

## 不同裂縫型態與修補試片之複合材料層板的應力強度因子

賴峯民 薛鈞騰 陳裕偉 曹季涵

大葉大學工業工程與科技管理學系

51591 彰化縣大村鄉學府路 168 號

### 摘 要

本文主要是運用 ANSYS 有限元素軟體進行複合材料裂縫試片及裂縫修補試片的應變及應力強度因子分析，以建立正確的模型分析及應力強度因子計算方法，其間並運用不同元素性質建立 ANSYS 分析模型，以文獻進行各種裂縫試片比對，以確認元素及建模方式的正確性。而實驗部分則利用樹脂轉注成形法 (resin transfer molding, RTM)、手積層堆疊法及碳纖預浸材製作不同複合材料裂縫試片 (雙邊裂縫、中央穿孔及中央裂縫) 及裂縫修補試片 (雙邊裂縫及中央裂縫修補)，來進行拉伸實驗，並求取各式試片的應變及應力強度因子之實驗數據，以模型分析理論值進行比對驗證。由文獻比對中得到較正確建模及邊界條件方式，透過實驗與模型分析數據進行比對來確認模型吻合性，也證實 ANSYS 有限元素軟體可用來模擬結構件在裂縫分析上之問題。

**關鍵詞：**裂縫，修補試片，應力強度因子，樹脂轉注

## Stress Intensity Factors of Composite Laminates with Different Types of Cracks and Patch Test Fragments

FENG-MIN LAI, CHUN-TENG HSUEH, YU-WEI CHEN and CHI-HAN TSAO

*Department of Industrial Engineering & Technology Management, Da-Yeh University*

*No. 168, University Rd., Dacun, Changhua 51591, Taiwan, R.O.C.*

### ABSTRACT

In this research, natural elements such as a plane, a solid, and a shell were used to build a model for analyzing various cracks therein for comparison with the literature to confirm the accuracy of the model. In the experiments, manufacturing methods such as resin transfer molding (RTM), the hand lay-up technique and carbon fiber prepreg of materials were used to produce different types of cracks such as bilateral, central, and centrally perforated in composite laminate samples as well as in a patch test fragment for a tensile test. A theoretical analysis of the model was used to compare and verify a variety of experimental data on the cracks therein with the tip stress intensity factor. This study primarily used ANSYS finite element software to analyze the strain and stress intensity factors of composite laminates and the cracks in a patch test fragment to establish an accurate analytical model and calculation method. Furthermore, ANSYS simulation to analyze the structure of cracks can be recommended.



**Key Words:** cracks, patch test fragments, stress intensity factors, resin transfer molding (RTM)

## 一、概論

破壞力學中裂縫研究其主要破壞行為分為三種 [3]，Mode I “張裂型 (opening mode)” 主要由正向應力造成破壞 (圖 1a)，Mode II “滑裂型 (sliding mode)” 主要由裂縫平面內剪切所造成破壞 (圖 1b)，Mode III “撕裂型 (tearing mode)” 由出平面 (out-of-plane) 剪應力所造成的平移破壞 (圖 1c)，本文主要討論以 Mode I 為主要研究方向。與金屬材料相較下複合材料對於裂縫的發生極為敏感，因此裂縫的產生會使得材料的機械性質大幅降低，因此在破壞力學為理論基礎輔佐下來探討裂縫前端附近的應力強度因子。

由張立恆 [1] 之中的裂縫方式 (雙邊裂縫、中央鑽孔) 利用 ANSYS 分析軟體進行不同裂縫試片的應力應變分析，與文獻進行數值比對來確立模型的正確性，在實驗方面運用樹脂轉注成形法 (resin transfer molding, RTM) 及手積法來製作玻纖複合材料積疊板的雙邊裂縫、中央圓孔及裂縫修補等不同裂縫型態的試片透過拉伸實驗來量測各種裂縫試片及修補試片的應變值，探討不同材料與分析之間比較。接續探討裂縫尖端不同型式之實驗與分析的結果。

藉由 Hüsnu Dirikolu 與 Aktaş [4] 及 Ouinas、Bouiadjra、Serier 與 SaidBekkouche [5] 探討計算  $K_I$  值分析裂縫尖端應力強度因子，利用 ANSYS 分析軟體進行不同裂縫試片及修補試片的應力應變分析及計算  $K_I$  值，比較文獻、實驗數據與 ANSYS 分析結果驗證 ANSYS 理論分析的準確性。並運用碳纖預浸材積疊板試片進行中央裂縫及修補，討論修補法對應力強度因子影響。

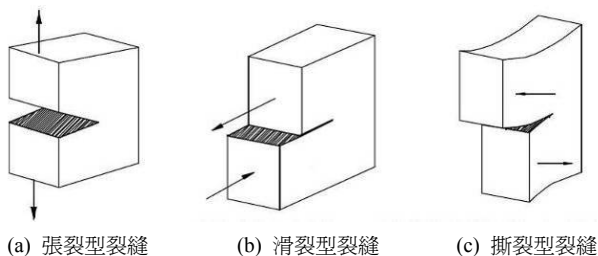


圖 1. 三種不同的破壞行為 [3]

## 二、研究方法

### (一) ANSYS 軟體之分析模型

本文利用 ANSYS 套裝軟體進行各種裂縫模式的模型建構與分析模擬，將 ANSYS 分析結果與文獻數據及實驗結果進行比對，確認 ANSYS 模型建構及邊界條件的設定與實驗實際狀況否相符合，圖 2 為分析之流程圖。

在 ANSYS 軟體進行各式裂縫尖端之應力強度因子分析中，裂縫試片採用的元素有 PLANE82 元素為 2D 元素其自由度為 UX 及 UY 方向，在此裂縫修補試片則選用 Solid95 元素為 3D 元素自由度為 UX、UY 及 UZ 方向種類如圖 3 所示。碳纖預浸材複合材料積疊板試片選用的元素有 SHELL91 元素為 3D 元素其自由度為 UX、UY、UZ、ROTX、ROTY 及 ROTZ 方向，在裂縫修補方面則選用 Solid186 元素為 3D 元素自由度為 UX、UY 及 UZ 方向如圖 3 所示 (ANSYS 11.0 Documentation)。

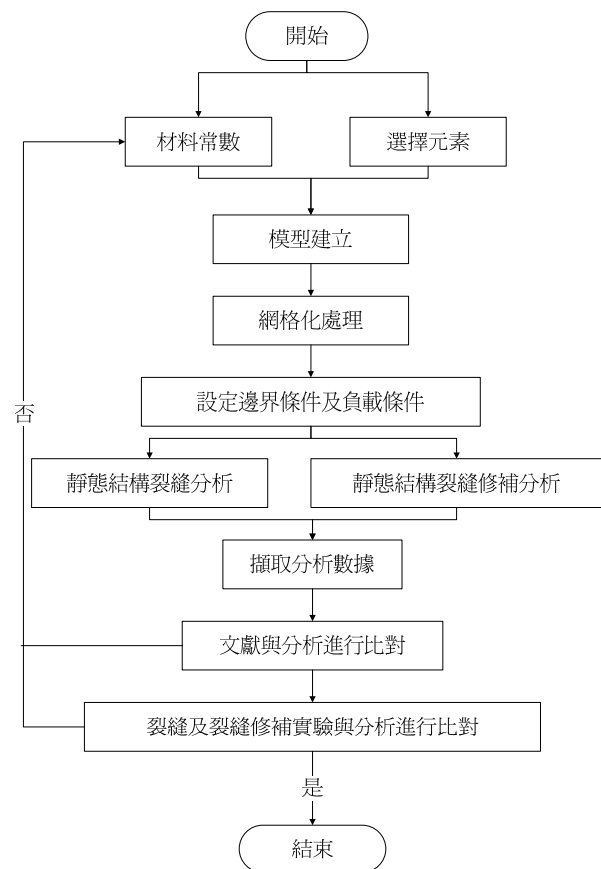


圖 2. ANSYS 分析流程圖



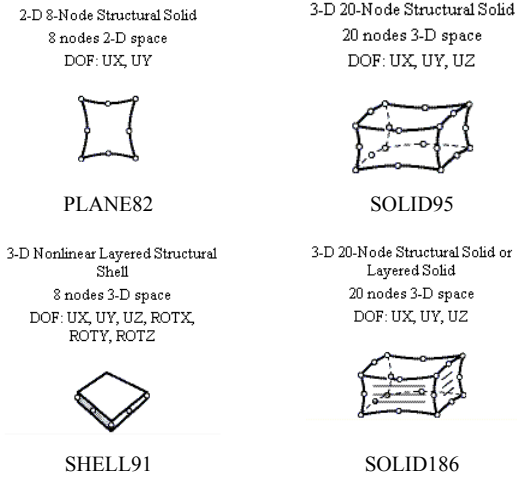


圖 3. 元素形式

(二) 裂縫尖端的應力與位移公式

在探討 Mode I 狀態下，在矩形平板上的任意裂縫座標方向性如圖 4 所示， $r$  為該點至裂縫尖端的距離， $\theta$  為由裂縫尖端  $x$  軸算起至該點的角度。

