

## 蒙地卡羅模擬應用在裝配不良率導向的公差分析

劉大銘 鄭蕉杏

大葉大學機械與自動化工程學系

彰化縣大村鄉山腳路 112 號

### 摘要

幾何公差與統計公差分析已廣受人們所認同，發展統計方法於幾何公差分析之應用在工程上具有相當的重要性。蒙地卡羅模擬法於公差分析的使用方法為：模擬已建立標準的裝配，獲得組件的公差及機能性。此方法為基於亂數產生器的使用，模擬組件或零件製造上變異之影響，在非線性關係函數中，蒙地卡羅模擬方法特別顯得有助益。分析實例中包括兩個例子：簡單的二件裝配及二孔二銷裝配，應用最大材料條件及忽略特徵尺寸材料條件於幾何公差分析過程，以 MIL STD 105E 為最佳公差值決定之輔助工具，結論將對此兩種不同材料條件下所得結果作一比較，並將過程方法及結果應用於雙孔雙銷公差配置自動化系統之建構。

**關鍵字：**公差分析，蒙地卡羅模擬，統計方法

## Monte Carlo Simulation in the Nonconformance-Based Tolerance Analysis of a Mechanical Assembly

TA-MING LIU and JIAO-XING ZHENG

*Department of Mechanical and Automation Engineering, Da-Yeh University*

*112 Shan-Jiau Rd., Da-Tsuen, Changhua, Taiwan*

### ABSTRACT

Since geometric tolerances and statistical tolerancing are both becoming widely accepted, the ability to statistically analyze geometric tolerances has become important. Being especially good for nonlinear relationship functions, the Monte Carlo Simulation method stems from the manufacturing procedure wherein a prototype of a given assembly is built in order to test its tolerances and functionality. This method is based on the use of a random-number generator to simulate the effects of manufacturing variations on assemblies or parts. Two examples, including a two-part assembly and a two-hole and two-pin (THTP) assembly, are analyzed for tolerance. A comparison of the analytical results for the worst case, RSS (root sum square), and this statistical approach are discussed. The approach and results are applied to a THTP tolerance allocation.

**Key Words:** tolerance analysis, Monte Carlo simulation, statistical



## 一、緒論

早期因生產技術的限制，使得消費者在別無選擇下，只能採用比較不重視品質的產品，此即所謂「生產者導向」交易市場時期。近年來隨著人類在高科技技術上的不斷更新，加上電腦資訊在設計製造的相輔相成，生產技術已漸漸進步到自動化、無人化的境界，提升了製造高品質產品的能力，故整體交易市場之型態亦跟隨著改變。在消費者已有多種選擇條件下，產品的開發必須以「市場導向」為主題且達到品質第一之境界。

一般而言，產品的品質水準大約 80% 以上在設計研製階段即被決定，公差問題是影響產品品質和成本非常重要的因素。在包括機械震動、刀具磨損、夾具校正、材料內的殘留應力及人員的操作等諸多影響因素的製程中，製造出完全一樣的產品，以今日的工業技術來說尚不可能 100% 達到，況且完全一樣的產品在實際工程上並沒有其必要性。工程圖上的尺寸指定了理想的幾何大小、位置及外形，優良的設計應該是無損功能而公差又儘可能大的設計，如果對設計圖面上的尺寸賦予符合產品品質需求及加工成本之公差的變動尺寸，在製造上反而容易。

公差 (tolerance) 字起源於拉丁字 *Tolerare*，意思為接受 (endure) 或忍受 (put up with)，較緊的公差代表較精密的製造以及較高的成本，所以適當的公差選擇應視製件的機能而定。公差的研究領域大致可分為以下三類：

1. 公差分析 (tolerance analysis) 一為探討工件經裝配後其尺寸公差變動之模式，以便與規格做比較得知其符合程度及可能的不良率，一個好的公差分析模式就是能預測組件的公差能吻合實際組件公差的界限值大小，其預測的機率越大越好。
2. 公差分配 (tolerance distribution) 一若超出規格太多，造成太多的不良，或是已知最終公差的需求而要調整或設定其各零件的公差時，便對各零件依設計要求做公差分配。
3. 公差合成 (tolerance synthesis) 一公差分配過程中僅以零件功能性、製造上的難易或成本限制為前提，或者對各因素作一調合，希望滿足預定功能又容易製造，得到最經濟的製造成本目標之過程。

圖 1 為公差分析與公差合成的概念關連圖。研究已知獨立變數的累積行為稱為公差分析，國內外已存在許多相關之研究，一般在機械工程的表現方式分為幾何公差及尺寸公

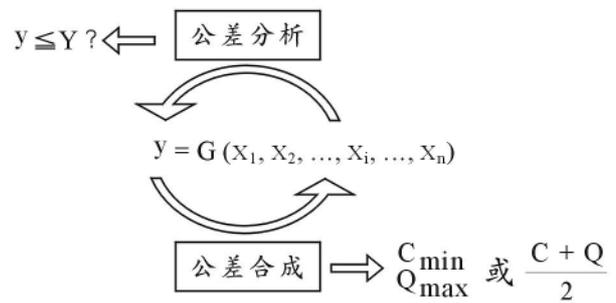


圖 1. 公差分析及合成概念圖

差，前者主要是針對工件的幾何形狀加以限制，後者主要是以一般的尺寸變動限制為主。從早期公差理論萌芽、公差表使用到今日電腦輔助公差設計發展，使得公差設計在製造工程的領域佔了一席之地。公差分析的數學模型包括最惡法公差分析 [14]、數學規劃法 [6] 及統計法公差分析 [15, 20]。Nigam [18] 介紹應用於公差分析之各種統計方法，並比較各方法在使用上的優缺點。統計法上泰勒展開法雖然較快速，但是無法求解許多非線性幾何公差問題，Nassef [16] 以同為統計法的蒙地卡羅改善此點。

蒙地卡羅模擬法 (Monte Carlo simulation, MCS) 廣泛地使用於各種公差分析中，其特點為使用亂數產生器模擬零件正式生產時之尺寸，運用此技巧於組裝模擬，使每一設定之公差介於最大值與最小值之間，再以拘束條件為限制調整各零組件之公差，求得最佳裝配公差之配置。早期的公差研究多以線性的尺寸公差為探討對象，近期則考慮到幾何公差對裝配的影響，幾何公差成為目前研究的重點。幾何公差使用上，Coon [7] 以五種幾何控制架構於相同的同心圓柱，比較不同的幾何公差應用之結果，並說明了忽略特徵尺寸 (regardless of feature size, RFS) 及最大材料條件 (maximum material condition, MMC) 對幾何公差值的影響。Shan [19] 提出新的 3D 統計公差分析方法，以雙孔雙銷簡單裝配模型為例，極座標法表示位置公差及合理的裝配測試公式，計算符合工程指定裝配的成功機率。Glancy [10] 提出結合線性規劃法及蒙地卡羅法之二階公差分析法，解決線性規劃法無法精確計算非線性幾何影響及不允許非常態分佈的輸入或輸出分佈之限制，改進蒙地卡羅模擬計算速度。

蒙地卡羅方法是一種用模擬隨機量來近似求解數學與物理問題的方法，構造簡單與可控制預期誤差為其兩大特點。在十九世紀與二十世紀初，統計問題有時就是藉助於隨



機選擇，亦即為由蒙地卡羅方法解決。由於手工模擬隨機量過程在電子計算機問世前，可說是非常不易的工作，因而此方法無法廣泛地應用。隨著計算機及運算處理器的發展，蒙地卡羅已成為十分通用的數值方法，此方法是一個產生隨機事件的過程，因為跟進行一項科學試驗的過程很類似，所以蒙地卡羅亦稱為統計試驗法。國內的研究中，周清秀 [1] 利用蒙地卡羅作最低成本的裝配公差配置設計，唯其設計僅限於尺寸公差。許旭民 [2] 以統計理論分析多軸孔配合時幾何公差及尺寸公差對組件良率的影響，將幾何誤差乘上一修正因子後與尺寸誤差合併計算，以蒙地卡羅模擬方式由零件尺寸之統計分佈參數所產生的亂數表推算其組合件之良率。本文則在裝配模擬過程考量到幾何公差不同特徵材質量之材料條件，應用此方法於裝配模擬，從產生的標準分配零件尺寸中，隨機且均勻地取出尺寸模擬值，配合裝配機能拘束條件，以滿足 MIL STD 105E 標準為目標，調整各零件之公差滿足拘束條件之限制，求得最佳裝配公差之配置值。

