and } i=1, 2, \dots, n$$

其中 k_i 及 s_i 為實數的增益值、 r 是權重因子，而 $\delta_i^{j_i}$ 為 $K_i^{j_i}$ 與相對應於 x_i 之增益平均值 $k_i + r s_i$ 間之差異值。因為 (28) 式中的 $x_i - \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) X_i^{l_i}$ 項經由觀察其值會侷限於增益值為 1 之扇形區域變動，因此令

$$x_i - \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) X_i^{l_i} = \hat{K}_i x_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (32)$$

其中 $\hat{K}_i \in [0, 1]$ 。使用 (31) 式及 (32) 式，則 (28) 式之模糊控制器輸出變成

$$\begin{aligned} u &= k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n + r(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n) \\ &\quad + (\hat{K}_1 \Delta K_1^{l_1} + \delta_1^{l_1}) x_1 + \cdots + (\hat{K}_n \Delta K_n^{l_n} + \delta_n^{l_n}) x_n \\ &= \mathbf{k} \mathbf{x} + r \mathbf{s} \mathbf{k} + u_1 \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \quad (34)$$

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T \quad (35)$$



且

$$u_1 = [\hat{K}_1(\delta_1^{l+1} - \delta_1^l) + \delta_1^l]x_1 + \dots + [\hat{K}_n(\delta_n^{l+1} - \delta_n^l) + \delta_n^l]x_n \quad (36)$$

其中 $\Delta K_i^l = \delta_i^{l+1} - \delta_i^l$ 可從 (27) 式及 (31) 式推得。將 (33) 式代入 (19) 式中，可得閉迴路之系統動態如下：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{k}\mathbf{x} + r\mathbf{s}\mathbf{x} + u_1 + l(\mathbf{x}, u)b^{-1}) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})\mathbf{x} + \mathbf{B}(r\mathbf{s}\mathbf{x} + u_1 + l(\mathbf{x}, u)b^{-1}) \end{aligned} \quad (37)$$

根據此式，我們可推導如下之定理。

定理：

對於 (19) 式的非線性不確定系統，所設計模糊控制器之輸出如 (28) 式或等效於 (33) 式，假如滿足如下之條件：

1. 選擇在 (34) 式中的增益向量 \mathbf{k} ，使得 $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}$ 為 “Hurwitz Matrix”。
2. 選擇在 (35) 式中的增益向量 \mathbf{s} 為

$$\mathbf{s} = -\mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (38)$$

其中 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ 為類 Riccati 方程式的解：

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}) + (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1) - \mathbf{P}\mathbf{B}[2r - (b\rho)^2] \mathbf{B}^T \mathbf{P} &= 0 \\ \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T > 0 \end{aligned} \quad (39)$$

3. 選擇 (31) 式中的 r 使得

$$r \geq 1/[2(b\rho)^2] \quad (40)$$

4. 選擇 (36) 式之增益偏移量滿足下式：

$$\begin{aligned} \left\| [\hat{K}_1(\delta_1^{l+1} - \delta_1^l) + \delta_1^l, \dots, \hat{K}_n(\delta_n^{l+1} - \delta_n^l) + \delta_n^l] \right\| \\ < \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1) / (2 \times \|\mathbf{P}\mathbf{B}\|) \end{aligned} \quad (41)$$

其中 $\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1)$ 為 \mathbf{Q}_1 的最小特徵值。

則在第三節中所提出之模糊控制器能滿足 (29) 式之 H-inf 性能指標要求。

證明：

選擇李亞普諾夫函數 (Lyapunov function) 如下：

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (42)$$

沿著 (37) 式的軌跡對 V 做微分，我們可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T [(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})] \mathbf{x} \\ &\quad + 2r\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{s}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}(u_1 + l(\mathbf{x}, u)b^{-1}) \end{aligned} \quad (43)$$

因為 $r \geq 1/[2(b\rho)^2]$ ，因此 (39) 式的方程式有半正定 (positive semidefinite) 的解 $\mathbf{P}^T = \mathbf{P} \geq 0$ [5]，然後運用 (38) 式至 (41) 式我們可得到以下的式子