依需求 Mode I 的裂縫問題作為理論基礎。當材料性質為均向性時，其施力方向是垂直於裂縫面，所以位移是垂直於裂縫面。假設試片之裂縫位於  $XY$  平面上，施拉力於  $Y$  方向，而裂縫尖端應力可表示為(1)，其中  $r$  是裂縫的長度， $\theta$  是與裂縫面之夾角， $K_I$  是 Mode I 的應力強度因子。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 2 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

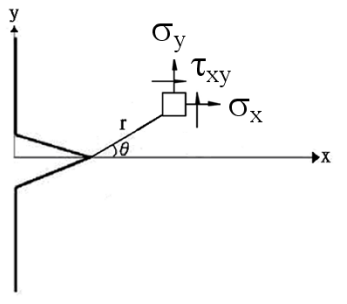


圖 4. 裂縫座標方向性

在 ANSYS 套裝軟體的裂縫分析是參考線性彈性破壞力學 (linear elastic fracture mechanics) 之裂縫應力強度因子計算理論 (使用內建指令 KCALC)，這個理論適用於裂縫尖端位移之分析，其參考公式如 (2) (3) (4) 式，其中  $u$ 、 $v$ 、 $w$  為卡氏座標如圖 5 所示 (ANSYS 11.0 Documentation)， $r$ 、 $\theta$  分別為距離裂縫尖端之距離與夾角， $G$  為剪切係數， $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  分別為 mode I、mode II 及 mode III 的應力強度因子， $\nu$  是浦松比， $0(r)$  為設定  $r$  值或更高的參數。

$$u = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2k-3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) + 0(r) \quad (2)$$

$$v = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2k-1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( (2k-3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + 0(r) \quad (3)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + 0(r) \quad (4)$$

$$k = \begin{cases} 3-4\nu & \text{為平面應變或非對稱軸} \\ \frac{3\nu}{1+\nu} & \text{為平面應力} \end{cases}$$

(三) 應力強度因子計算公式

資料中數據為各個應變規單軸所量測應變，參考張立恆 [1] 中由於試片的應力考慮為平面應變 (plane strain)，黏貼應變規時盡量避開裂縫尖端塑性區，將應變規的量測點視為線性彈性應變場。其中  $\sigma_y$  為應力、 $\nu$  為波松比、 $E$  為彈性系數  $\epsilon$  為應變。其中  $a$  為裂縫長度 (m)， $w$  試片寬度 (m)， $\sigma$  為應力 (MPa)。

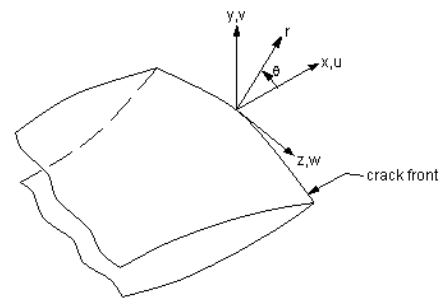


圖 5. 裂縫各參數之方向性



$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_y \quad (5)$$

雙邊裂縫在換算應力強度因子 SIF (stress intensity factor) 透過公式 (6) 求解  $K_I$  的計算。

$$Y = 1.99 + 0.76\left(\frac{a}{w}\right) - 8.48\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{w}\right)^3$$

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad (6)$$

應力集中係數的定義為：實際最大應力 ( $\sigma_{max}$ ) 與公稱應力 ( $\sigma_{nom}$ ) 透過公式 (7)。參考 Pilkeyk [6]，本文也依其解為依據。中央穿孔應力集中係數 (stress concentration factor, SCF) 透過公式 (8) 求解 K 值。其中  $p$  力量係數， $t$  試片厚度 (m)， $w$  試片寬度 (m)， $r$  中央穿孔孔徑 (m)。

$$\sigma_{nom} = \frac{p}{t(w-2r)} \quad (7)$$

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (8)$$

(四) 複材雙邊尖端裂縫之 Ansys 建模與分析

在平板試片的裂縫分析中，主要求解的應變方向為 X 軸向，又因材料疊層為均向性，所以在元素選用方面則使用 2D 元素 (PLANE82) 進行分析，裂縫尖端會探討 v 形端與圓弧端的應變差異如圖 6，分析模擬結果與實驗進行探討比對。在所以分析中，試片尺寸為標準複材試片大小 240 mm×25.4 mm 其中間距為 138.4 mm，在二分之一模的試片尺寸大小為 138.4 mm×12.7 mm。

(五) 雙邊裂縫與中央圓孔試片之 ANSYS 建模與分析

在雙邊裂縫與中央圓孔分析中，使用元素為 2D 元素 (PLANE82) 進行分析，由於材料疊層為均向性，建構二分之一模型進行分析比較，其雙邊裂縫建模與中央圓孔建模

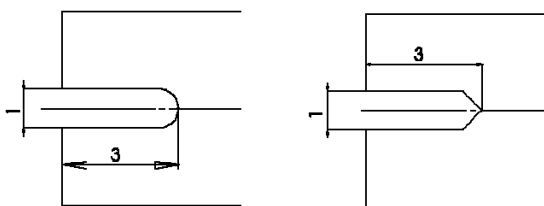


圖 6. v 形尖端與圓弧端的差異 (單位: mm)

邊界條件設定上，取半模之邊線設定為對稱軸，最下方為 UY 方向固定，上方則在線上施於平均應力，其雙邊裂縫與中央圓孔縫邊界條件示意圖如圖 7 所示。

(六) 雙邊複材裂縫修補試片之 ANSYS 建模與分析

分析過程中我們使用典型的三維有限元素模型 SOLID95，以 20 個節點立體結構元素進行網格化處理，在裂縫尖端區域交會部分需設定為四分之一奇異元素 [3] 如圖 8 修補片、膠層及裂縫薄板厚度分割數量為 1、1、4 層建構模型如圖 9 所示，由於材料疊層方式為類似均向材質，在模型建構上以四分之一設計減少運算時間，邊界條件設定方面定義節點拘束條件為對稱方式，在裂縫裂縫節點的部份則不限制任何拘束條件，在負載條件上將力平均負載在施力邊線上如圖 10 所示。

(七) 複材中間裂縫無修補之 ANSYS 建模與分析

碳纖預浸材積疊板試片無修補裂縫分析中，使用元素為 3D 元素 (SHELL91) 進行分析，由於材料性質為非等向性

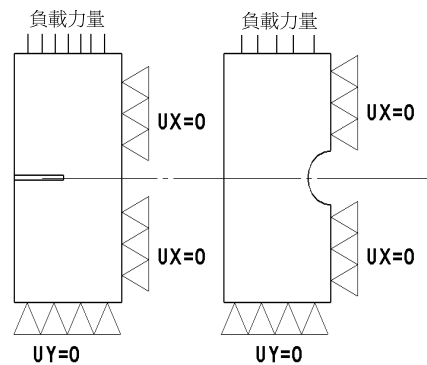


圖 7. 雙邊裂縫與中央穿孔條件設定

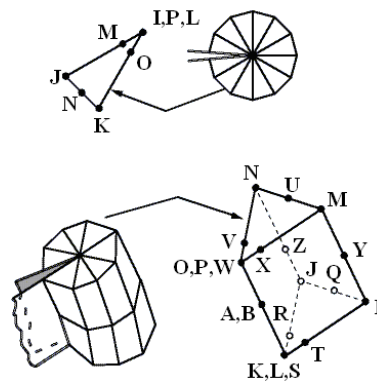


圖 8. 裂縫尖端奇異元素設定



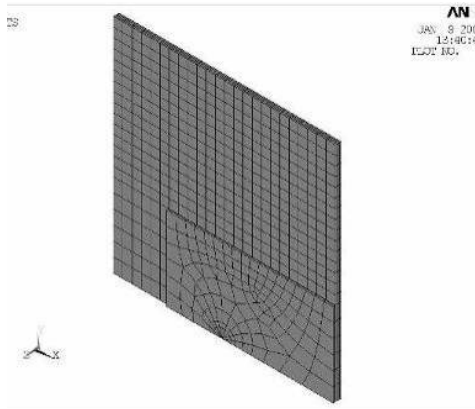


圖 9. 修補建模網格視意圖

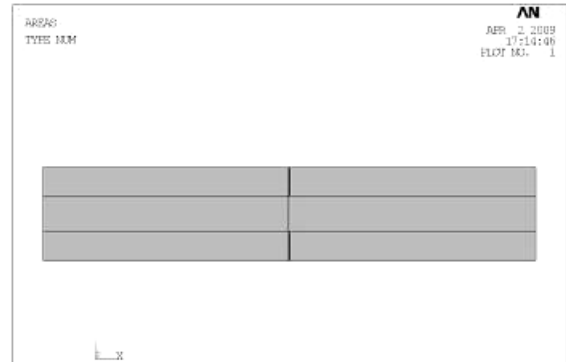


圖 11. 全模建模示意圖

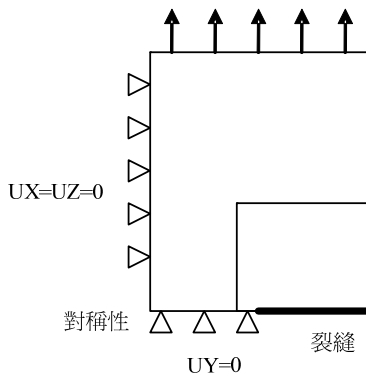


圖 10. 邊界條件設定示意圖

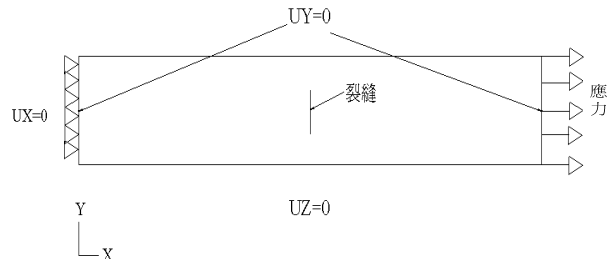


圖 12. 碳纖預浸材邊界條件設定示意圖

以試片全模來建構分析其尺寸為 138.4 mm×25.4 mm 如圖 11 所示，邊界條件設定上試片一端上的 node 點為 UX 方向固定，另一端則設定應力平均分佈在另一端的 node 點上，其二端的中央 node 點設定 UY 方固定，最後將所有的 node 點設定完全固，定其邊界條件示意圖如圖 12 所示，其裂縫大小為 10 mm×0.1 mm。

