

# 熱電材料含任意形狀孔洞之二維熱電彈性問題解析

沈明河<sup>1</sup>、林宜昇<sup>2</sup>、洪仕育<sup>1</sup>

<sup>1</sup>南開科技大學 自動化工程系

<sup>2</sup>南開科技大學 機械工程系車輛與機電產業碩士班

通訊作者：沈明河

聯絡地址：南投縣草屯鎮中正路 568 號

電子郵件：mhshen@nkut.edu.tw

投稿日期：2020 年 6 月

接受日期：2020 年 10 月

## 摘 要

熱電材料具有以固態為基礎相互轉換熱能和電能之熱電特性，因此獲得廣泛的工程應用。熱電材料是屬於典型的脆性固體，在製造過程產生的缺陷可能導致熱電場及應力場集中現象，降低材料強度。所以，熱電材料的破壞分析具有理論和實際意義。本論文研究含任意形狀孔洞之非線性耦合熱電材料受到無窮遠均勻電流密度和能量通量作用下之廣義二維熱電彈性問題。本論文討論受熱電負荷影響的熱電材料耦合行為，因此假設任意形狀孔洞邊緣屬於無曳引力狀態，以複變函數法和保角轉換技術，並由孔洞的表面是電絕緣和熱絕緣的邊界條件，可推導得出電勢，溫度和應力場的正解。並可簡化為橢圓形或圓形孔的解與現有文獻比對。數值結果將用於討論孔洞形狀，施加的電流密度和能量通量對熱電場和應力場的影響。

**關鍵詞：**熱電材料；任意形狀孔洞；電流密度；能量通量

## 壹、前言

熱電材料具有以固態為基礎相互轉換熱能和電能的熱電特性，也就是在不需要其它特定外力協助下，即可將熱與電兩種不同型態的能量加以互相轉換。此特性可用於將廢熱轉換成電能或將電能直接轉換成冷卻和加熱效果，進而提供一種不需要活動元件和製冷劑的發電和冷卻方法。這些材料相較於傳統的流體系統例如空調壓縮機或熱泵等具有競爭優勢，也適合較小空間的應用，例如汽車座椅，夜視系統和電氣外殼冷卻 Bell (2008)。現今我們使用的能源中約有三分之二因廢熱而損失，因此迫切需要能夠直接且可逆地將熱能轉換為電能的高性能熱電材料 Biswas, He and Blum (2012)。

熱電材料是屬於典型的脆性固體。在製造或操作過程中

容易產生孔洞缺陷或裂縫等缺陷，並導致裂紋尖端處的熱電場集中，降低材料的強度造成材料損壞。針對這些缺陷進行評估對於熱電元件的能量轉換效率，可靠性，強度等有重要影響。因此，研究人員對於熱電材料缺陷問題給予很多關注。基於控制方程的線性簡化，Zhang and Wang (2013)首先以理論推導出含有一般二維裂縫問題的熱電材料解析解。Song, Gao and Li (2015)研究了熱電材料中裂紋的二維問題，以複變函數法推導出一般二維熱電材料裂紋的顯解。結果顯示應力強度因子與熱通量具有線性關係，但與電流呈非線性關係。橢圓孔問題是每種功能材料斷裂力學分析的基礎，基於複變函數法和保角轉換技術，Zhang and Wang (2016)研究了在無限遠處受到均勻電流密度和能量通量的熱電材料中橢圓孔或裂紋的廣義二維問題。首先，假設橢圓孔的表面是電絕緣和