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T [(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}) - 2r\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x} \\ &\quad + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}(u_1 + l(\mathbf{x}, u)b^{-1}) \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} - (b\rho)^{-2} \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \\ &\quad + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}(u_1 + l(\mathbf{x}, u)b^{-1}) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1) \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{P}\mathbf{B}\| \|u_1\| \|\mathbf{x}\| - \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \rho^2 l(\mathbf{x}, u)^2 \\ &\quad - [(b\rho)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^T \mathbf{x} - \rho l(\mathbf{x}, u)]^T [(b\rho)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x} - \rho l(\mathbf{x}, u)] \\ &\leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \rho^2 l(\mathbf{x}, u)^2 \end{aligned} \quad (44)$$

積分上列方程式從 $t=0$ 到 $t=T$ 可得

$$V(T) - V(0) \leq -\int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} dt + \rho^2 \int_0^T l^2(\mathbf{x}, u) dt \quad (45)$$

因為 $V(T) \geq 0$ ，所以上列的不等式就可以改寫如下：

$$\int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} dt \leq V(0) + \rho^2 \int_0^T l^2(\mathbf{x}, u) dt \quad (46)$$

從 (42) 式可得知 $V(0) = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$ ，則上列的不等式可等效於 (29) 式之性能指標。

因此，從以上的分析，本文所提之模糊控制器能確保控制系統即使在非線性不確定動態干擾下，達到 H-inf 最佳化性能要求，其設計步驟歸納如下：

步驟一：選擇適合的增益向量 \mathbf{k} 使 $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}$ 為 “Hurwitz Matrix”。

步驟二：選擇 \mathbf{Q} 、 \mathbf{Q}_1 及期望壓抑程度的 ρ 值，選擇權重因子 r 滿足 (40) 式，即 $r \geq 1/[2(b\rho)^2]$ ，以保證 (39) 式的類 Riccati 方程式的解 \mathbf{P} 為對稱的半正定。



步驟三：解 (39) 式的類 Riccati 方程式以得到 \mathbf{P} 。

步驟四：針對輸入狀態 \mathbf{x} 設計相對應之輸入模糊集合。

步驟五：從 (38) 式中計算增益向量 \mathbf{s} ，且選擇合適的 $\delta_i^{j_i}$ 使

得 (41) 式能被滿足，其中 $\hat{K}_i \in [0, 1]$ 及 $i=1, 2, \dots, n$

步驟六：由 (26) 式決定輸出模糊集合之中心值 $Y^{(j_1, \dots, j_n)}$ 如下：

$$Y^{(j_1, \dots, j_n)} = K_1^{j_1} X_1^{j_1} + K_2^{j_2} X_2^{j_2} + \dots + K_n^{j_n} X_n^{j_n}$$

$$\text{其中 } K_i^{j_i} = k_i + r s_i + \delta_i^{j_i} \text{。}$$

每條模糊規則之輸出模糊集合的中心值 $Y^{(j_1, \dots, j_n)}$ 確定後，模糊控制規則庫於是就建立了。

五、實驗與結果

圖 5 為實際之磁浮懸吊系統架構示意圖，磁浮懸吊系統本體如圖 6 所示，電磁鐵線圈及懸浮鐵片架設於壓克力製成的框架上，此電磁鐵線圈是採用線徑 0.6mm 的漆包線繞製而成，其匝數為 995 匝，最大可承受 6 安培電流，阻抗為 11 Ω ；磁浮鐵片的位置感測器我們選用歐姆龍公司型號為 E2CA-2N4F 之渦電流感測器，此位置感測器為線性電流輸出形式，感測距離從 2mm 至 12mm，當磁浮鐵片與感測頭之間的距離為 2mm 時，輸出電流為 4mA，當磁浮鐵片與感測頭之間的距離為 10mm 時，輸出電流為 20mA；而電流驅動器為微鋒公司型號 UT-80 之 PWM 電壓輸出型驅動器，其規格為最大輸出電壓 150 VDC、額定電流 6 安培和 PWM 頻率 15KHz；而為了做電流回授我們選用型號為 LA 55-P 的霍爾元件來當成電流感測器，其規格為量測範圍 0 到 70 安培