(八) 複材中間裂縫修補試片之 ANSYS 建模與分析

分析過程中我們使用可設定疊層之 3D 限元素模型 SOLID186，以 20 個節點立體結構元素進行網格化處理，建模方式及邊界條件上，設定衣無修補試片方式建構如圖 12 所示，修補片、膠層及裂縫薄板厚度分割數量為 1、1、4 層建構模型如圖 13 所示。

(九) 複合材料性質分析運用

本文所探討玻璃纖維複合材料方面為 [0/90] 十字疊針織布，因此單層視為均向疊層，由於不同疊序對於複合材料的機械性質有極大的影響，其內容為複合材料性質由於張立

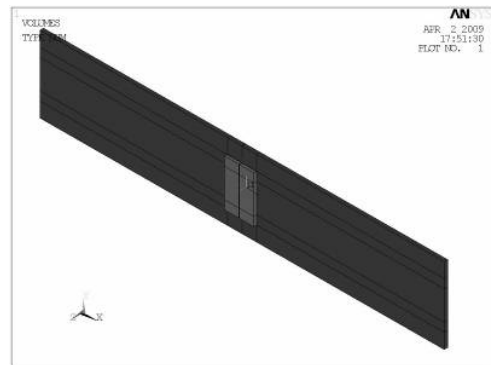


圖 13. 碳纖試片修補建模示意圖

恆 [1] 所表示的疊層為 [0/90]<sub>4s</sub> 十字疊 (cross-ply) 與 [0/45/90/-45]<sub>2s</sub> 類似均向疊 (quasi-isotropic)，所提供的材料性質為均向性，因此在本文 ANSYS 分析與文獻之驗證採用的複合材料性質視為均向性質。本文透過拉伸實驗證實樹脂轉注成形法 (RTM) 與手積層堆疊法製作之玻纖試片為均向性質。但在 Ayatollahi [2] 修補片所提供的材料性質為非等向性，因此在修補片分析部分也回歸到非等向性進行比較。



### 三、研究步驟

#### (一) 試片製作

##### 1. 手積層堆疊法試片

材料準備先將玻璃纖維布切成須要的大小，將樹脂與硬化劑以 2:1 的比例均勻混合。在塗層過程中墊上一層玻璃紙防止樹脂外漏，將每一層玻璃布交疊並均勻的塗上樹脂，疊完後蓋上一層玻璃紙滾輪將氣泡擠出，氣泡擠出後靜置約 8 個小時等待硬化如圖 14，再用鑽石切割機裁切所需的試片大小如圖 15，並在試片二端黏貼玻璃纖維墊片防止試片在拉伸夾治具時產生破壞或應力集中現象，其成品試片如圖 16。

##### 2. 樹脂轉注成形法 (RTM) 試片

先將玻璃纖維布切成需要的大小放入平板模具中如圖 17 所示，將模具進行抽真空加壓的動作，目的是為了防止在轉注時產生氣泡破壞結構強度，再以混合好的樹脂溶液透過轉注成型機如圖 18 所示，待模具溫度冷卻後開模取出成品。為了獲得高品質之成品需有效控制各個步驟，所使用的樹脂為熱固性樹脂，均勻混合後，即可產生反應並硬化形



圖 17. 平板模具



圖 18. 轉注成行機



圖 14. 玻纖布與樹脂混合板

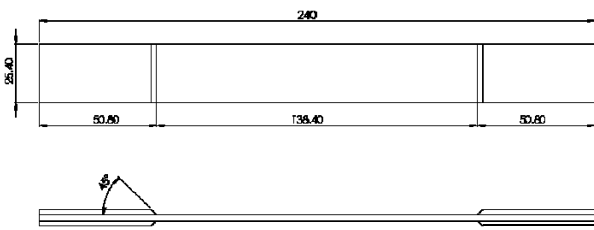


圖 15. 複材試片尺寸示意圖



圖 16. 試片成品示意圖

成固體。通常用於 RTM 的樹脂為高溫硬化樹脂，因此在常溫混合後需經較長的時間才會硬化，在硬化前必需將樹脂注入模具內，使其均勻含浸模具內的纖維，待加溫硬化樹脂後，即形成複合材料。規範 ASTM-D3039 中將複材試片製成標準試片其規格如圖 15，依照裂縫不同在製作不同的試片。

在雙邊裂縫與中央圓孔之試片製作方面，其中雙邊裂縫使用鑽石切割機切割成形，而中央穿孔的部分則使用高速鑽孔機成形，本文實驗中所製作的裂縫型態有：

- (1) 手積法及 RTM 雙邊裂縫，裂縫長度 3 mm (圖 19)。
- (2) 手積法中央圓孔，孔徑為 2 mm、4 mm 及 6 mm (圖 20)。
- (3) 手積法未修補雙邊裂縫，裂縫長度 6 mm (圖 21)。
- (4) 手積法有補雙邊裂縫，裂縫長度 6 mm、補片 9 mm×18 mm (圖 22)。



圖 19. 雙邊裂縫





圖 20. 中央圓孔



圖 21. 未修補雙邊裂縫



圖 22. 有補雙邊裂縫

### 3. 碳纖預浸材裂縫試片及修補試片

碳纖預浸材是單向長纖複合材料，預先裁切出 250 mm×250 mm 之尺寸，依所須角度做疊層黏合的動作，由於碳纖預浸材進入高溫後會變的非常堅硬，因此會先在疊層完的試片上先割出約 10 mm 的預裂縫，再將疊層試片加壓送入烤箱進行 120°C 時間為 2 個小時之製程，其成品如圖 23 所示，透過鑽石切割機進行裁切出標準試片之大小。

碳纖修補片製作流程如上述，不需進行預裂縫的步驟，在透過鑽石切割機進行裁切所需的補片大小，其無修補片與有修補片之試片如圖 24 所示。

#### (二) 實驗量測方式

材料機械性質實驗測試利用的設備及耗材有 MTS 拉伸



圖 23. 碳纖預浸材積疊板



圖 24. 碳纖預浸材試片示意圖

試驗機如圖 25 所示、KFRP-5-120-C1-1 應變規（規格為內徑 3 mm×1.3 mm 外緣為 7.4 mm×2.8 mm）及 PCD-300A 取值系統如圖 26。主要在量測試片材料之材料性質常數及裂縫試片強度。各種製程的雙邊裂縫及中央鑽孔試片分別在距離裂縫端約 3.5 mm 及 6 mm 的部分黏貼應變規如圖 27 所示，中央穿孔則以孔緣距離約 3.5 mm 處黏貼應變規如圖 27 所示。而碳纖預浸材中央裂縫試片在距離中間裂縫端約 3 mm 黏貼應變規（圖 28 所示），經由取值軟體讀取試片在拉伸過程中的應變值及力量值。



圖 25. MTS 拉伸試驗機



圖 26. PCD-300A 取值系統



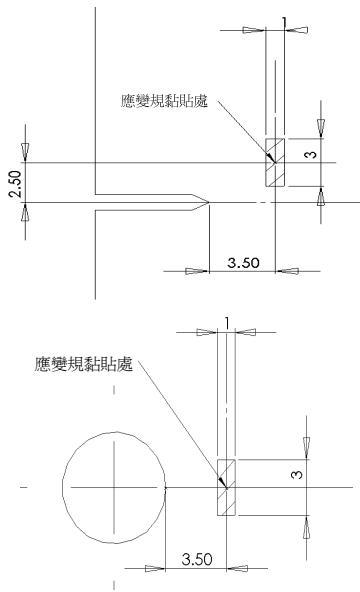


圖 27. 雙邊裂縫及中央穿孔應變規貼佈示意圖

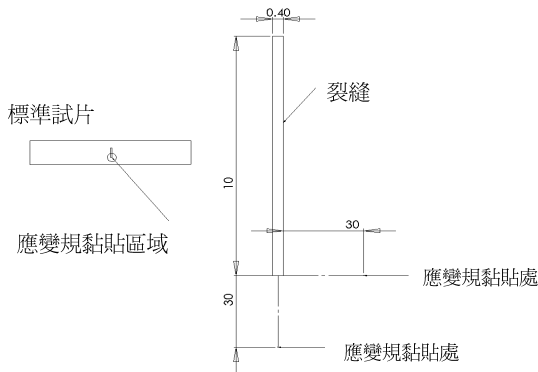


圖 28. 碳纖中央裂縫試片應變規貼佈示意圖

(三) 材料性質 (檢測—楊氏係數與波松比)