本文內容首先說明相關理論，包括公差理論、蒙地卡羅模擬法、特徵材質量之材料條件、關鍵工件計算及軍用標準 MIL STD 105E 抽樣使用，其次說明結合各理論所建構之裝配不良率導向公差分析系統，第四與第五節中將各舉一列來驗證並與附錄所摘述的方法及結果相比較，文中最後為結論與建議。

## 二、相關理論說明

此部份將對公差分析介面所應用到的理論、方法及步驟做詳細之介紹。

### (一) 公差理論

#### 1. 幾何公差

幾何公差也叫做現代公差 (modern tolerance)，是比傳統公差更為複雜的一種標示法，一般使用於較精確工件之容許的幾何變動設定。幾何公差之意是指工件上某一部份所允許的形狀或位置之變化量，包括管制機件外形偏離其真確外形之誤差的形狀公差及兩形態之間相關方位的位置公差。工程圖上一般都是由符號或合適的文字註解來表達，符號比文字註解來得方便並且可免除因區域相異而產生之語言溝通上的困難，此外在工程圖上使用符號表示法可以減小占用圖面的空間，幾何公差包括形狀公差及位置公差之內容如下：

(1) 形狀公差 (form tolerance) — 又可分為真直度 (straightness)、真平度 (flatness)、真圓度 (circularity/

roundness)、圓柱度 (cylindricity)、曲線輪廓度 (profile of a line) 及曲面輪廓度 (profile of a surface)。

(2) 位置公差 (position tolerance) — 又可分為平行度 (parallelism)、垂直度 (perpendicularity)、傾斜度 (angularity)、正位度 (position)、同心度 (concentricity) 及對稱度 (symmetry)。

幾何公差組成特徵控制框架 (feature control frame) 來設定曲面的位置 (position)、方向 (orientation)、形狀 (form) 和輪廓 (profile)。除了被設定的曲面位置是由尺寸決定以外，標示規格和尺寸是相互獨立的。標示規格包含幾何性質符號、公差區間型態、公差值、該特徵材質量之材料條件、參考的基準面 (datum)。框架內放置的位置為固定，尤其是參考平面依放置的先後順序具有首要、次要之意義，如圖 2 所示。

#### 2. 材料條件

材料條件使用目的為由材料條件決定偏差值，以增加幾何公差的偏差值，求得總公差值。以下僅說明與本文相關的材料條件：

(1) 最大材料條件 — 當相配合形態在其尺度大小之最大實體狀況時，亦即外形誤差或位置誤差在其容許值之最不利極限時 (軸最大，孔最小)，組合件間之隙為最小。如果相配合的兩形態 (或其中之一) 的實際尺度各遠離其最大實體極限時，其實際尺度即可超過所定的幾何公差 (形狀公差或位置公差) 之範圍，而不致妨礙組合，此即是最大實體狀況原理。最大實體狀況原理以運用於位置公差或某些形狀公差，若該形態之實際大小遠離其最大實體狀況之極限，則該指定之形狀公差或位置公差即可因而增大，此增大之量即為最大實體極限與該形態之實際大小之差，此增大之量不得超過該形態本身之尺度公差。

(2) 最小材料條件 (least material condition, LMC) — 特徵

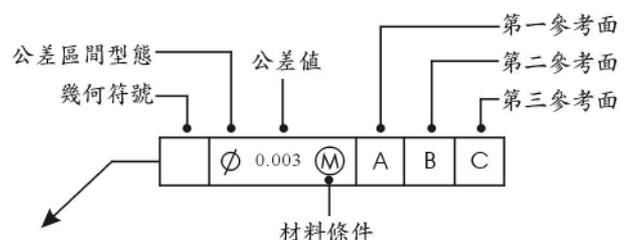


圖 2. 特徵控制框架



的尺寸位於材料的最小總值。同樣以軸與孔相配合為例，就軸徑而言，最小實體狀況為其尺寸的下限亦即最小軸；就孔而言，最小實體狀況為其尺寸的上限亦即最大孔，在此裝配條件下，組件間之間隙值最小。

- (3) 忽略特徵尺寸—此條件表示不論特徵的尺度為何，幾何公差將維持相同不變，容許定位公差區間不存在 Bonus 公差。工程圖面上假若使用了定位公差而沒有指定 LMC 或 MMC 材料條件，則量測特徵的中心必須位於指定的公差區間內，在此情況下忽略了特徵尺度，亦即配合條件和特徵的外形之間並不相關。此概念通常用於‘平衡’為重要因素之處，例如旋轉件之中心定位為影響機能之關鍵，使用 RFS 材料條件忽略製件的實際製造尺度，要求關鍵定位公差必須位在指定的公差範圍內，所以 RFS 條件為應用於彈性需求最低及較精密的加工情況時。

### 3. Bonus 公差

Bonus 公差允許公差總值為非固定值，在配合維持且機能未受損失的條件下，允許公差值的最大化使用。圖 3 以一塞子與孔的裝配例子作為說明，假設圖中孔的直徑為 4.95，塞子的直徑為 5.00，塞子必須以低於 0.05 之垂直度值以確保裝配及機能，圖中圓柱的垂直度值以其中心線定義，圓柱之直徑即等於公差數值，相反的假若塞子的直徑比 5.00 減小 0.02 成為 4.98，則垂直度允許的偏離值將允許增加 0.02 成為 0.07，增大之偏差值並不影響到零件的裝配，此即為 Bonus 公差的概念。在使用幾何公差於圖面上且應用 MMC、LMC 或 RFS 材料條件下，若幾何情況允許指定 MMC 或 LMC 時，則可以計算並得到廣值的公差值或者稱為 Bonus 公差值，此值取決於量測特徵的實際尺度。

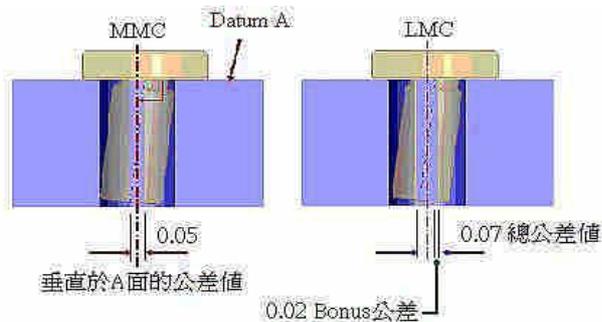


圖 3. Bonus 公差的概念

## (二) 蒙地卡羅模擬法

### 1. 基本演譯法

公差為在工程圖上某個特別尺寸所允許的變量總合，放寬公差也許可降低製造成本，但是公差的放寬必需由某些執行量測來拘束（如機能性和互換性）。如果一特別的公差結合並沒有滿足指定標準，則必需改變某些或全部的輸入值，並且重複分析過程。

蒙地卡羅模擬為最簡單最受歡迎的非線性統計公差分析方法，此法可同時考慮所有公差的影響，依據零件分佈型態產生零件的尺寸隨機分佈值，並且視分析結果可作適當的調整，使每個參數隨機擾動，然後評估整個系統性能的影響，以圖 3 之估算面積的簡單例子說明其原理。

假設要計算如圖 4 所示之平面圖形 A 的面積，A 可以是一個任意的圖形並且完全含於單位正方形內，在正方形中隨機產生 N 個均勻分佈點，其中 N' 表示落在面積 A 內的點數，則 A 的面積在幾何上顯然近似地等於  $N'/N$ ，若 N 愈大，則此估計值的精度就愈高。

本文將應用此方法於裝配公差模擬，從產生的標準分配零件尺寸資料庫中，隨機且均勻地取出尺寸模擬值，配合裝配及拘束條件，模擬 N 次就像執行裝配 N 次一般，利用電腦產生隨機變數以模擬現實情況中的不確定性（uncertain）情形，預知各工件之分配狀況，再由電腦隨機產生工件尺寸之大樣本，由此大樣本數據計算其分配和公差值。以最佳品質為目標，調整各零件之公差以滿足拘束條件之限制，求得最佳裝配公差之值。

### 2. 模擬的樣本數

由模擬所得之裝配結果為成功或失敗兩種情形，Y 代表 n 次裝配中成功的次數，為具母體性質 p 的任何單次試驗上機率的二項隨機變數，因為  $E(Y/n)=p$ ，Y/n 為母體性質 p 的