熱絕緣的，解出電勢，溫度和應力場的精確解。結果顯示，當橢圓孔的長軸與短軸比值增大時，電流密度和孔邊緣應力的集中係數均增大。當橢圓孔退化為裂縫時，也可獲得裂縫問題之解。Zhang et al. (2017)基於複變函數法和保角轉換技術，進一步研究了嵌入熱電材料中的橢圓孔或剛性異質在受到均勻電流密度和能量通量的二維問題。Wang and Wang (2017)建立了具有傾斜橢圓孔的熱電材料之熱電耦合理論分析模型。討論在雙軸向負載橢圓孔的擴展問題。結果顯示對於雙軸向負載橢圓孔，由於非線性耦合，該解不能是兩個單軸負載情況下解的線性疊加。對於傾斜橢圓孔，當主軸垂直於加載方向時，出現最大熱電集中。但是，當主軸與加載方向平行時，會發生最大應力集中。最近 Pang et al. (2018)利用複變函數法和保角轉換技術研究了熱電材料在均勻電流和均勻能量通量作用下的二維問題。考慮具有直裂紋的圓孔的無限薄板模型，假設圓孔及裂縫表面的邊界條件是電和熱不可穿透的。推導出電流密度和能量通量的解析解，得到了裂紋尖端附近的電流密度強度因子，能量通量強度因子和應力強度因子，對熱電材料的工程應用具有重要意義。雖然橢圓孔洞問題可以簡化為圓形或裂紋問題是力學分析很基礎的幾何模式，但進行更複雜之孔洞形狀分析，有助於得到更完整之解答。關於探討任意形狀之邊界問題，Hwu (1992)提出一擴展之轉換函數用於近似多邊形孔洞之異向性彈性力學分析。Shen et al. (2009)以類似之轉換函數完成無窮平板含近似多邊形塗層孔受電機械負荷之壓電應力分析，藉由探討孔洞上的薄塗層希望能達到提高壓電傳裝置的性能並保護脆弱壓電元件的目的。當孔洞內部之溫度或電場無法忽略或是處理含任意形狀異質問題時，因為孔洞內部或異質的轉換過於複雜，不易得到單一對映，有關含任意形狀異質問題之研究相對困難。Gao and Noda (2004)藉由複變函數及 Faber 級數法，成功發展出一套可求解無窮板含任意形異質之壓電應力分析方法。Wang and Sudak (2006)以相同方法完成無窮板含任意形狀彈性異質與螺旋差排之交互作用分析。Shen and Hung (2012)完成磁電彈性無窮平板含一不同材料常數的任意形狀嵌入物，此嵌入物承受一固有之壓電磁特徵場，無窮平板承受無窮遠的反平面磁電彈性場之分析。Shen and Hung(2012)

進一步推導出含任意形狀雙層異質之三相複合壓電材料與螺旋差排之交互作用之壓電應力函數，此壓電應力函數可作為分析相對應幾何模式之壓電材料含裂縫問題之基礎函數。

本論文分析含任意形狀孔洞之熱電材料受無限遠處均勻電流密度和能量通量之二維熱電彈性問題，忽略任意形狀孔洞內部各場域(溫度場，電場，應力場等)之變化，採取孔洞邊緣為電絕緣，熱絕緣且無外力作用之邊界條件，無窮遠處受均勻電流密度及能量通量，我們將以複變函數法及保角轉換技術完成分析。

## 貳、研究方法

### 一、基本方程式

考慮一均向性熱電耦合之熱電材料，其熱電材料相關之材料性質分別為材料之導電性 $\gamma$ ，導熱性 $\kappa$ 和席貝克係數 $\varepsilon$ 。電流密度向量 $\mathbf{j}_e = [j_{ex}, j_{ey}]^T$  (其中 $j_{ex}, j_{ey}$ 分別為電流密度向量 $\mathbf{j}_e$ 之 $x$ 軸及 $y$ 軸分量)和能通向量 $\mathbf{j}_m = [j_{mx}, j_{my}]^T$  (其中 $j_{mx}, j_{my}$ 分別為能通向 $\mathbf{j}_m$ 之 $x$ 軸及 $y$ 軸分量)以複變函數表示如下[Zhang and Wang (2016), Zhang et al. (2017), Wang and Wang (2017)]：

$$j_{ex} - ij_{ey} = -\gamma f_1'(z) \quad (1)$$

$$j_{mx} - ij_{my} = \frac{-\gamma}{2} f_1(z) f_1'(z) - kg'(z) \quad (2)$$

其中 $f_1(z)$ 與 $g(z)$ 代表複變數 $z = x + iy$ 的待定複變函數， $i$ 代表虛數單位。以總和流量來表示邊界條件則電流密度和能量通量的邊界條件是

$$f_1(z) - \overline{f_1(z)} = \frac{-2i}{\gamma} \int j_{en}(s) ds + \text{constant} \quad (3)$$

$$\text{Im} \left[ \frac{\gamma}{4} f_1^2(z) + kg(z) \right] = - \int j_{mn}(s) ds + \text{constant} \quad (4)$$