實驗中各材料參數, 透過文獻及靜態拉伸測試的材料性質如表 1。

表 1. 材料基本各項參數表

編號	材料	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub> , E <sub>3</sub>	v <sub>12</sub> , v <sub>13</sub>	v <sub>23</sub>	G <sub>12</sub> , G <sub>13</sub>	G <sub>23</sub>
1	[0/45/90/-45] <sub>2s</sub> 複材	51.468			0.3240		
2	[0/90] <sub>4s</sub> 複材	76.957			0.0475		
3	手積層法	23.500			0.3000		
4	RTM	15.770			0.3000		
5	黏著劑	0.970			0.3200		
6	玻纖預浸材	36.540	8.65	0.31	0.3100	2.89	0.72
7	碳纖預浸材	124.200	8.53	0.27	0.2500	4.11	1.04

註: E,G 值單位為 GPa; 編號 1~2 參張立恆 [1]; 編號 3~6 為實驗求值。

四、結果與討論

(一) 裂縫尖端分析形狀之實驗比較

將實驗中的應力應變值與尖端分析及尖端導圓角進行應力應變比較其差異值, 表 2 為各型態之應力應變比較與實驗值。其中試片編號 1、2 長寬均為 240 mm×25.4 mm、厚度分別為 2.69 mm 及 3.32 mm、裂縫 3 mm 玻纖手積堆疊法, 試片編號 3 為雙邊裂縫 RTM 試片, 試片尺寸 240 mm×25.4 mm、裂縫 3 mm、厚度 4.42 mm, ANSYS 建模中使用 PLANE82 元素建模。表 3 為各型態應變比較誤差值, 因 ANSYS 分析中 V 型建模與實驗值誤差遠小於 U 型建模, 故本文雙邊裂縫試片的 ANSYS 建模採用 V 型建模。

(二) 本文 ANSYS 分析與文獻比較

雙邊裂縫 3 mm [0/45/90/-45]<sub>2s</sub> 之 ANSYS 分析與張立恆 [1] 實驗值之比較, 圖 29 為應力值比較圖 30 為應變值比較其中應變最大及最小差異為 15.17% 及 5.05%, 應力最大及最小差異分別為 25.36% 及 12.62%。

表 2. 裂縫尖端 V 型與 U 型應變應力比較 (1KN)

試片編號	量測距離 (mm)	應變規量測應變 ε <sub>y</sub> (10 <sup>-6</sup> )		
		實驗值 (a)	Ansys V 型建模分析 (b)	Ansys U 型建模分析 (c)
1	3.5	792.93	794.56	750.73
2	3.5	852.38	643.78	608.27
	6	595.24	604.83	504.60
3	3.5	873.74	723.22	684.05
由應力計算應力 σ <sub>y</sub> (MPa)				
1	3.5	19.646	18.46	17.39
2	3.5	21.119	14.95	14.09
	6	14.748	14.50	11.86
3	3.5	15.142	11.23	10.58

表 3. 裂縫尖端 V 型與 U 型誤差比較

試片編號	量測距離 (mm)	實驗與分析應變誤差值比較	
		$\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$	$\left  \frac{a-c}{a} \right  \times 100\%$
1	3.5	0.20%	5.62%
2	3.5	32.40%	40.13%
	6	1.59%	17.96%
3	3.5	20.81%	27.73%
實驗與分析應力誤差值比較			
1	3.5	6.45%	13.01%
2	3.5	41.23%	49.93%
	6	1.71%	24.37%
3	3.5	34.81%	43.11%





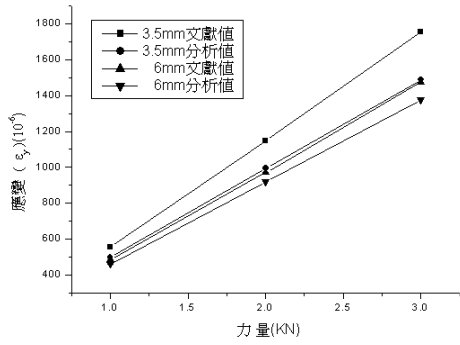


圖 29. 雙邊裂縫 [0/45/90/-45]<sub>2S</sub> 的應變值之比較

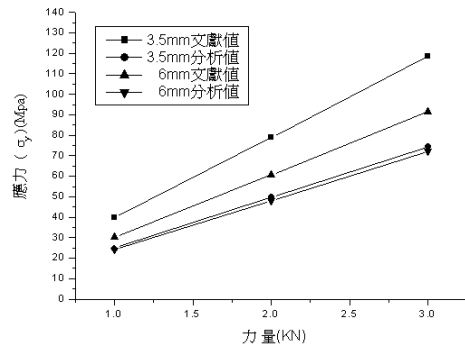


圖 32. 雙邊裂縫 [0/90]<sub>4S</sub> 的應力值之比較

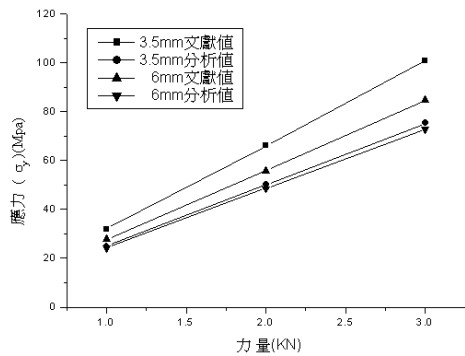


圖 30. 雙邊裂縫 [0/45/90/-45]<sub>2S</sub> 的應力值之比較

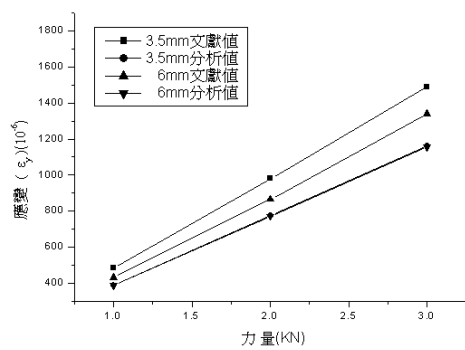


圖 33. 2 mm 中央穿孔 [0/45/90/-45]<sub>2S</sub> 的應變值之比較

雙邊裂縫 [0/90]<sub>4S</sub> ANSYS 分析的應力應變比較與張立恆 [1] 實驗值之比較，圖 31 為應力值比較圖 32 為應變值比較，其中應變最大及最小差異分別為 37.27% 及 20.59%，應力最大及最小差異分別為 37.56% 及 20.44%。

圖 33-38 分別為中央穿孔 2 mm、4 mm、6mm [0/45/90/-45]<sub>2S</sub> 之 ANSYS 分析的應力應變比較與張立恆 [1] 實驗值之比較。其中圖 33 為孔徑 2 mm 應變最大及最小差

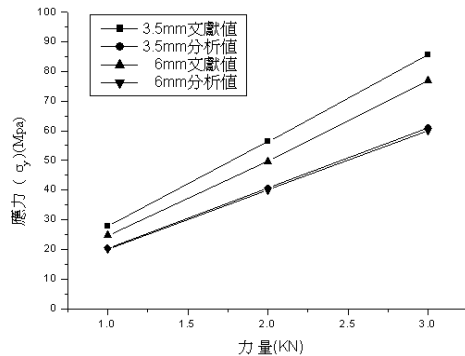


圖 34. 2 mm 中央穿孔 [0/45/90/-45]<sub>2S</sub> 的應力值之比較

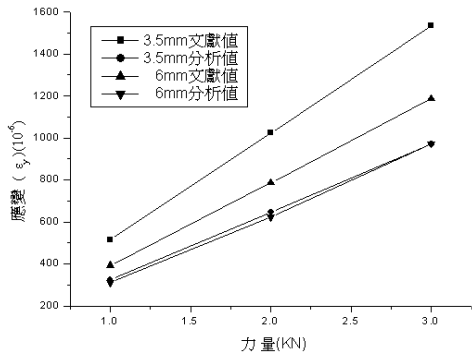


圖 31. 雙邊裂縫 [0/90]<sub>4S</sub> 的應變值之比較

異分別為 22.03% 及 10.46%，圖 34 為孔徑 2 mm 應力最大及最小差異分別為 28.67% 及 19.20%。圖 35 為孔徑 4 mm 應變最大及最小差異分別為 11.65% 及 7.75%，圖 36 為孔徑 4 mm 應力最大及最小差異分別為 19.32% 及 13.33%。圖 37 孔徑為 6 mm 應變最大及最小差異分別為 22.47% 及 20.25%，圖 38 為孔徑 6 mm 應力最大及最小差異分別為 26.57% 及 25.29%。