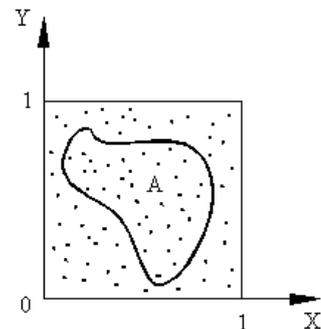


圖 4. 蒙地卡羅法估算不規則面積



公平估計式，將使用此估計式在給定的工程說明下計算成功的裝配次數。

蒙地卡羅模擬過程需要足夠的樣本數來降低估計量變異對母體性質推論的影響。根據統計理論，估計量的精準度可以其變異數衡量之：

$$\text{Var}[\tilde{\theta}(s)] = E[(\tilde{\theta}(s) - \theta)^2] \quad (1)$$

變異數值越小代表估計量越精準，為了確立模擬的正確性與精準性，使用如下的樣本數選擇：

$$Y \sim \text{bin}(n, p) \quad (2)$$

$Y$  為具參數  $p$  與  $n$  的二項隨機變數，當樣本數  $n$  夠大，即若  $10/n < p < 1 - (10/n)$  時，(2) 式中  $Y$  的分佈可以表示成近似常態分佈變數：

$$Y \sim N(np, np(1-p)) \quad (3)$$

$p$  的估計量  $\hat{p}$  具有一平均值為  $p$ ，標準差為  $\sigma = \sqrt{[p(1-p)/n]}$  之近似常態分佈，表示成：

$$\hat{p} = Y/n \sim N(p, p(1-p)/n) \quad (4)$$

常態分佈情況下， $\hat{p}$  將具有 99.73% 的機率位在  $p \pm 3\sigma$  區間內，為了控制  $6\sigma$  於一給定的估計精準度  $a$  下，即  $6\sigma \leq a$ ，則模擬過程所需的最低樣本數  $n$  可以依據初始的裝配成功機率估計值  $\hat{p}_i$  計算得之：

$$n \geq \frac{36\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{a^2} \quad (5)$$

圖 5 說明了第 (5) 式在系統的應用，執行為先輸入較少的適當模擬樣本數，經過系統初步的模擬估算後將會給定一個最低信賴模擬樣本數，繼而以大於最低的信賴模擬樣本數再次執行模擬，得到誤差範圍內的模擬結果，如此可免除模擬樣本數不夠導致結果的可信度不足或樣本數過多造成時間、資源的浪費，因此適用的最低樣本數估算可增進蒙地卡羅模擬的效益。

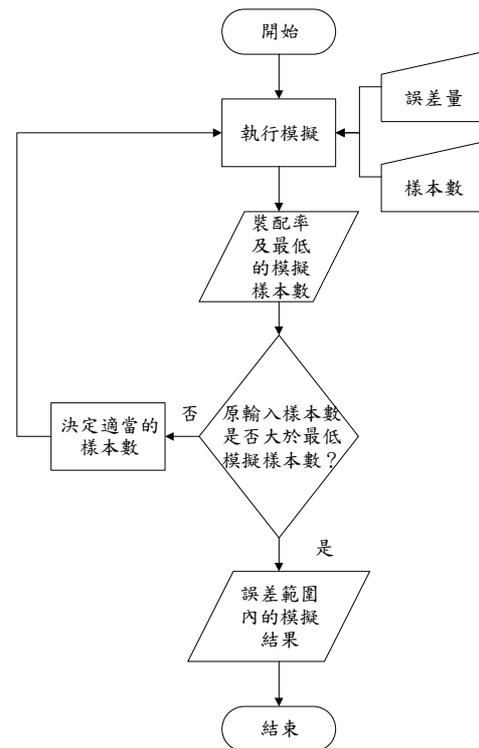


圖 5. 最低模擬樣本量的使用流程圖

### (三) 軍用標準 105E 抽樣

當檢驗產品的目的是在接受或拒絕時，根據指定的標準採用的檢驗程序就叫做驗收抽樣 (acceptance sampling)，主要以計數值和計量值分類，計量值為以數值來量測品質特性，計數值則以通過或不通過 (Go; No Go) 之基礎表達品質特性。軍用標準 105E 為在第二次世界大戰時所發展的計數值檢驗程序，是一個抽樣架構的集合。主要焦點在允收品質水準 (acceptable quality level, AQL)，一般抽樣之 AQL 是由合約或負責抽樣之單位指定，不同的 AQL 應指定給不同形式的不良品。例如標準區分為重要不良品、主要不良品和次要不良品，一般的應用情形為主要不良品之 AQL 為 1%；次要不良品之 AQL 為 2.5%；重要不良品則不允許抽樣結果存有不良件數。此抽樣所使用的樣本大小由貨批之大小及檢驗水準的選擇決定之，一般檢驗水準分為三種：水準 II 是正常的；水準 I 使用於判定標準較鬆時，其檢驗量為水準 II 的一半；水準 III 使用於判定標準較為嚴格的情形之下，需要水準 II 兩倍的檢驗量。使用 MIL STD 105E 的步驟為：

- (1) 選擇 AQL。
- (2) 選擇檢驗水準。



- (3) 決定批量。
- (4) 由代碼表中求出適當的樣本大小代碼。
- (5) 決定適當的抽樣計畫（單次、雙次、多次）。
- (6) 找出使用型式的適當表。
- (7) 選定該用的正常檢驗並於必要時改換為減量檢驗。

圖 6 為依據 105E 單次抽樣架構所建立的條件設定輸入介面，系統依據輸入抽樣條件產生抽樣需求樣本量及允收界限，則抽樣拒收量是否超過允收界限將作為適當公差值決定之依據。

**(四) 關鍵工件**

公差配置過程若能求得關鍵工件，則可在裝配機能拘束條件下直接調整關鍵工件之公差值，減少公差配置過程中使用試誤法的計算次數，增進蒙地卡羅模擬法在公差配置使用上之效率。所謂關鍵工件即貢獻率最大的零件，本文使用周清秀 [1] 所提出的常態分佈條件下高—中—低值模擬，計算步驟如下：

1. 分別由小到大排序數量為 N 的每一零件尺寸資料，則第 1/4N 尺寸值為尺寸低值，第 2/4N 尺寸值為尺寸中值，第 3/4N 尺寸值為尺寸高值，此為避免分析資料存在極端值而採用比例位數的四分位數。
2. 輪流取一零件尺寸之高、低值，其餘零件取其尺寸中值，直到所有零件皆被選取。由零件 i 之尺寸高值與其餘零件尺寸中值所得之裝配尺寸為零件 i 的裝配尺寸全距上限，由零件 i 之尺寸低值與其餘零件尺寸中值所得之裝配尺寸為零件 i 的裝配尺寸全距下限，則零件 i 的裝配尺寸全距為：

$$R_{iA} = R_{iU} - R_{iL} \tag{6}$$

$R_{iA}$  為裝配尺寸全距，

$R_{iU}$  為零件 i 的裝配尺寸全距上限，

$R_{iL}$  為零件 i 的裝配尺寸全距下限。

3. 常態分佈情形下， $\sigma_i$  為零件 i 之尺寸標準差，則其裝配尺寸全距與標準差關係為：

$$R_{iA} = 6\sigma_i$$

$$\sigma_i^2 = R_{iA}^2 / 36 \tag{7}$$

4. 假設共有 M 個零件， $\sigma_{whole}^2$  為所有零件尺寸標準差之平方和，則：

$$\sigma_{whole}^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 \tag{8}$$

5. 零件 i 之裝配尺寸貢獻百分率  $S_i$  為：

$$S_i = \sigma_i^2 / \sigma_{whole}^2 \times 100\% \tag{9}$$

6. 若裝配為單一拘束，則關鍵工件即為貢獻百分率最大的零件。

裝配若為具 c 個多重拘束，則必需考慮到每個拘束對於裝配之影響，其關鍵工件之計算如下：

$G_j$  為加權因子，其值等於各個拘束之裝配不良率，對每一拘束重複 1~5 的步驟，得到每一拘束的每個零件尺寸貢獻百分率， $S_i G_j$  代表第 i 個零件尺寸貢獻百分率乘以拘束 j 之加權因子所得的值，則第 i 個零件於所有拘束所得的裝配尺寸貢獻率為：