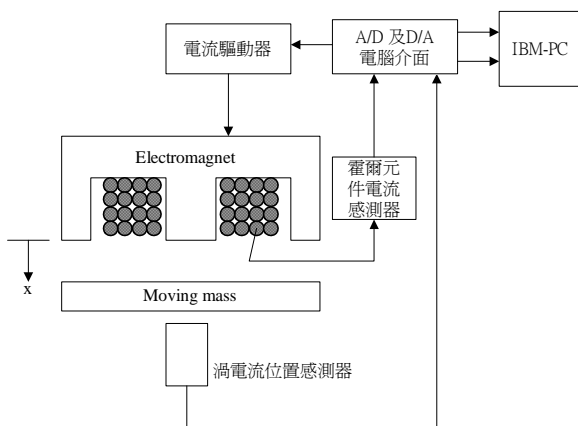


圖 5. 磁浮懸吊系統示意圖

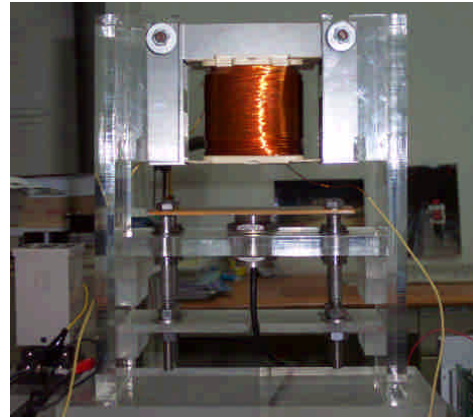


圖 6. 磁浮懸吊系統本體

、轉換率 1 : 1000、精確度 $\pm 0.9\%$ 、反應時間 500ns 和線性度 0.15%；控制器為 IBM 個人電腦 PentiumIII，介面卡選用凱俊科技公司型號 ADIO-113 之 A/D 卡及研華電子公司型號 PCL-728 之 D/A 卡，控制軟體利用 Turbob C 軟體撰寫。此磁浮懸吊系統之詳細規格如表 1 所示。磁浮鐵片重量為 1.02kg，被控制懸浮在 $x_0=0.036m$ 處，而在此操作點克服重力所需之電流為 $i_0=3.818$ 安培，將表 1 之數值代入 (16) 式和 (17) 式，可得 $k_f=-5.24$ 和 $k_x=571.2$ ，因此由 (19) 和 (20) 式可得實際磁浮懸吊系統之動態方程式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 560 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5.14 \end{bmatrix} (u(t) + 0.19\Delta(x, u)) \quad (47)$$

其中 $x_1 = \delta x = x - x_0$ ， $x_2 = \delta \dot{x} = \dot{x}$ ， $u = \delta i = i - i_0$ ，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 560 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.14 \end{bmatrix}, \quad b = -5.14$$

$$l(\mathbf{x}, u) = -0.98\Delta(\mathbf{x}, u) \quad (48)$$

表 1. 磁浮懸吊系統之規格

懸浮鐵片質量： $m=1.02kg$
線圈總電阻： $R=11\Omega$
線圈匝數： $N=995$ 匝
空氣導磁係數： $\mu_0=4\pi \times 10^{-7}$
地心引力： $G_w=9.8 m/sec^2$
x 位移量向下為，單位為公尺 (m)
$L_1=L_c=95 mm$
$L_2=L_m=68 mm$
$A_c=0.0027 m^2$
$A_1=A_2=0.00135 m^2$
$A_m=0.001 m^2$



接著以本文所提強健模糊控制器之設計步驟如下。設定輸入狀態 x_1 和 x_2 在操作點之控制範圍分別為 $-0.045m \leq x_1 \leq 0.045m$ 和 $-0.015m \leq x_2 \leq 0.015m$ ，在此控制範圍每個輸入狀態分別設計 7 個模糊集合如圖 7 及圖 8 所示，選擇 (34) 式中之增益 $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (128.4, 3.89)$ 使得

$$\mathbf{A} + \mathbf{Bk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -20 \end{bmatrix} \quad (49)$$