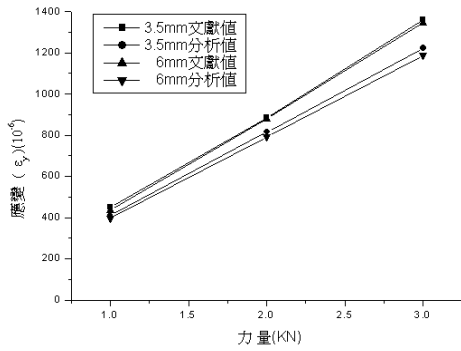


圖 35. 4 mm 中央穿孔 [0/45/90/-45]<sub>2s</sub> 的應變值之比較

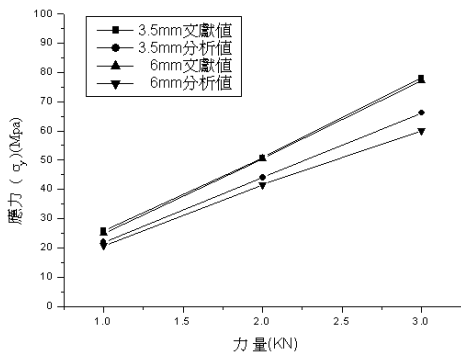


圖 36. 4 mm 中央穿孔 [0/+45/90/-45]<sub>2s</sub> 的應力值之比較

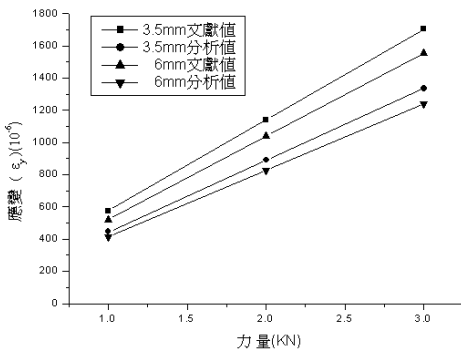


圖 37. 6 mm 中央穿孔 [0/+45/90/-45]<sub>2s</sub> 的應變值之比較

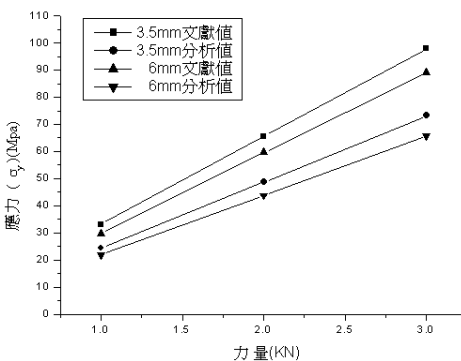


圖 38. 6 mm 中央穿孔 [0/+45/90/-45]<sub>2s</sub> 的應力值之比較

圖 39-44 分別為中央穿孔 2 mm、4 mm、6 mm [0/90]<sub>4s</sub> 之 ANSYS 分析的應力應變比較與張立恆 [1] 實驗值之比較。其中圖 39 孔徑為 2 mm 應變最大及最小差異分別為 9.01% 及 1.74%，圖 40 為孔徑 2 mm 應力最大及最小差異分別為 22.58% 及 11.01%。圖 41 為孔徑 4 mm 應變最大及最小差異分別為 19.09% 及 0.12%，圖 42 為孔徑 4 mm 應力最大及最小差異分別為 25.99% 及 4.50%。圖 43 孔徑為 6 mm 應變最大及最小差異分別為 24.99% 及 6.64%，圖 44 孔徑為 6 mm 應力最大及最小差異分別為 14.19% 及 0.55%。

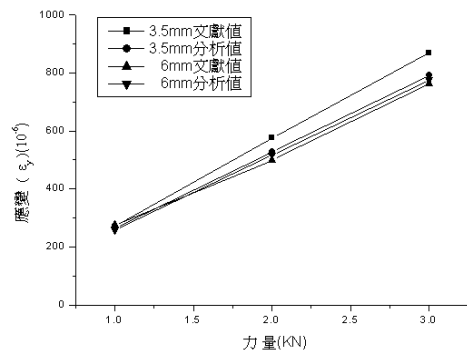


圖 39. 2 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4s</sub> 的應變值之比較

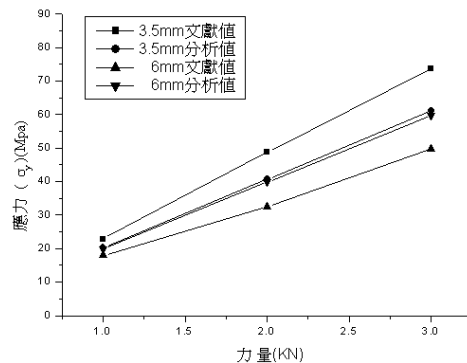


圖 40. 2 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4s</sub> 的應力值之比較

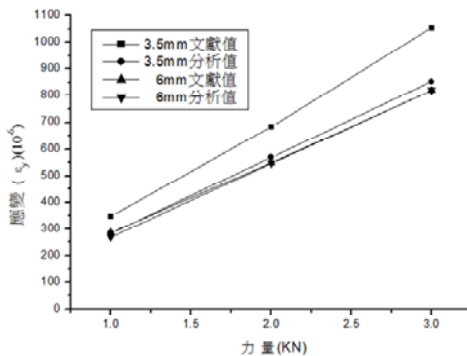


圖 41. 4 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4s</sub> 的應變值之比較



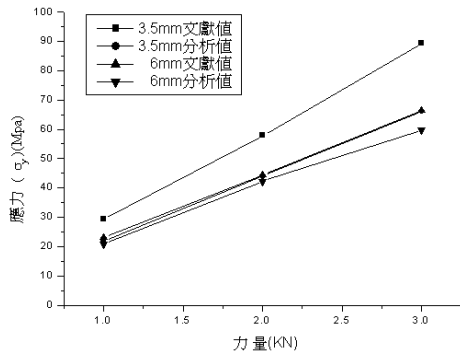


圖 42. 4 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4S</sub> 的應力值之比較

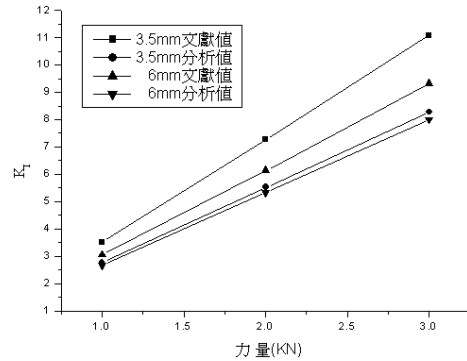


圖 45. 雙邊裂縫 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> K<sub>1</sub> 值之比較

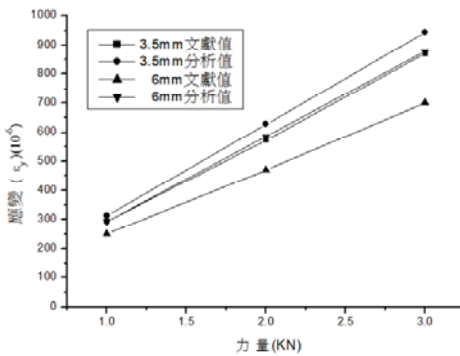


圖 43. 6 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4S</sub> 的應變值之比較

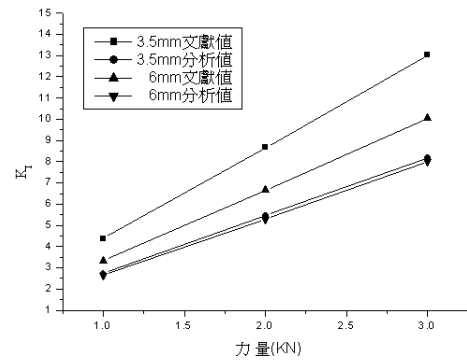


圖 46. 雙邊裂縫 [0/90]<sub>4S</sub> K<sub>1</sub> 值之比較

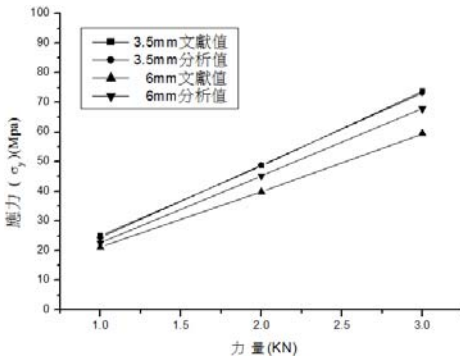


圖 44. 6 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4S</sub> 的應力值之比較

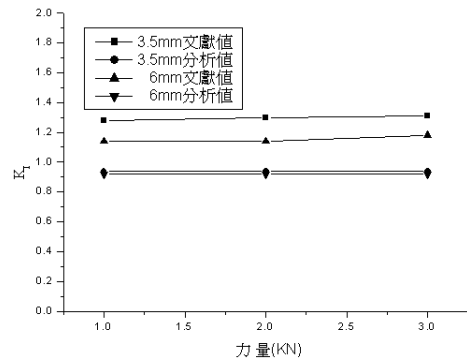


圖 47. 2 mm 中央穿孔 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 的 K<sub>1</sub> 值之比較

圖 45-52 分別為雙邊裂縫 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 及 [0/90]<sub>4S</sub> 與張立恆 [1] 的 K<sub>1</sub> 值之比較。利用公式 (6) 來計算 K<sub>1</sub> 值，圖 45 為雙邊裂縫 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 之 K<sub>1</sub> 值最大及最小差異分別為 25.36% 及 12.62%。圖 46 為雙邊裂縫 [0/90]<sub>4S</sub> 之 K<sub>1</sub> 值最大及最小差異分別為 37.56% 及 20.44%。圖 47-49 為分別為中央穿孔 2 mm、4 mm、6 mm [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 及 [0/90]<sub>4S</sub> 與張立恆 [1] 的 K<sub>1</sub> 值之比較，利用公式 (8) 來計算 K<sub>1</sub> 值，其中量測距離分別為 3.5 mm 與 6 mm 處。在圖 50-52