$$S_i G_{whole} = \sum_{j=1}^c S_i G_j \tag{10}$$

多重拘束下所有零件的裝配尺寸貢獻率為：

$$S_{whole} G = \sum_{i=1}^M S_i G_{whole} \tag{11}$$

第 i 個零件考量所有拘束所得的裝配尺寸貢獻百分率為：

$$S_i G = S_i G_{whole} / S_{whole} G \times 100\% \tag{12}$$

貢獻百分率最大的零件即為關鍵工件。

公差配置系統流程示於圖 7，分析過程所得結果一旦符合 105E 抽樣標準，系統將所得的最終公差值資料存入指定資料庫中，並對結果作一說明。

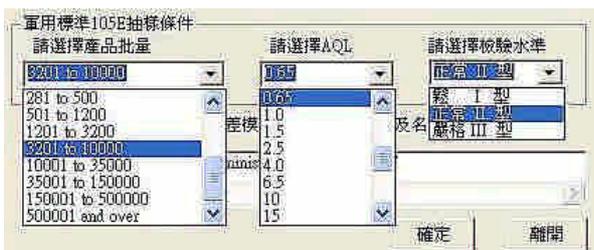


圖 6. 105E 抽樣條件輸入介面



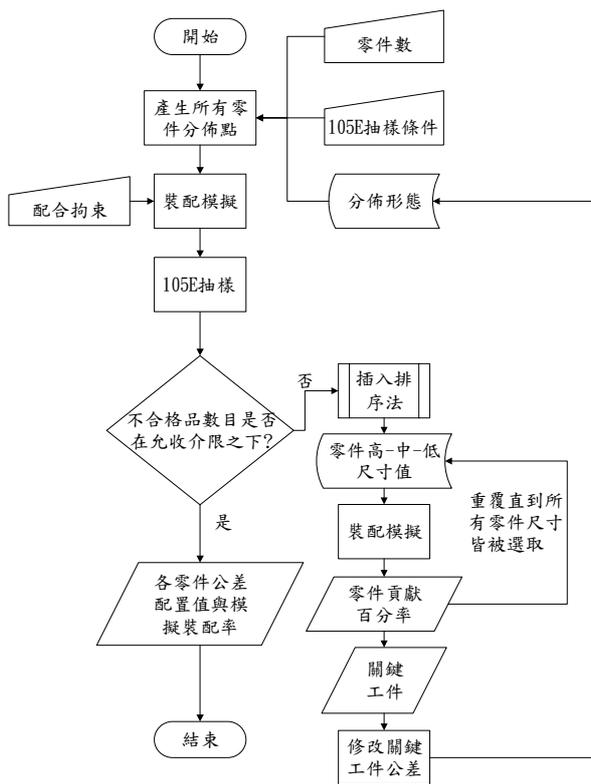


圖 7. 公差配置流程圖

#### 四、實例一：二件式裝配的公差分析

首先以單一方塊置入一凹槽之二件裝配為例，分析機能拘束為指定值情況下之裝配率，並疊代求解 MIL STD 105E 允收條件下最佳的機能拘束值。進而以具有 100% 裝配率的最惡法及 99.73% 裝配率的平方和之平方根法計算適當機能拘束，並對所得結果作一比較。

##### (一) 蒙地卡羅模擬法

圖 8 為裝配情形，假設尺寸變動分佈為常態分配，模擬之尺寸公差及機能需求條件如表 1 所列，機能需求為裝配後兩零件之尺寸差，模擬誤差量  $a$  值為 0.003。

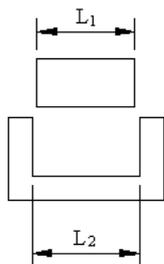


圖 8. 二件裝配图

表 1. 二件裝配模擬條件

尺寸公差	機能需求
$L_1=10.0\pm 0.4$	$L_2-L_1=0.5\pm 0.5$
$L_2=10.5\pm 0.4$	

圖 9 為二件裝配零件尺寸常態分佈假設圖，說明了公差分析過程中，假設零件尺寸為在變動許可量內，由基本尺寸及向兩方向相加或相減一差量公差所定義，加工過程中將以基本尺寸為目標值，且視大於或小於基本尺寸於一定範圍內之零件仍為合格零件。因此，在零件的數量分佈上靠近基本尺寸值的數量將大於位於公差區間兩極值之數量，圖中  $L_1$  尺寸標準常態分佈之表示為  $L_1\sim N(10.0, (0.4/3)^2)$ ， $L_2$  尺寸標準常態分佈之表示為  $L_2\sim N(10.5, ((0.4/3)^2)$ 。

所使用的軍用標準 105E 計數值檢驗標準程序條件為單一檢驗程序，產品批量等於初步模擬次數 10000 次，AQL 標準為主要零件 0.65，檢驗水準為一般 II 型，檢驗內容列於表 2。

蒙地卡羅需要足夠的模擬次數以確保模擬結果之可信度，所以首先執行較少的模擬次數（10000 次）求適當的模擬次數，將以上的模擬條件輸入如圖 10 所示之模擬系統介面並執行之。

經過初步模擬得到裝配合格率为 99.16%，適當的模擬次數必需大於 33318 次，105E 抽樣 200 次，允收界限為 3。

依據初次模擬結果，決定適當的模擬次數為 40000 次，並以此值更改 105E 檢驗批量值，再次執行模擬後得到裝配

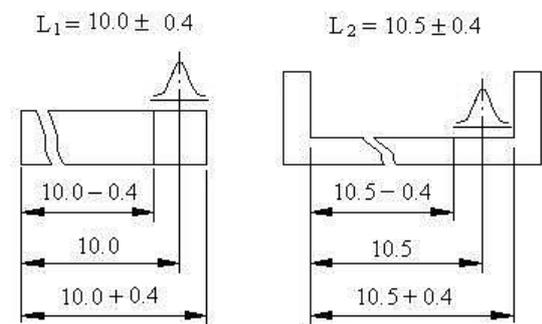


圖 9. 二件裝配尺寸分佈假設

表 2. 二件裝配 105E 檢驗條件

產品批量	AQL	檢驗水準
10000	0.65	一般 II 型



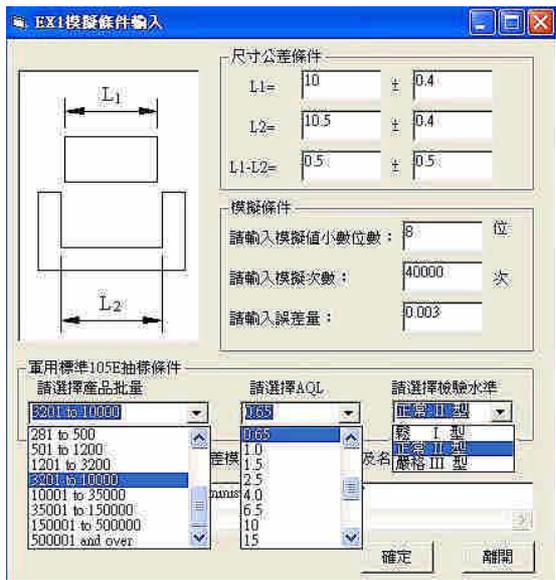


圖 10. 二件裝配模擬條件輸入

率為 99.18%，依據設定的 105E 檢驗條件需要 500 個樣本，允收界限為 7，此批量裝配模擬所得之裝配不良數必須低於允收界限，才能表示設定的公差值滿足需求。

因此，系統自動地由兩零件各別已產生的四萬個零件尺寸值，以蒙地卡羅模擬法隨機抽樣模擬裝配 500 個，得到 Reject 數目為 4，因為  $Reject=4 < 7$ ，表示在指定的機能拘束公差值下所得的裝配模擬不良數 4 低於 105E 允收界限 7，所以判定此批量為允收，並接受設定的公差值。

以上的分析提供了指定的機能拘束公差值是否能滿足所需的 105E 檢驗條件之預測，進一步更可利用建構的蒙地卡羅模擬系統求出此檢驗條件下最佳機能拘束公差值。

假設零件尺寸為常態分佈情況，以機能拘束公差初始值 0.1、公差疊代值 0.1 執行模擬，經由模擬過程所產生的各結果列於表 3，由表中可以得知滿足所需 105E 檢驗條件最佳的機能拘束公差值為在第五次疊代時之 0.5。