為 Hurwitz matrix，選擇 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$ ，並且選擇期望之壓制係數 $\rho = 0.05$ ，由 (40) 式得 $r = 7.57$ ，解 (39) 式類 Riccati 方程式的解，可得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5.25 & 0.01 \\ 0.01 & 0.0505 \end{bmatrix} \quad (50)$$

，並由 (38) 式求得增益向量 $\mathbf{S} = (s_1, s_2) = [0.0514, 0.26]$ 。
 $\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1) = 1$ ，由 (41) 式可得 $\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1) / (2 \times \|\mathbf{PB}\|) = 1 / [2 \times (0.0514 + 0.26)] = 1.6$ ，因此選擇 $\delta_i^{j_i}$ ， $i=1, 2$ 且 $j_i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ 滿足 (41) 式，結果如表 2 所示，從表 2 中我們計算 $K_i^{j_i} = k_i + r s_i + \delta_i^{j_i}$ ，結果如表 3 所示，經由 (26) 式，我們可以建構出模糊規則庫如表 4 所示，而模糊控制器解模糊後的輸出是利用 (25) 式計算。實際磁浮懸吊控制系統之方塊圖如圖 9 所示，電流回授控制次迴路我們選用 PI 控制器其值為 $100 + 10/s$ ，我們測試此次迴路性能如圖 10 所示，從圖中可看出當電流驅動器跟隨 2.5 安培電流時，其上升時間約 0.1 秒。而整個磁浮懸吊系統實驗結果如圖 11 和圖 12 所

表 2. $\delta_i^{j_i}$ 的值

j_1	$\delta_1^{j_1}$	$\delta_2^{j_2}$	j_2
-0.045	-0.8	-0.8	-0.015
-0.03	-0.6	-0.6	-0.01
-0.0015	-0.3	-0.3	-0.05
0	0	0	0
0.0015	0.3	0.3	0.05
0.03	0.6	0.6	0.01
0.045	0.8	0.8	0.015

表 3. $K_i^{j_i}$ 的值

j_1	$K_1^{j_1}$	$K_2^{j_2}$	j_2
-0.045	127.99	5.09	-0.015
-0.03	128.19	5.29	-0.01
-0.015	128.49	5.59	-0.005
0	128.79	5.89	0
0.015	129.09	6.19	0.005
0.03	129.39	6.49	0.01
0.045	129.59	6.69	0.015

表 4. 模糊規則庫

$x_1 \backslash x_2$	-0.015	-0.01	-0.005	0	0.005	0.01	0.015
-0.045	-5.8359	-5.8134	-5.7875	-5.7595	-5.7286	-5.6947	-5.6592
-0.03	-3.9221	-3.8996	-3.8737	-3.8457	-3.8148	-3.7808	-3.7453
-0.015	-2.0037	-1.9813	-1.9553	-1.9274	-1.8964	-1.8625	-1.8270
0	-0.0764	-0.0539	-0.0279	0	0.0310	0.0649	0.1004
0.015	1.8600	1.8825	1.9084	1.9364	1.9673	2.0013	2.0367
0.03	3.8053	3.8278	3.8537	3.8817	3.9126	3.9466	3.9820
0.045	5.7552	5.7777	5.8036	5.8316	5.8625	5.8964	5.9319