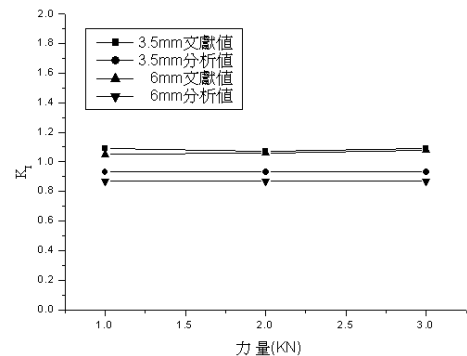


圖 48. 4 mm 中央穿孔 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 的 K<sub>1</sub> 值之比較



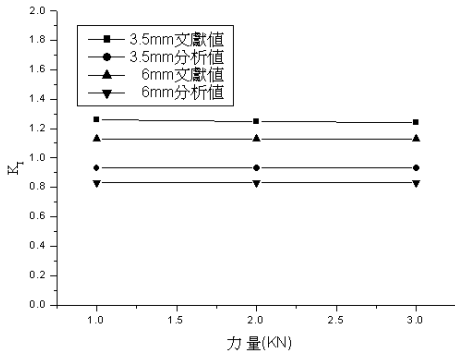


圖 49. 6 mm 中央穿孔 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 的 K<sub>I</sub> 值之比較

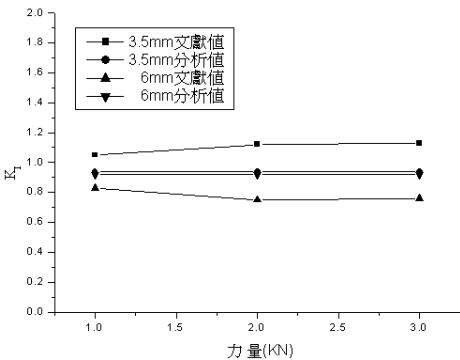


圖 50. 2 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4S</sub> 的 K<sub>I</sub> 值之比較

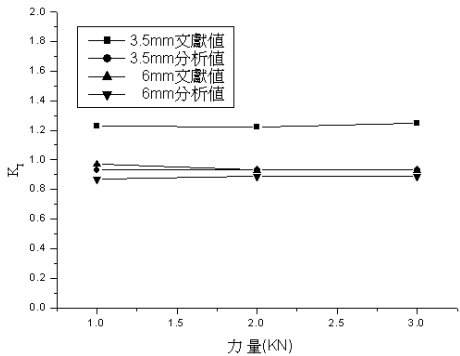


圖 51. 4 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4S</sub> 的 K<sub>I</sub> 值之比較

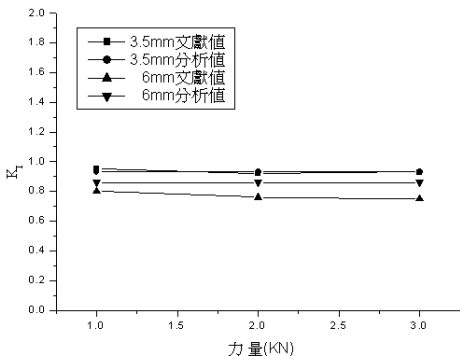


圖 52. 6 mm 中央穿孔 [0/90]<sub>4S</sub> 的 K<sub>I</sub> 值之比較

為 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 之 K<sub>I</sub> 值最大及最小差異分別為 28.67% 及 19.20%。

由上列所整理出的數據可了解雙邊裂縫對 K<sub>I</sub> 影響較大，分析上對於 [0/+45/90/-45]<sub>2S</sub> 的疊層方式有比較接近文獻數據。在中央穿孔的部分對 K<sub>I</sub> 的影響較不明顯，推測中央穿孔比較沒有應力集中的效應，而孔徑越大所產生的應變也相對提升。

在修補裂縫 Ayatollahi 與 Hashemi [2] 中與 ANSYS 分析做 K<sub>I</sub> 值之比對驗證，其中又有分中間裂縫與雙邊裂縫，分析中的材料係數使用表 1 中的材料係數，在基板試片使用 Aluminum，修補片則分成 Boron/epoxy 與 Graphite/epoxy，本文使用 ANSYS 之 SOLID95 元素建模，邊界條件設定如圖 10 所示，而中央裂縫邊界限制條件採用裂縫側邊進行對稱設定。本文分析的裂縫尖端之應力強度因子 (K<sub>I</sub>) 與 Ayatollahi [2] 進行比較與驗證，如表 4 所示，其中差異性均在 13%。

(三) ANSYS 分析與實驗比較

1. 手積法與 RTM 裂縫試片的實驗與分析之比較

表 5 為試片資料整理表，依照各參數不同進行不同試片之實驗，其中實驗裂縫型態、實驗材料、尺寸及疊層層數進行實驗編號，每組皆實驗二次將數據取平均為平均實驗值。其表 6 為雙邊裂縫 [0/90]<sub>8</sub> 手積法與 RTM 應變最大及最小差異分別為 26.55% 及 3.84%，應力最大及最小差異分別為 28.76% 及 0.88%。表 7 分別為中央穿孔 2 mm、4 mm、6 mm [0/90]<sub>6</sub> 及 [0/90]<sub>8</sub> 手積法與不同製程試片的 RTM 不同製程試

表 4. 本文分析結果與 Ayatollahi [2] K<sub>I</sub> 理論值之比對

補片類型	裂縫類型	裂縫 (mm)	Ayatollahi [2] K <sub>I</sub> (a)	分析之 K <sub>I</sub> (b)	誤差 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$
無	中央	6	39.11	36.5	7.14%
無		4.8	32.72	30.4	7.64%
B/E	中央	6	20.01	21.7	7.77%
B/E		4.8	18.02	20.5	12.11%
G/E	中央	6	23.51	23.6	0.39%
G/E		4.8	21.10	22.7	7.07%
無	雙邊	6	38.39	34.3	11.93%
無		4.8	33.35	31.2	6.88%
B/E	雙邊	6	25.85	23.6	9.55%
B/E		4.8	23.34	24.3	3.95%
G/E	雙邊	6	27.98	25.2	11.04%
G/E		4.8	25.12	22.4	12.16%

註：B/E 為 Boron/epoxy；G/E 為 Graphite/epoxy。



表 5. 試片資料整理表

編號	裂縫型態及實驗材料	尺寸 (mm)	層數
A	雙邊裂縫 (玻纖布+樹脂)	裂縫 3 厚度 2.64	8 層
B	雙邊裂縫 (玻纖布+樹脂)	裂縫 3 厚度 3.33	8 層
C	雙邊裂縫 (RTM)	裂縫 3 厚度 4.42	8 層
D	中央穿孔裂縫 (玻纖布+樹脂)	孔徑 2 厚度 2.7	8 層
E	中央穿孔裂縫 (玻纖布+樹脂)	孔徑 4 厚度 2.7	8 層
F	中央穿孔裂縫 (玻纖布+樹脂)	孔徑 6 厚度 2.7	8 層
G	中央穿孔裂縫 (玻纖布+樹脂)	孔徑 2 厚度 2.1	6 層
H	中央穿孔裂縫 (玻纖布+樹脂)	孔徑 4 厚度 2.1	6 層
I	中央穿孔裂縫 (玻纖布+樹脂)	孔徑 6 厚度 2.1	6 層

片的平均實驗與 ANSYS 分析的應力應變值之比較。其中疊層 8 層之應變最大及最小差異分別為 23.87% 及 14.29%，

應力最大及最小差異分別為 22.67% 及 9.85%，而疊層 6 層時應變最大及最小差異分別為 51.94% 及 40.47%，應力最大及最小差異分別為 44.66% 及 41.05%。圖 53 為手積法雙邊裂縫破壞情形，圖 54 為手積法中央穿孔破壞情形，圖 55 為 RTM 雙邊裂縫破壞情形。

表 8 為雙邊裂縫 [0/90]<sub>8</sub> 與實驗的 K<sub>I</sub> 值比較，其中雙邊裂縫 [0/90]<sub>8</sub> 之 K<sub>I</sub> 值最大及最小差異分別為 28.76% 及 0.14%。表 9 為為中央穿孔 2 mm、4 mm、6 mm [0/90]<sub>6</sub> 及 [0/90]<sub>8</sub> 與實驗的 K<sub>I</sub> 值比較。其中中央穿孔 2 mm、4 mm、6 mm [0/90]<sub>6</sub> 及 [0/90]<sub>8</sub> 之 K<sub>I</sub> 值最大及最小差異分別為 44.65% 及 7.68%。

依數據結果中央穿孔誤差只有比較明顯的差異，探討其

表 6. 本文雙邊裂縫 [0/90]<sub>8</sub> 的實驗與分析比較 (單位: MPa)

試片編號	實驗應變值 $\epsilon_y$ (a)			ANSYS 分析應變值 $\epsilon_y$ (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
A	765.15	1467.15	1994.95	794.55	1589.11	2383.66	3.84%	8.31%	19.48%
B	873.81	1542.85	2364.30	641.85	1283.70	1925.54	26.55%	16.80%	18.56%
C	873.74	1298.00	1742.40	723.22	1446.44	2169.66	17.23%	11.44%	24.52%
試片編號	實驗應力值 $\sigma_y$ (a)			ANSYS 分析應力值 $\sigma_y$ (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
A	17.39	30.08	43.00	18.46	36.91	55.37	6.11%	22.71%	28.76%
B	18.13	31.42	45.12	14.91	29.82	44.73	17.77%	5.11%	0.88%
C	15.14	22.49	30.20	11.23	22.46	33.69	25.82%	0.14%	11.59%