(二) 分析結果與比較

分別以公差累計具有 100% 裝配率的最惡法及 99.73% 裝配率的平方合之平方根法計算裝配後的機能需求尺寸，表 4 列出各方法所得之機能需求及相對的裝配率，由最惡法所得 100% 完全裝配之機能拘束值為  $0.5 \pm 0.8$ 。但是表 3 中，當機能拘束為  $0.5 \pm 0.7$  時，經由蒙地卡羅模擬即可達到 100% 完全裝配，因此選擇  $0.5 \pm 0.7$  之公差可以得到精確度較高且裝配率接近 100% 之組零件。此外由表 4 可得知，在同樣的  $0.5 \pm 0.6$  拘束條件下，蒙地卡羅模擬所得的裝配率比平方和

表 3. 二件裝配機能拘束值與裝配率

機能拘束值	模擬次數	裝配率 (%)	105E 樣本數	允收界限	不及格數	是否允收
$0.5 \pm 0.1$	1000000	39.53	1250	14	790	否
$0.5 \pm 0.2$	900000	69.90	1250	14	324	否
$0.5 \pm 0.3$	450000	88.16	800	10	80	否
$0.5 \pm 0.4$	160000	96.44	800	10	25	否
<b><math>0.5 \pm 0.5</math></b>	<b>40000</b>	<b>99.18</b>	<b>500</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>是</b>
$0.5 \pm 0.6$	10000	99.92	200	3	1	是
$0.5 \pm 0.7$	10000	100.00	200	3	0	是
$0.5 \pm 0.8$	10000	100.00	200	3	0	是

表 4. 不同方法之機能需求與裝配率

方法	最惡法	RSS 法
機能需求	$0.5 \pm 0.8$	$0.5 \pm 0.6$
裝配百分率	100%	99.73%

之平方根法所得值高且於公差上的應用在考慮到不同的條件、參數設定，不需透過複雜的計算或查表程序，即可提供工程人員一參考輔助。

五、實例二：雙孔雙銷裝配的公差分析

實例二以典型的軸孔裝配之雙孔雙銷為分析對象，將以蒙地卡羅法模擬分別由尺寸公差及幾何公差定義下之符合 105E 要求的最佳公差值。

(一) 尺寸公差定義之雙孔雙銷裝配公差分析

圖 11 為尺寸公差定義之雙孔雙銷配合情況，構件的機能需求為構件間配合關係的關鍵，由大小的機能尺寸和構件中孔和銷的位置決定之，表 5 為配合尺寸及公差條件。此例中將以最惡法、平方和之平方根法及蒙地卡羅模擬法決定軸孔中心線裝配尺寸的適當公差值  $x$ 。

圖 12 為由尺寸公差定義之雙孔雙銷裝配模擬系統介面，以表 5 所列裝配尺寸及公差條件、單一抽樣程序、批量等於模擬次數、AQL 為 0.65、檢驗水準為正常 II 型之 105E 檢驗標準程序，輸入系統並執行模擬。

表 6 為孔銷中心距公差初值 0.025、疊代值 0.025、模擬誤差量  $a$  值 0.003，經過系統疊代模擬後之結果，則符合 105E 檢驗條件之中心距公差值為 0.2，模擬裝配率為 99.56%。

(二) 幾何公差定義之雙孔雙銷裝配公差分析

本節之裝配公差分析將分別使用 RFS 及 MMC 條件於銷及孔的正位度公差上，RFS 條件要求關鍵定位公差必須位



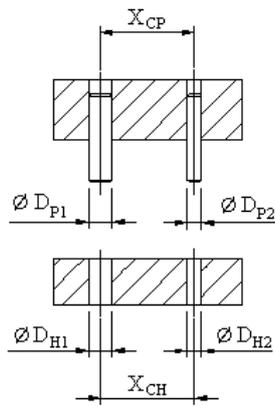


圖 11. 雙孔雙銷之裝配

表 5. 雙孔雙銷配合條件

尺寸公差	$D_{P1}=14.895 \pm 0.055$ $D_{P2}=14.895 \pm 0.055$ $D_{H1}=15.035 \pm 0.035$ $D_{H2}=15.035 \pm 0.035$ $X_{CP}=100 \pm x$ $X_{CH}=100 \pm x$
機能需求	$X_{CP} + \frac{D_{P1}}{2} + \frac{D_{P2}}{2} \leq X_{CH} + \frac{D_{H1}}{2} + \frac{D_{H2}}{2}$ $X_{CP} - \frac{D_{P1}}{2} - \frac{D_{P2}}{2} \geq X_{CH} - \frac{D_{H1}}{2} - \frac{D_{H2}}{2}$

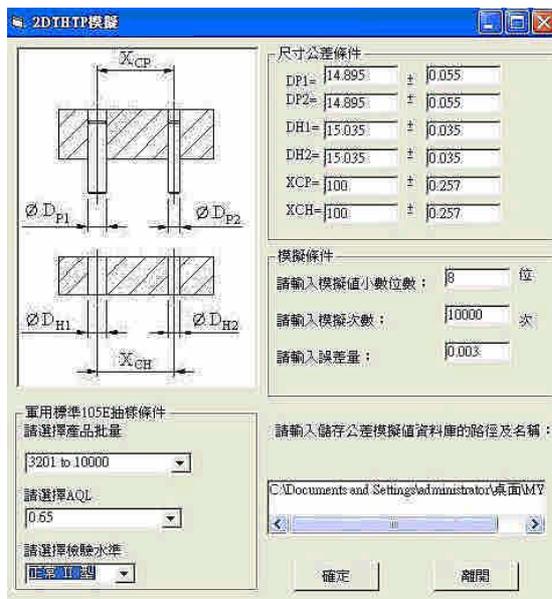


圖 12. 尺寸公差定義之雙孔雙銷公差分析

在指定的公差範圍內，假設正位度偏離值分佈為常態，其目標尺寸為 0，分析過程中的正位度隨機產生值範圍即為指定

表 6. 尺寸公差定義之雙孔雙銷公差分析結果

公差值	模擬次數	裝配機率(%)	105E 樣本數	允收界限	不合格數	是否允收
0.025	10000	100.00	200	3	0	是
0.050	10000	100.00	200	3	0	是
0.075	10000	100.00	200	3	0	是
0.100	10000	100.00	200	3	0	是
0.125	10000	100.00	200	3	0	是
0.150	10000	99.96	200	3	0	是
0.175	10000	99.88	200	3	0	是
<b>0.200</b>	<b>25000</b>	<b>99.56</b>	<b>315</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>是</b>
0.125	55000	98.79	500	7	14	否
0.150	95000	97.69	500	7	23	否

之公差值範圍，不受特徵尺寸偏離最大實體狀況之影響，圖 13 為雙孔雙銷公差分析模擬時之流程圖。

正位度分析方面，本文引用 Shan [19] 在統計公差分析過程及應用所提出之方法，分別以  $t$  及  $p$  表示圖 14 中的特徵公差及位置公差，其中  $t$  為對稱公差，使用下標  $P$  及  $H$  為銷及孔之標示。

#### 1. 正位度公差之表示

圖 15 說明以向量  $R(R, \theta)$  表示孔或銷的真正位置。 $R$  為孔或銷相對於真正位置的偏移距離， $\theta$  代表定位的方向。假設隨機變數  $\theta$  具有  $0$  到  $2\pi$  的均勻分佈，因為公差軸可位於其公差區間內的任何地方，所以可以表示成  $\theta \sim U(0, 2\pi)$ ， $U$  代表均勻分佈。另一隨機變數  $R$ ，本文亦以標準分配表示其分佈型態，相對以上的  $\theta$  分佈，半徑  $R$  永遠都是正值。