其中“Im”代表複數的虛部， $\text{constant}$ 為任意常數， $j_{en}(s)$ 和 $j_{mn}(s)$ 代表沿邊界點 $s$ 的法向電流密度和法向能量通量。

熱應力 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$ 和位移 $(u_x, u_y)$ 可以如下獲得[Zhang and Wang (2016), Zhang et al. (2017), Wang and Wang (2017)]：

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \text{Re} \left[ \varphi'(z) \right] + \frac{\mu\alpha\gamma}{2k} f_1(z) \overline{f_1(z)} \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2 \left[ z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\varphi'(z)} \right] + \frac{\mu\alpha\gamma}{2k} f_2(z) \overline{f_1'(z)} \quad (6)$$

$$2\mu(u_x + u_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi(z)} + 2\mu\alpha \int g(z) dz - \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} f_2(z) \overline{f_1(z)} \quad (7)$$



其中  $f_2'(z) = f_1'(z)$ ， $\varphi(z)$  和  $\phi(z)$  是待定之複變應力函數， $\mu$  是剪力模數， $\kappa$ ， $\alpha'$  和  $\alpha^*$  定義如下：

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{for plane stress state} \\ 3-4\nu & \text{for plane stain state} \end{cases} \quad (8)$$

$$\alpha' = \begin{cases} (1+\nu)\alpha & \text{for plane stress state} \\ \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha & \text{for plane stain state} \end{cases}, \quad \alpha^* = \begin{cases} \alpha & \text{for plane stress state} \\ (1+\nu)\alpha & \text{for plane stain state} \end{cases} \quad (9)$$

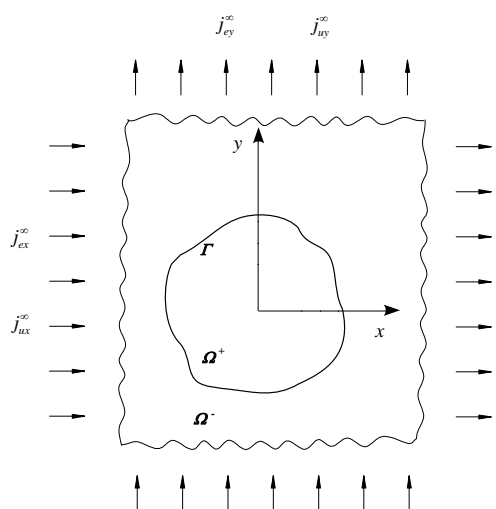
其中  $\alpha$  為熱膨脹係數， $\nu$  為蒲松比。以合力來表示邊界條件時彈性體中兩點之間的合力具有的形式

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\phi(z)} = i \int (p_x + ip_y) ds - \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} f_2(z)\overline{f_1'(z)} + \text{constant} \quad (10)$$

其中  $p_x$  和  $p_y$  代表作用於沿邊界點  $s$  的外加力。

## 二、邊界條件描述

本論文以理論分析含任意形狀孔洞之熱電材料，受無窮遠處之均勻電流密度及能量通量之熱電應力分析，本論文所欲分析之幾何模形如圖一所示。



圖一 含任意形狀孔洞之熱電材料受無窮遠處之均勻電流密度及能量通量

忽略任意形狀孔洞內部各場域(溫度場，電場，應力場等)之變化，假設在孔洞之邊界為電絕緣，絕熱且無外力作用，在  $z$  平面任意形狀孔洞邊緣  $z = s \in \Gamma$  之邊界條件

$$f_1(s) - \overline{f_1(s)} = 0 \quad (11)$$

$$\text{Im}\left[\frac{\gamma}{4} f_1^2(s) + kg(s)\right] = 0 \quad (12)$$

$$\varphi(s) + s\overline{\varphi'(s)} - \overline{\phi(s)} = -\frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} f_2(s)\overline{f_1'(s)} \quad (13)$$

假設在無窮遠處承受均勻之平面電流密度 ( $J_{ey}^\infty, J_{ey}^\infty$ ) 及能量通量 ( $J_{ey}^\infty, J_{ey}^\infty$ )，則在  $z$  平面無窮遠處之邊界條件可以分別表示如下：

$$-\gamma f_1'(z) = J_{ey}^\infty - iJ_{ey}^\infty, \quad z \rightarrow \infty \quad (14)$$