表 7. 本文中央穿孔 [0/90]<sub>6</sub> 的實驗與分析比較 (應變單位:  $10^{-6}$ ) (應力單位: MPa)

試片編號	實驗應變值 $\epsilon_y$ (a)			ANSYS 分析應變值 $\epsilon_y$ (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
D	567.68	1113.00	1653.50	634.74	1269.48	1904.22	11.81%	14.06%	15.16%
E	601.53	1179.80	1763.15	674.19	1348.38	2022.57	12.08%	14.29%	14.71%
F	602.81	1196.57	1790.13	739.15	1478.31	2217.46	22.62%	23.55%	23.87%
G	1516.35	3277.95	5074.95	813.07	1626.14	2439.21	46.38%	50.39%	51.94%
H	1443.25	3030.35	4773.10	863.61	1727.21	2590.82	40.16%	43.00%	45.72%
I	1549.40	3181.25	5082.05	946.82	1893.64	2840.46	38.89%	40.47%	44.11%
試片編號	實驗應力值 $\sigma_y$ (a)			ANSYS 分析應力值 $\sigma_y$ (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
D	14.07	27.58	40.97	15.15	30.29	45.44	7.68%	9.85%	10.91%
E	14.90	29.23	43.69	16.39	32.77	49.16	9.95%	12.12%	12.53%
F	14.94	29.65	44.35	18.14	36.27	54.41	21.43%	22.35%	22.67%
G	37.57	81.22	125.74	19.40	38.80	58.20	48.36%	52.22%	53.71%
H	35.76	75.08	118.26	20.99	41.98	62.97	41.30%	44.09%	46.75%
I	38.39	78.82	125.92	23.23	46.46	46.46	39.48%	41.05%	44.66%





圖 53. 手積法雙邊裂縫破壞情形

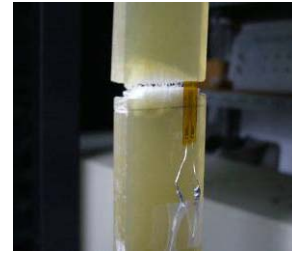


圖 55. RTM 雙邊裂縫破壞情形

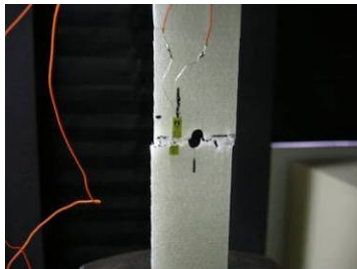


圖 54. 手積法中央穿孔破壞情形

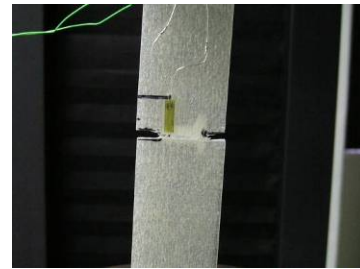


圖 56. 手積法未修補破壞情況

原因可能是在製作孔洞時試片內部纖維遭到高速鑽孔機破壞，造成量測應變強度有所差異在本文不做深入討論。

## 2. 手積法未修補及有修補片的實驗與分析比較

分析中的材料常數參考表 1，邊界條件設定則參考圖 10-11，未修補破壞情況如圖 56，修補後破壞情況如

圖 57。圖 58-59 為未修補及修補之雙邊裂縫應變及應力比較關係，其中修補片的疊層層數為 8 層厚度 2.71 mm，其中未修補應變最大及最小差異分別為 11.91% 及 3.83%，應力最大及最小差異分別為 8.46% 及 0.07%，修補後應變最大及最小差異分別為 5.67% 及 0.86%，應力最大及最小差異分

表 8. 本文雙邊裂縫  $[0/90]_6K_1$  實驗與分析比較 (單位: MPa)

試片編號	張立恆 [1] 計算後 $K_I$ 值 (a)			ANSYS 分析 $K_I$ 值 (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
A	1.91	3.31	4.73	2.03	4.06	6.08	6.11%	22.71%	28.76%
B	1.99	3.45	4.96	1.64	3.28	4.92	17.77%	5.11%	0.88%
C	1.66	2.47	3.32	1.23	2.47	3.70	25.82%	0.14%	11.59%

表 9. 本文中央穿孔  $[0/90]_6K_1$  實驗與分析比較

試片編號	張立恆 [1] 計算後 $K_I$ 值 (a)			ANSYS 分析 $K_I$ 值 (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
D	1.55	3.03	4.50	1.66	3.33	4.99	7.68%	9.85%	10.91%
E	1.64	3.21	4.80	1.80	3.60	5.40	9.95%	12.12%	12.53%
F	1.64	3.26	4.87	1.99	3.99	5.98	21.43%	22.35%	22.67%
G	4.13	8.93	13.82	2.13	4.26	6.40	48.36%	52.22%	53.71%
H	3.93	8.25	13.00	2.31	4.61	6.92	41.30%	44.09%	46.75%
I	4.22	8.66	13.84	2.55	5.11	7.66	39.48%	41.05%	44.65%





圖 57. 手積法修補後破壞情況

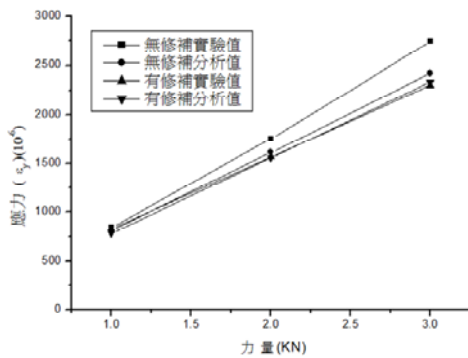


圖 58. 雙邊裂縫修補疊層 8 層實驗與分析應變值比較

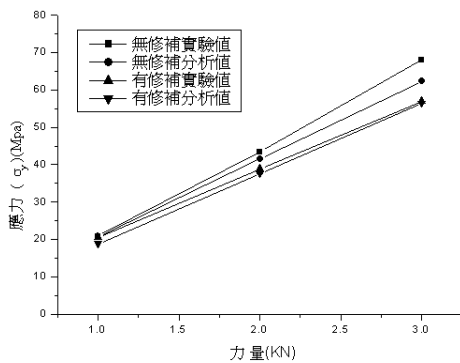


圖 59. 雙邊裂縫修補疊層 8 層實驗與分析應力值比較

別為 7.94% 及 0.96%。圖 60-61 為未修補及修補之雙邊裂縫應變及應力比較關係，其中修補片的疊層層數為 6 層厚度 2.1 mm，其中未修補應變最大及最小差異分別為 10.85% 及 7.42%，應力最大及最小差異分別為 12.15% 及 7.21%。修補後應變最大及最小差異分別為 11.18% 及 2.56%，應力最大及最小差異分別為 7.84% 及 0.52%。

在修補片分析中為了確定修補後  $K_I$  值是否降低，因此在分析中分別建立無修補片與有修補片之比較尖端之應力強度因子之差異性，其中材料性質為表 1 中的材料係數，邊界條件設定則參考圖 9 之限制條件，其比較為圖 62，最大差異在 5% 內，最小差異為 2% 左右。

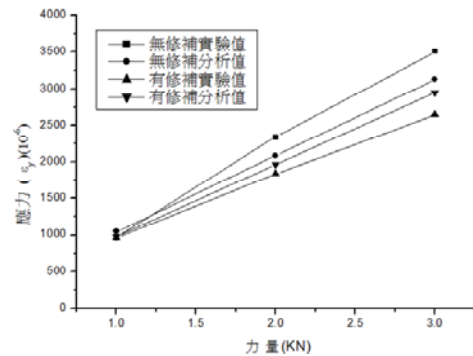


圖 60. 雙邊裂縫修補疊層 6 層實驗與分析應變值比較

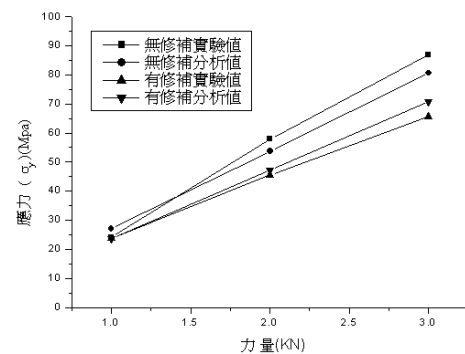
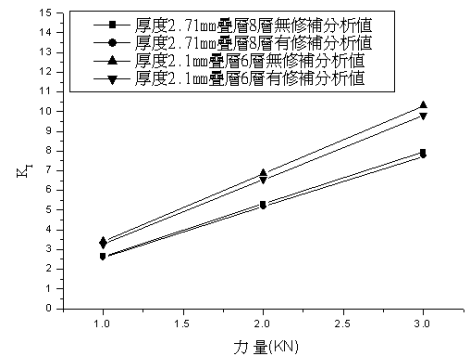