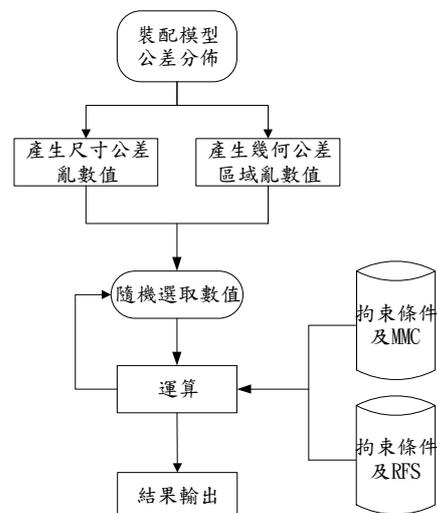


圖 13. 雙孔雙銷公差分析流程圖



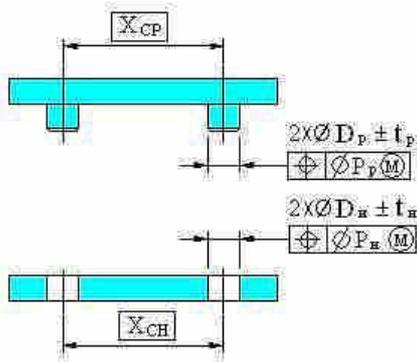


圖 14. 雙孔雙銷裝配圖

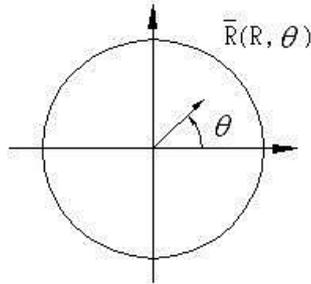


圖 15. 正位度公差的表示 [19]

2. 中心距離之計算

對多數長度和半徑之比為低的圓形特徵而言，可以投射在其中一正交截面上方法，將此種圓柱公差區間簡化成圖 16 所示之 2D 的圓形區域，若其配合關係滿足：

$$D_{PI} \geq D_{HI} \text{ 及 } D_{PO} \leq D_{HO} \quad (13)$$

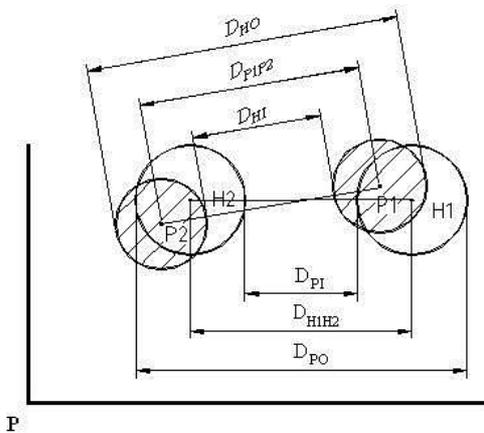


圖 16. 雙孔雙銷裝配關係圖

則構件即可以裝配，其中：

$D_{PI}$  為雙銷間的内面圓心距離。

$D_{PO}$  為雙銷間的外面圓心距離。

$D_{HI}$  為雙孔間的内面圓心距離。

$D_{HO}$  為雙孔間的外面圓心距離。

以上之值可以由以下各式得到：

$$D_{HI} = D_{H1H2} - R_{SH1} - R_{SH2} \quad (14)$$

$$D_{PI} = D_{P1P2} - R_{SP1} - R_{SP2} \quad (15)$$

$$D_{HO} = D_{H1H2} + R_{SH1} + R_{SH2} \quad (16)$$

$$D_{PO} = D_{P1P2} + R_{SP1} + R_{SP2} \quad (17)$$

其中：

$D_{H1H2}$ 、 $D_{P1P2}$  為雙孔及雙銷的圓心距離。

$R_{SH1}$ 、 $R_{SH2}$  為雙孔的半徑隨機值。

$R_{SP1}$ 、 $R_{SP2}$  為雙銷的半徑隨機值。

為了求得銷、孔的内面及外面尺寸值，必須先計算其各自的中心距，參考圖 17， $P_{H1}$  為孔 1 的中心點， $P_{H2}$  為孔 2 的中心點，雙孔的圓心距離  $D_{H1H2}$  等於直角三角形 ABC 的斜邊值，其值計算如下：

$$D_{H1H2} = [(a - R_{PH1} \cos \theta_{PH1} + R_{PH2} \cos \theta_{PH2})^2 + (R_{PH1} \sin \theta_{PH1} - R_{PH2} \sin \theta_{PH2})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

相同的，雙銷的圓心距離  $D_{P1P2}$  的值可以 (19) 式得到：

$$D_{P1P2} = [(a - R_{PP1} \cos \theta_{PP1} + R_{PP2} \cos \theta_{PP2})^2 + (R_{PP1} \sin \theta_{PP1} - R_{PP2} \sin \theta_{PP2})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

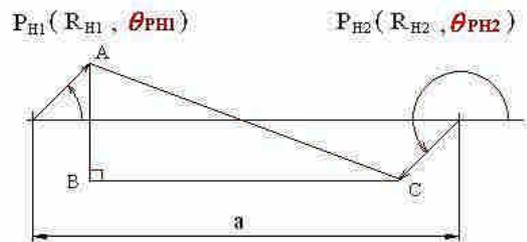


圖 17. 雙孔的圓心距離



正位度的偏移量與角度均影響到中心距之值，其中偏移量的大小與中心距大小成正比，圖 18 為裝配時兩銷正位度偏移情況，說明裝配過程中正位度偏移角度大小分佈之四分位數定義。圖中 P1 偏移角度等於 180 度且 P2 偏移角度等於 0 度或 360 度時，銷之間具有最大中心距；當 P1 偏移角度等於 0 度或 360 度且 P2 偏移角度等於 180 度時，銷之間具有最小中心距。因為偏移角度為隨機均勻分佈，依據四分位計算方法，定義圖中 P1 正位度偏移角度為  $135 \pm 90$  度且與 P2 正位度偏移角度相距 180 度時為偏移角度之低值；P1 正位度偏移角度為  $180 \pm 90$  度且與 P2 正位度偏移角度相距 180 度時為偏移角度之中值；P1 正位度偏移角度為  $225 \pm 90$  度且與 P2 正位度偏移角度相距 180 度時為偏移角度之高值。故而正位度公差之分析同樣亦可依據關鍵工件計算之步驟，分別計算每一拘束中各零件公差對於裝配的貢獻率，並以各拘束之裝配不合格率為加權因子，求出每一次模擬的關鍵工件。

### 3. 材料條件之應用

在 MMC 的應用上，因關鍵正位度公差受到特徵尺寸偏離最大實體狀況之影響，本研究提出和 Shan 不同的觀點，首先說明 Shan 在特徵尺寸隨機產生後，透過位置公差動態連結 MMC 的應用步驟：

- 產生相關特徵的隨機尺寸。
- 對每一特徵計算 MMC 大小和實際完成大小之間的差異值。
- 將此差異值加入每一個特徵的指定正位度公差，此正位度公差將被視為每一特徵的實際正位度公差。

Shan 將每一特徵計算 MMC 大小和實際完成大小之間的差異值加入指定正位度公差，並視此正位度公差為實際正位度公差，因此由 MMC 條件所得之裝配率比 RFS 條件所得之裝配率低本文依據 MMC 條件定義則認為，若零件尺寸偏離 MMC 情況時，裝配條件“允許”正位度公差可得到 Bonus 公差值，此公差值對於裝配情況而言是有助益的，因

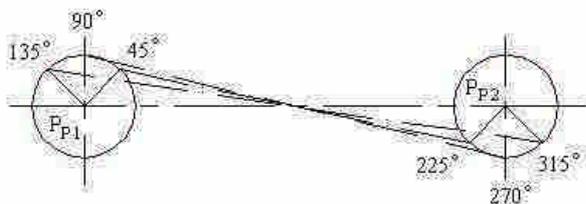


圖 18. 正位度偏移角度與中心距關係圖

此將此公差值之作用視為實際正位度偏差值之調節，而非如 Shan 所認為當尺寸公差偏離 MMC 時，其實際正位度公差也隨之增大。因此於 MMC 應用上的最後一個步驟為：

- 裝配模擬過程中，每一個特徵的指定正位度公差，將具有此差異值之調節作用，因此減少對裝配之影響，獲得裝配成功與否判斷上較大的公差允許空間。

### 4. 分析過程

表 7 所列為雙孔雙銷裝配模擬條件，對於模擬過程將以 RFS 材料條件做為說明。

圖 19 為雙孔雙銷裝配公差模擬條件輸入介面，需要輸入的條件包括尺寸公差、抽樣條件、模擬條件及記錄模擬過程所得數值之資料庫儲存路徑。

首先為了藉由初步的執行以獲得適當的信賴模擬次數，將表 7 所列之尺寸公差及機能需求模擬條件輸入尺寸公差條件欄，且於模擬條件欄中輸入較少的模擬執行次數 10000 次，由於公差分析過程中使用自然公差，因此公差因