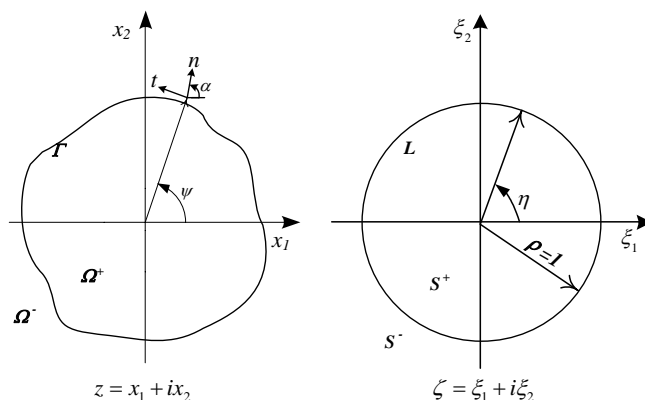
$$\frac{-\gamma}{2} f_1(z)f_1'(z) - kg'(z) = J_{ey}^\infty - iJ_{ey}^\infty, \quad z \rightarrow \infty \quad (15)$$

## 三、保角轉換

參考 England (1971)，引用一轉換函數如下：

$$z = m(\zeta) = R \left( \zeta + \sum_{n=1}^N m_n \zeta^{-n} \right) \quad (16)$$

此函數在  $\zeta \geq 1$  為保角轉換函數，此轉換函數可將  $z$  平面之任意形狀邊界  $\Gamma$  轉換至  $\zeta$  平面之圓形邊界  $L$  半徑為  $\rho=1$ ，此保角轉換函數將  $z$  平面之基材區域  $\Omega$  映射至  $\zeta$  平面之外部區域  $S^-$  (圖二)。改變不同轉換函數之參數  $m_n$  可對應不同之幾何形狀。



圖二 含任意形狀孔洞之熱電材料之保角轉換



經過保角轉換後得在  $\zeta$  平面之單位圓形邊界  $\zeta = t \in L$  之邊界條件可以分別表示如下：

$$f_1(t) - \overline{f_1(t)} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Im}\left[\frac{\gamma}{4} f_1^2(t) + kg(t)\right] = 0 \quad (18)$$

$$\varphi(t) + \frac{m(t)}{m'(t)} \overline{\varphi(t)} + \overline{\phi(t)} = -\frac{\mu\alpha\gamma}{4k} f_2(t) \overline{f_1(t)} \quad (19)$$

在  $\zeta$  平面無窮遠處之邊界條件可以分別表示如下：

$$\frac{-\gamma f_1'(\zeta)}{m'(\zeta)} = j_{ex}^\infty - ij_{ey}^\infty, \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (20)$$

$$\frac{-\gamma}{2m'(\zeta)} f_1(\zeta) f_1'(\zeta) - \frac{k}{m'(\zeta)} g'(\zeta) = j_{mx}^\infty - ij_{my}^\infty, \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (21)$$

#### 四、電場推導

由無窮遠處之電流密度邊界條件(21)可知  $f_1(\zeta)$  具有下列形式

$$f_1(\zeta) = c_1^\infty \zeta + f_0(\zeta) \quad (22)$$

$$\frac{\gamma}{4} [(c_1^\infty)^2 t^2 + (\overline{c_1^\infty})^2 \overline{t}^2 - (c_1^\infty)^2 t^2 - (\overline{c_1^\infty})^2 \overline{t}^2] + k[c_2^\infty t^2 + c_3^\infty t - \overline{c_2^\infty} \overline{t} - \overline{c_3^\infty} \overline{t} + g_0(t) - \overline{g_0(t)}] = 0 \quad (26)$$

以柯西積分公法或解析連續法可得

$$g_0(\zeta) = \overline{c_2^\infty} \zeta^{-2} + \overline{c_3^\infty} \zeta^{-1} + g_0(\infty) \quad (27)$$

將(51)式帶入方程式(49)得

$$g(\zeta) = c_2^\infty \zeta^2 + c_3^\infty \zeta + \overline{c_2^\infty} \zeta^{-2} + \overline{c_3^\infty} \zeta^{-1} + g_0(\infty) \quad (28)$$