圖 61. 雙邊裂縫修補疊層 6 層實驗與分析應力值比較

圖 62. 無修補片與有修補片  $K_I$  值之比較

#### (四) 碳纖裂縫的分析值與實驗值之比較

在中央裂縫實驗中，實驗材料使用碳纖預浸材，其中材料性質參考表 1，其厚度約為 0.98~1.2 mm，試片大小約 240 mm×25.4 mm 如圖 63 所示，其圖 64 為破壞情況。由於針對應力應變值進行分析，實驗疊層為等向疊層，因此建模方式使用 PLANE82 元素為四分之一建模，負載 1kN、2kN 及 3kN 進行實驗與應力應變進行比較，其參考如表 10，其中 x 方向應力最大及最小差異分別為 7.31% 及 0.61%，y 方向應力最大及最小差異分別為 20.00% 及 10.41%。





圖 63. 為碳纖預浸材之實驗試片



圖 64. 碳纖預浸材破壞情況

#### (五) 碳纖裂縫試片與修補試片分析與實驗之比較

由於考慮到碳纖具有疊層及方向性，因此在分析上使用全模建模，碳纖未修補試片使用 SHELL91 元素進行分析，碳纖修補片修補試片選用 SOLID186 元素分析，邊界條件參考圖 12 之限制，負力量上以 1KN 進行實驗與應力應變進行比較。

實驗方面依照各參數不同進行不同試片試驗，其實驗裂縫是否修補、補片疊層層數及尺寸進行實驗編號表 11 為碳纖試片資料整理表，由於在之前實驗發現應變規貼附的位子會與分析取點上有所差異，因此在分析取點上參考圖 65 為取點比較，在比較最接進的數據進行比對，圖 66 為碳纖未修補破壞情形，圖 67 為碳纖修補破壞情形，表 12 分析應變與實驗應變分析比較，X 方向應變最大差異 43%，最小差異 0.08%，Y 方向應變最大差異 71.49%，最小差異 6.5%。

### 五、結論

本文利用不同製程及材料製作複合材料裂縫試片及裂縫修補試片，透過實驗及 ANSYS 建模分析來探討不同裂縫的應力、應變及應力強度因子之變化，探討不同的元素對分析上之相關性，並可正確地比對到實驗值。本文的結論如下說明：

1. 因製程切割裂縫時，難區分裂縫尖端型態，因此探討不同裂縫尖端的形狀的分析影響與實驗值的比對結果，本文裂縫尖端採用 V 形尖端的理論分析與實驗值差異性較小。
2. 由文獻比對可了解雙邊裂縫對  $K_I$  影響較大，分析上對於  $[0/+45/90/-45]_2S$  的疊層有比較接近的比對，由於中央穿

表 10. 負載 1KN 進行實驗與應力應變進行比較 (應變單位:  $10^{-6}$ )

中央裂縫實驗碳纖預浸材厚度 1.2mm									
方向	實驗應變值 $\epsilon_y$ (a)			ANSYS 分析應變值 $\epsilon_y$ (b)			差異性 $\left  \frac{a-b}{a} \right  \times 100\%$		
	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN	1KN	2KN	3KN
X 軸	-336.47	-658.72	-900.41	-311.88	-662.76	-935.6	7.31%	0.61%	3.91%
Y 軸	767.72	1502.3	2056.7	614.17	1305.12	1842.5	20.00%	13.13%	10.41%

表 11. 碳纖試片資料整理表

編號	是否修補	是否加壓成形	試片層數	修補片層數	尺寸		
					厚	寬	間距
A-0-1	否	是	8 層		厚 1.2	寬 25.8	間距 140
B-0-1	否	否	8 層		厚 13	寬 26	間距 138
B-0-2	否	否	8 層		厚 13	寬 26	間距 138
B-0-3	否	否	8 層		厚 13	寬 26	間距 138
B-0-4	否	否	8 層		厚 13	寬 26	間距 138
B-0-5	否	否	8 層		厚 13	寬 26	間距 138
B-1-1	是	否	8 層	8 層	厚 13	寬 26	間距 138
B-1-2	是	否	8 層	8 層	厚 13	寬 26	間距 138
B-1-3	是	否	8 層	6 層	厚 13	寬 26	間距 138
B-1-4	是	否	8 層	6 層	厚 13	寬 26	間距 138
A-1-1	是	是	8 層	6 層	厚 1.2	寬 26.2	間距 140





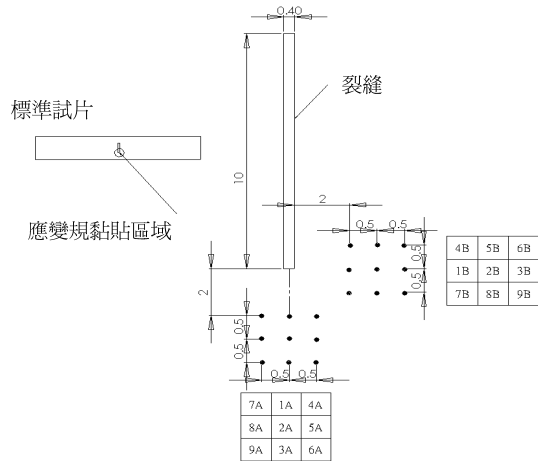


圖 65. 應變取點示意圖

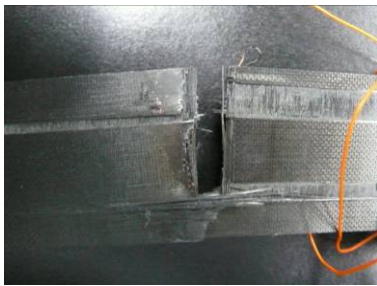


圖 66. 碳纖未修補破壞情形

孔的部分對  $K_I$  的影響較不明顯，推測中央穿孔比較沒有應力集中的效應，而孔徑越大所產生的應變也相對提升。在修補試片建模上經文獻比對中也得到較正確的建模方式及邊界設定。

3. 在實驗方面手積法與 RTM 裂縫試片的實驗與分析比較

表 12. 碳纖試片未修補與修補分析與實驗不同位子應變比較（應變單位： $10^{-6}$ ）

X 方向三角型數據比較					Y 方向三角型數據比較				
試片	取點編號	實際值 (a)	分析值 (b)	誤差 $\frac{a-b}{a} \times 100\%$	試片	取點編號	實際值 (a)	分析值 (b)	誤差 $\frac{a-b}{a} \times 100\%$
B-0-1	5B	470	382	18.60%	B-0-1	7B	-162	-111	31.13%
B-0-2	5B	399	382	4.17%	B-0-2	7B	-136	-111	18.37%
B-0-3	5B	276	276	0.08%	B-0-3	7B	-119	-111	6.50%
B-0-4	5B	243	276	13.64%	B-0-4	7B	-905	-817	9.70%
B-0-5	5B	352	348	1.17%	B-0-5	7B	-181	-111	38.48%
B-1-1	8B	386	410	6.27%	B-1-1	7B	-758	-527	30.48%
B-1-2	8B	700	516	26.26%	B-1-2	7B	-909	-527	42.06%
B-1-3	8B	486	472	2.74%	B-1-3	7B	-143	-528	63.01%
B-1-4	8B	371	407	9.59%	B-1-4	7B	-105	-528	49.56%
A-1-1	6A	751	471	37.33%	A-1-1	1A	718	553	22.96%



圖 67. 碳纖修補破壞情形

中，以中央穿孔誤差有比較大但與分析趨勢接近，其原因可能是在製程上造成纖維強度有所差異。也發現實驗量測點與分析量測點有所差異，因此在做碳纖修補片中應變規貼附的地方與 ANSYS 分析取點，可抓取附近的點進行數據比對，找出正確的位置進行理論分析與實驗比較。

4. 在未修補與修補後的  $K_I$  值有稍減少但不是非常明顯，可能與修補片的大小或是膠層的強度可以在進行深入討論。
5. 不同材料性質在 ANSYS 建模上有所差異，等向性材料可運用四分之一建模，不僅準確性好同時可以縮短計算時間，但非等稱性試片則是用全模來建模。
6. 運用 ANSYS 軟體進行理論分析與實驗值之驗證，確認 ANSYS 建模的可行性，以建立正確的分析模式，進而推廣 ANSYS 模擬結構件的裂縫分析上。



### 參考文獻

1. 張立恆 (民 89), 金屬與複材試件應力之量測與探討, 國立中山大學機械工程研究所碩士論文。
2. Ayatollahi, M. R. and R. Hashemi (2007) Computation of stress intensity factors (KI, KII) and T-stress for cracks reinforced by composite patching. *Composite Structures*, 78(4), 602-609.
3. Broek, D. (1986) *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 4th Ed., Martinus Nijhoff Publishers, Boston.
4. Hüsni Dirikolu, M. and A. Aktaş (2000) Analytical and finite element comparisons of stress intensity factors of composite materials. *Composite Structures*, 50(1), 99-102.
5. Ouinas, D., B. B. Bouiadjra, B. Serier and M. SaidBekkouche (2007) Comparison of the effectiveness of boron/epoxy and graphite/epoxy patches for repaired cracks emanating from a semicircular notch edge. *Composite Structures*, 80(4), 514-522
6. Pilkey, W. D. (1997) *Peterson's Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, New York, NY.

收件：98.04.13 修正：98.09.15 接受：98.10.07