表 7. 雙孔雙銷裝配模擬條件

尺寸公差	機能需求
$D_{P1} = 14.895 \pm 0.055$	
$D_{P2} = 14.895 \pm 0.055$	
$D_{H1} = 15.035 \pm 0.035$	$D_{P1} \geq D_{H1}$
$D_{H2} = 15.035 \pm 0.035$	$D_{P2} \geq D_{H2}$
$X_{CP} = 100$	
$X_{CH} = 100$	

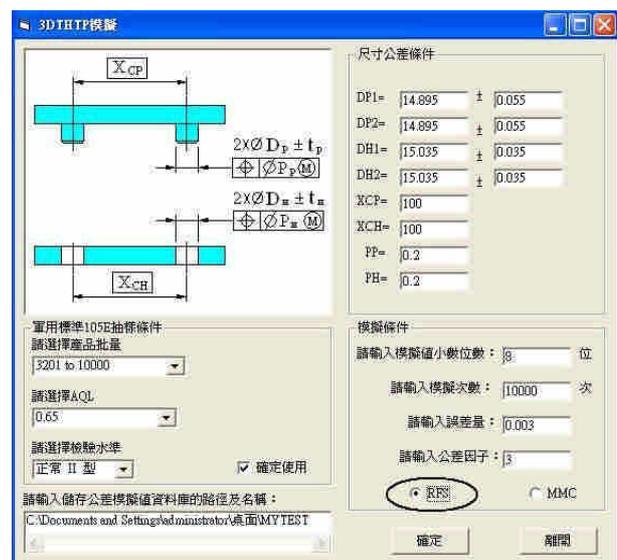


圖 19. 雙孔雙銷裝配公差模擬條件輸入介面



子設定為 3，此次分析使用的材料條件選擇 RFS。

選擇的軍用標準 105E 抽樣條件為單一抽樣程序、批量等於初步模擬次數 10000 次、AQL 為 0.65、檢驗水準為正常之 II 型，並勾選確定使用核取方塊，最後輸入系統分析完成後，指定儲存公差模擬值資料庫的路徑及資料庫名稱。

初步執行之結果得到裝配機率為 99.63%，建議的信賴模擬次數必須大於 14746 次。繼而決定以 20000 次的模擬次數執行再次執行模擬，並以此值更改 105E 樣本量。

經過再度執行後得到裝配機率為 99.74%，105E 抽樣樣本量為 315，允收界限 5，因為模擬所得裝配不合格數目為 2 小於允收界限 5，因此判定此批量為允收。

表 8 與表 9 分別為 RFS、MMC 條件下，孔、銷各別中心距公差初值 0.025、疊代值 0.025、模擬誤差量 a 等於 0.003，疊代模擬後之結果。在符合 105E 抽樣條件下，RFS 所得的適當正位度公差值為 0.200，裝配機率為 99.26%；MMC 條件下因為正位度受到 Bonus 公差的調節，因而得到較大的公差值 0.275，裝配機率 99.16%。

圖 20 為 RFS 條件下，銷、孔各自之間正位度公差值等於 0.2 時，執行模擬過程中各零件尺寸值分佈圖。由右邊圖可以看出各零件尺寸為常態分配狀況，左邊圖則表示相對於隨機均勻分佈之正位度角度偏移值，其偏移量大小永遠都是正值。

5. 結果討論

將尺寸公差定義、幾何公差定義之 RFS 及 MMC 不同材料條件下所得之公差值與裝配率關係表示於圖 21，並與 Shan 之結果作一比較。由圖中可以得知，本研究在尺寸公差與幾何公差於 RFS 條件下所獲得之裝配率與 Shan 之分析

表 9. MMC 條件下模擬結果

公差值	模擬次數	裝配機率(%)	105E 樣本數	允收界限	不合格數	是否允收
0.025	10000	100.00	200	3	0	是
0.050	10000	100.00	200	3	0	是
0.075	10000	100.00	200	3	0	是
0.100	10000	100.00	200	3	0	是
0.125	10000	100.00	200	3	0	是
0.150	10000	100.00	200	3	0	是
0.175	10000	99.98	200	3	0	是
0.200	10000	99.97	200	3	0	是
0.225	30000	99.73	315	5	0	是
0.250	25000	99.58	315	5	3	是
<b>0.275</b>	<b>50000</b>	<b>99.16</b>	<b>500</b>	<b>7</b>	<b>2</b>	<b>是</b>
0.300	80000	98.22	500	7	11	否
0.325	120000	97.29	500	7	14	否

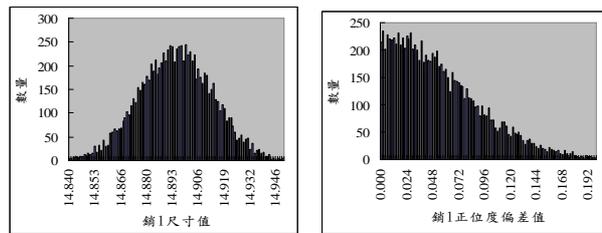


圖 20. 銷 1 尺寸及正位度偏差分佈

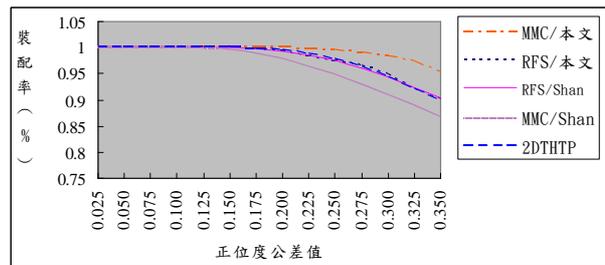


圖 21. 結果比較

表 8. RFS 條件下模擬結果

公差值	模擬次數	裝配機率(%)	105E 樣本數	允收界限	不合格數	是否允收
0.025	10000	100.00	200	3	0	是
0.050	10000	100.00	200	3	0	是
0.075	10000	100.00	200	3	0	是
0.100	10000	100.00	200	3	0	是
0.125	10000	99.98	200	3	0	是
0.150	10000	99.94	200	3	0	是
0.175	10000	99.79	200	3	1	是
<b>0.200</b>	<b>20000</b>	<b>99.26</b>	<b>315</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>是</b>
0.225	70000	98.41	500	7	14	否
0.250	110000	97.38	500	7	22	否

值相近，而在 MMC 條件應用情形下則呈現相反之結果，相同的正位度公差值，本研究在 MMC 條件可以獲得較高的裝配率，依據使用 RFS 材料條件之定義：忽略製件的實際製造尺度，要求關鍵定位公差必須位在指定的公差範圍內，應用於彈性需求最低及較精密的加工情況，因此 RFS 條件下所得的公差值應比 MMC 條件下所得之公差值緊。故而本研究在 MMC 及 RFS 應用於幾何公差分析所獲得的結果較符合材料條件定義之內容。



## 六、結語與建議

1. 傳統公差被認為是參數模型中參數的界限，特別在參數為來自於工程圖面時，然而 ANSI 標準定義幾何公差為束縛零件特徵或零件之決定幾何（中心面、中心線、中心點）所位於的區間。故而傳統的分析方法並不恰當。通常使用最惡法或平方和之平方根法估計公差之累計，經由最惡法所得的值過於悲觀，平方和之平方根法則過於理想化。因此，公差分析過程中考慮每一特徵製造過程的機率行為與產生的裝配反應函數的機率分佈型態為必要。
2. 如果以允許裝配的一小部份為不合格，便可以得到較大的獨立零件允許公差量，特別在零件無法裝配或機能異常，可以重新再指定給其他適當的裝配件，如此可降低製造成本，因此文中以目前最廣泛使用的計數值接受抽樣系統軍用標準 105E 為模擬系統之輔助，以裝配不良率為導向，作為設定條件下模擬批量之結果判斷標準。
3. 研究主要在公差分析及配置兩部分，用最能代表軸孔裝配的雙孔雙銷為例，分別以最大材料條件及忽略特徵尺寸兩材料條件為前提、配合拘束為條件，應用蒙地卡羅模擬分析裝配公差之變化，所得之結果說明了此兩材料條件對於公差值有相當的影響，因此在公差分析過程中不應予以忽視。
4. 此外，蒙地卡羅法於幾何公差及尺寸公差分析之應用非常簡單且不需繁複計算過程，能達到幫助設計者計算製品裝配能力、或依據期望的裝配能力求取適當的公差值，對公差問題提供一新的遠景展望，文中以 Visual Basic 所建構的分析系統提供一可結合 CAD 或實體模型系統的公差分析工具，發展使用者導向之專用性模具設計輔助軟體。
5. 本文假設配合過程銷的半徑和長度比不大情況下，幾何公差分析只限於正位度公差，未來可針對其它的幾何公差並與實體模型系統結合，發展使用者導向自動化分析系統，作進一步之應用。此外，模擬的過程首重誤差因子之排除，如此之模擬結果才具實際參考效益，所以使用更接近實際製造之分佈形態、並建立符合實際裝配過程之模型，以尺寸公差成本及幾何公差成本為條件，應用於公差合成技術之發展亦為未來研究重要主題。