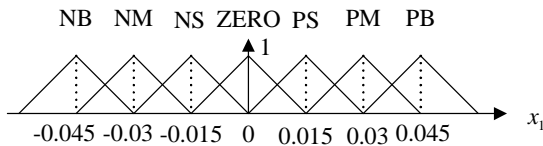


圖 7. x_1 模糊集合

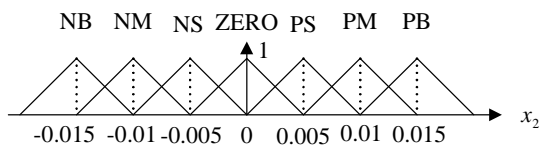


圖 8. x_2 模糊集合

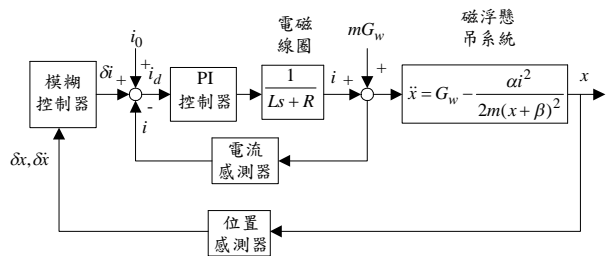


圖 9. 實際磁浮懸吊控制系統之方塊圖

示，懸浮鐵片初使位置在 40mm 處，要求被定位之位置在 36mm 處，從圖 12 所示磁浮鐵片成功被定位，定位誤差約 0.8mm，此誤差為磁浮懸吊系統不確定非線性所造成之干擾，但成功被強健模糊控制器所壓制。另外，我們做跟隨位置命令為 $36 + 1.5 \sin \pi t$ mm 之實驗，其結果如圖 13 和圖 14 所示，從這些圖中可看出雖然磁浮懸吊系統不確定非線性之