## 參考文獻

1. 周清秀 (民 84)，裝配公差配置設計研究，國立中央大學機械工程研究所碩士論文。
2. 許旭民 (民 88)，統計公差模型建立與分析，國立成功大學機械工程研究所碩士論文。
3. 張天津 (民 80)，機械製圖 (上)，全華科技圖書股份有限公司，台灣。
4. 彭明柳 (民 89)，Visual Basic 6 中文專業版徹底研究，博碩文化，台灣。
5. Bjorke, O. (1989) *Computer Aided Tolerancing*, 2nd Ed., The Society of Mechanical Engineers, Tory, NY.
6. Chase, K. W., J. Gao, S. P. Magleby and C. D. Sorensen (1996) Including geometric feature variation in tolerance analysis of mechanical assemblies. *IIE Transactions*, 28(10), 795-807.
7. Coon, D. (2003) Comparison of coaxial controls. *Mechine News*, Oct., 13-15.
8. Dong, Z. and A. Soom (1991) Some application of artificial intelligence techniques to automatic tolerance analysis and synthesis. In: *Artificial Intelligence in Design*, A Chapter 5, 101-124. D. T. Pham, Ed., Springer-Verlag, New York, NY.
9. Fitzpatrick, M. (1993) *Working Skills in Geometric Dimensioning and Tolerancing*, Delmar Publishers Inc., Tory, NY.
10. Glancy, C. G. and K. W. Chase (1999) A second order method for assembly tolerance analysis. *Proceeding of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Las Vegas, NV.
11. GreenWood, W. H. and K. W. Chase (1987) A new tolerance analysis method for designers and manufacturers. *Transactions of The ASME Journal of Engineering for Industry*, 109(May), 112-116.
12. Krulikowski, A. (1991) *Fundamentals of Geometric Dimensioning and Tolerancing*, Delmar Publishers, New York, NY.
13. Lee, S. and C. Yi (1994) Tolerance analysis for assembly planning. *Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology*, Proceedings of the Fourth International Conference, Troy, OH.
14. Lee, S. and C. Yi (1996) Statistical tolerance clearance analysis for assembly. *Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference*, Osaka, Japan.



- 
15. Montgomery, D. C. (2001) *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th Ed., John Wiley & Sons, New York, NY.
  16. Nassef, A. O. and H. A. ElMaraghy (2001) Towards a less conservative analysis of geometric tolerances. *Procedure Instant Mechanism Engineers*, 215, 37-45.
  17. Ngoi, B. K. A. and O. J. Min (1999) Optimum tolerance allocation in assembly. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15, 660-665.
  18. Nigam, S. D. and J. U. Turner (1995) Review of statistical approaches to tolerance analysis. *Computer-aided Design*, 27(1), 6-15.
  19. Shan, A., R. N. Roth and R. J. Wilson (1999) A new approach to statistical geometrical tolerance analysis. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15, 222-230.
  20. Sutherland, G. H. and B. Roth (1975) Mechanism design: accounting for manufacturing tolerance and cost in function generating problems. *Journal of Engineering for Industry ASME*, 97, 283-286.

收件：95.01.06 修正：95.02.17 接受：95.06.07



### 附錄 A：最惡法理論與實例分析結果

最差狀況模式（worst case, WC）又稱為極值法或區間法，主要是以工件最大及最小狀況組合計算其組合公差，此模式可以滿足完全互換性，組件公差最大但是相對組件公差其分配之零件公差較緊。決定公差堆疊的方法可以各組成尺寸公差的加成總和表示：

$$tol = tol_1 + tol_2 + \dots + tol_n \quad (\text{A-1})$$

其中  $tol$  為累計尺寸公差， $tol_i$  為第  $i$  個組成尺寸公差。

在指定裝配件公差的情況下，計算各零件公差方法為：

$$t_{wc} = \frac{t_0}{m} \quad (\text{A-2})$$

其中  $t_{wc}$  為各零件公差， $t_0$  為指定裝配件公差， $m$  為零件數量。

#### 1. 二件裝配之分析

基本尺寸：10.5-10.0=0.5

公差值：0.4+0.4=0.8

所得的機能需求尺寸為  $0.5 \pm 0.8$

#### 2. 雙孔雙銷之分析

線性規劃法下完全由尺寸公差定義之裝配公差分析值，不論孔中心距為最大值、銷中心距為最小值或銷中心距為最大值，孔中心線距為最小值之情況，當銷尺寸為最大值且孔尺寸為最小值時將產生配合的極值結合，此為裝配條件最不利的情況，最惡法便是在此種情況下計算最極端的公差值。圖 A-1 代表孔中心距為最大值、銷中心距為最小值之裝配，其裝配計算式為：

$$X_{CH} - \left( \frac{D_{H1}}{2} - \frac{D_{P1}}{2} \right) - \left( \frac{D_{H2}}{2} - \frac{D_{P2}}{2} \right) - X_{CP} = 0 \quad (\text{A-3})$$

將  $X_{CH}=100+x$ 、 $X_{CP}=100-x$  及孔的尺寸下限值、銷的尺寸上限值代入（A-3）式得到孔、銷中心距公差  $x=-0.025$ 。依據所得的  $x$  值可知，最惡法並不適合使用於此裝配情況之公差分析。

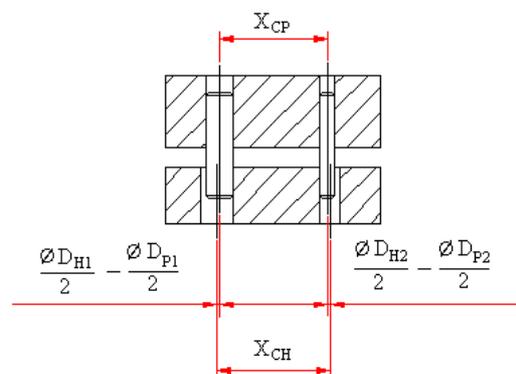


圖 A-1. 二孔二銷之極值配合



### 附錄 B：平方和之平方根法理論與實例分析結果

平方和之平方根法 (root sum square, RSS) 主要是以統計理論之變異代數法代表工件之公差，並以統計計算其組合變異數，此模式在分配為對稱時拒收率最小，公差堆疊的合是各組成公差的統計和，表示如下：

$$tol = [tol_1^2 + tol_2^2 + \dots + tol_n^2]^{1/2} \quad (A-4)$$

其中  $tol$  為累計尺寸公差， $tol_i$  為第  $i$  個組成尺寸公差。

在指定裝配件公差的情況下，計算各零件公差方法為：

$$t_{RSS} = \frac{t_0}{\sqrt{m}} \quad (A-5)$$

$t_{RSS}$  其中為各零件公差， $t_0$  為指定裝配件公差， $m$  為零件數量。

#### 1. 二件裝配之分析

基本尺寸：10.5-10.0=0.5

公差值： $[0.4^2 + 0.4^2]^{1/2} = 0.6$

所得的機能需求尺寸為  $0.5 \pm 0.6$

#### 2. 雙孔雙銷之分析

當所有尺寸為基礎尺寸時，也就是  $D_{P1} = 14.895$ ,  $D_{H1} = 15.035$ ,  $D_{P2} = 14.895$ ,  $D_{H2} = 15.035$ ，則孔與銷的間隙  $tol$  為  $D_{H1} - D_{P1} = D_{H2} - D_{P2} = 0.14$ ，代入 (A-6) 式：

$$0.14 = \left[ \left( \frac{0.055}{2} \right)^2 + \left( \frac{0.035}{2} \right)^2 + \left( \frac{0.055}{2} \right)^2 + \left( \frac{0.035}{2} \right)^2 + x^2 + x^2 \right] \quad (A-6)$$

由 (A-6) 式得到平方和之平方根法以 99.73% 裝配率的前提下所得之中心線尺寸公差值  $x$  為 0.263。