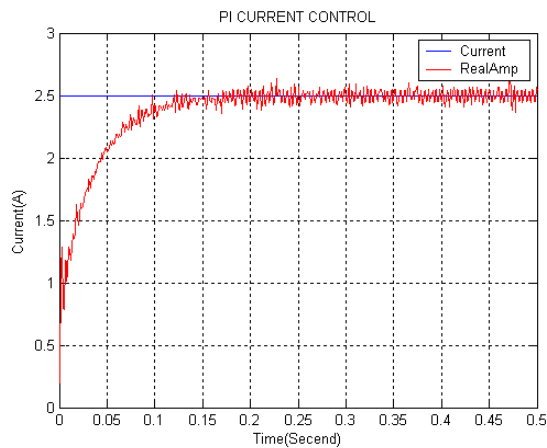


圖 10. 電流回授控制次迴路實驗

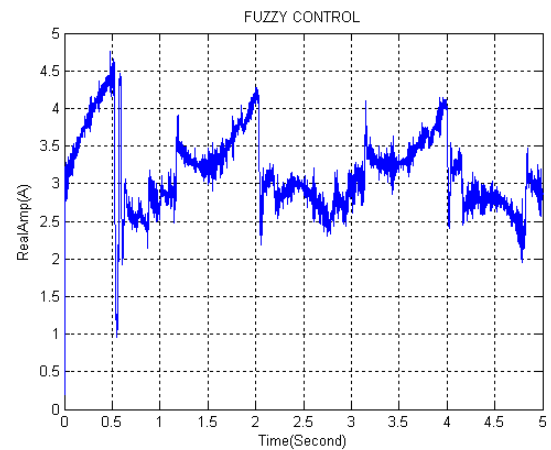


圖 13. 強健模糊控制器跟隨 sin 波輸入控制實際輸出電流

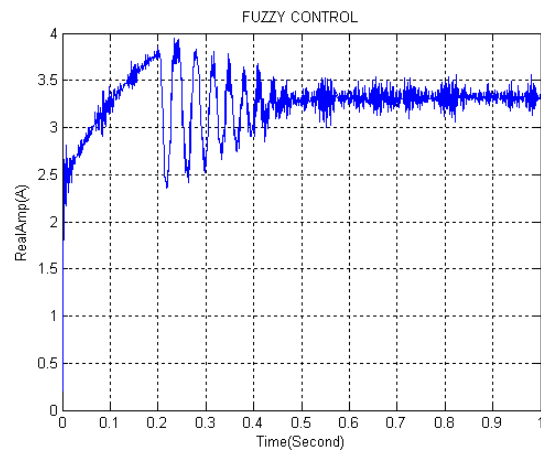


圖 11. 強健模糊控制器定位控制實際輸出電流

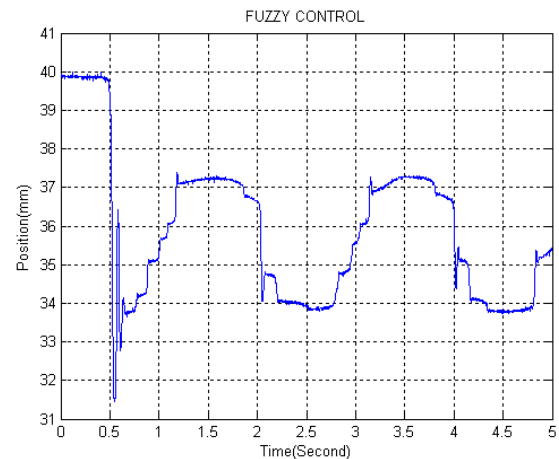


圖 14. 強健模糊控制器跟隨 sin 波輸入控制實際輸出位置

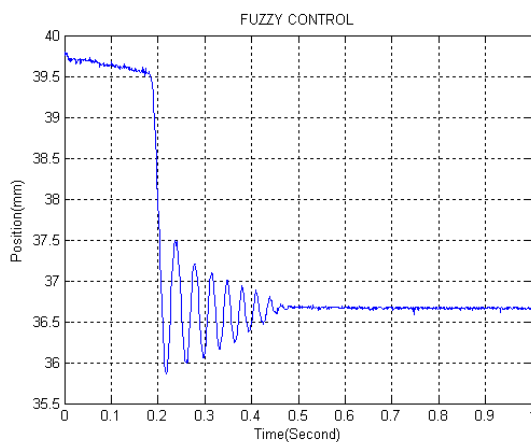


圖 12. 強健模糊控制器定位控制實際輸出位置

動態是未知的，而我們所提出之強健模糊控制器能成功壓制其對控制系統之干擾。

六、結論

在本篇論文中，我們提出一具有系統性分析和設計強健模糊控制器之方法，以解決磁浮懸吊系統控制之問題，此系統具有非線性不確定性，其會影響控制之性能，我們分析 Product-Sum 形式的模糊控制器之輸入與輸出的行為，且結果顯示這種形式的模糊控制器類似於增益隨位置改變之狀態迴授控制器。基於 H-inf 控制設計技巧，我們設計模糊控制器的參數，使此模糊控制器具備強健穩定特性，可壓制系統非線性不確定項對系統干擾所產生之誤差至預定範圍內，而達到 H-inf 最佳化之性能要求。我們以真實的磁



浮懸吊系統做實驗，結果顯示本文所提方法之有效性。

參考文獻

1. 陳政宏 (民 88)，一種新型磁浮控制系統之研究，國立成功大學電機工程學系碩士論文。
2. Anderson, B. D. O. and J. B. Moore (1990) *Optimal Control Linear Quadratic Methods*, 230-240. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. Chen, C. S. and W. L. Chen (1998) Analysis and design of a stable fuzzy control system. *Fuzzy Sets and Systems*, 96, 21-35.
4. Choi, B. J., S. W. Kwak and B. K. Kim (2000) Design and stability analysis of single-input fuzzy logic controller. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 30, 303-309.
5. Jang, J. S., C. T. Sun and E. Mizutani (1998) *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*, 125-141. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
6. Kang, H., C. Kwon, H. Lee and M. Park (1998) Robust stability analysis and design methods for the fuzzy feedback linearization regulator. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 6, 464-472.
7. Maliki, H. A., H. Li and G. Chen (1994) New design and stability analysis of fuzzy proportional -derivative control systems. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 2, 245-254.
8. Ollero, A., J. Aracil and A. Garcia-Gerezo (1995) Robust design of rule-based fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems*. 70, 249-273.
9. Slotine, J. J. and W. Li (1991), *Applied Nonlinear Control*, 221-260. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
10. Stootovgel, A. (1992) *The H^∞ Control Problem: A State Space Approach*, 105-110. Prentice-Hall, New York, NJ.
11. Wang, L. X. (1998) *Adaptive Fuzzy Systems and Control: design and analysis*, 191-201. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
12. Wong, L. K., H. F. Leung and K. S. Tam (1998) Lyapunov-function-based design of fuzzy logic controllers and its application on combining controllers. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 45, 502-509.

收件：92.07.11 修正：92.09.05 接受：92.10.31