其中常數項  $g_0(\infty)$  代表參考溫度，因不影響應力推導在此先給予忽略。

#### 六、熱電彈性應力場推導

因無外加之負荷 ( $p_x + ip_y$ ) 因此位移及合力必須為單值，

$$\begin{aligned} f_2(\zeta) &= \int (c_1^\infty \zeta + \overline{c_1^\infty} \zeta^{-1}) R \left( 1 - \sum_{n=1}^N n m_n \zeta^{-n-1} \right) d\zeta \\ &= R \left[ c_1^\infty \left( \frac{\zeta^2}{2} - m_1 \log \zeta - \sum_{n=2}^N \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n+1} \right) + \overline{c_1^\infty} \left( \log \zeta - \sum_{n=1}^N \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

另外(28)中  $g(\zeta)$  對  $z$  變數作積分得

其中  $c_1^\infty = \frac{R(-j_{ex}^\infty + ij_{ey}^\infty)}{\gamma}$ ， $f_0(\zeta)$  為  $S^-$  區域解析之函數且

$f_0'(\infty) = 0$ 。將(22)式帶入電絕緣之邊界條件(17)，得在  $\zeta$  平面之單位圓形邊界  $|\zeta|=1$  之邊界條件如下：

$$f_0(t) + c_1^\infty t - \overline{f_0(t)} - \overline{c_1^\infty} \overline{t} = 0 \quad (23)$$

此類型邊界質問題可以柯西積分公法或解析連續法 England (1971) 求解得

$$f_1(\zeta) = c_1^\infty \zeta + \overline{c_1^\infty} \zeta^{-1} \quad (24)$$

#### 五、溫度場推導

由無窮遠處之能量通量之邊界條件(21)及(24)式可知  $g(\zeta)$  具有下列形式

$$g(\zeta) = c_2^\infty \zeta^2 + c_3^\infty \zeta + g_0(\zeta) \quad (25)$$

其中  $c_2^\infty = \frac{-\gamma(c_1^\infty)^2}{4k}$ ， $c_3^\infty = \frac{R(-j_{mx}^\infty + ij_{my}^\infty)}{k}$ ， $g_0(\zeta)$  為  $S^-$  區域解析之函數且  $g_0'(\infty) = 0$ 。將(25)式帶入絕熱之邊界條件(18)，得在  $\zeta$  平面之單位圓形邊界  $|\zeta|=1$  之邊界條件如下：

為滿足此條件應力函數  $\varphi(\zeta)$  和  $\phi(\zeta)$  須具有下面形式

$$\varphi(\zeta) = A(\zeta) \log \zeta + \varphi_0(\zeta) \quad (29)$$

$$\phi(\zeta) = B(\zeta) \log \zeta + \phi_0(\zeta) \quad (30)$$

其中  $A(\zeta) \log \zeta$  及  $B(\zeta) \log \zeta$  的加入為了滿足位移及合力必須為單值。而  $\varphi_0(\zeta)$  和  $\phi_0(\zeta)$  為  $S^-$  區域解析之函數且  $\varphi_0'(\infty) = 0$  和  $\phi_0'(\infty) = 0$ 。由於位移方程式(7)及合力方程式(10)必須為單值，首先我們必須把(7)(10)式中各函數中之非單值項， $\log \zeta$ ，找出來。將  $f_1(\zeta)$  對  $z$  變數作積分或  $f_2(z) = \int f_1(z) dz = \int (c_1^\infty z + \overline{c_1^\infty} z^{-1}) dz$  (可得  $f_2(\zeta)$  如下：



$$\begin{aligned} \int g(z)dz &= \int g(\zeta)m'(\zeta)d\zeta = \int (c_2^\infty \zeta^2 + c_3^\infty \zeta + \overline{c_2^\infty} \zeta^{-2} + \overline{c_3^\infty} \zeta^{-1})R\left(1 - \sum_{n=1}^N nm_n \zeta^{-n-1}\right)d\zeta \\ &= R\left[c_2^\infty \left(\frac{\zeta^3}{3} - m_1 \zeta - 2m_2 \log \zeta - \sum_{n=3}^N \frac{n}{-n+2} m_n \zeta^{-n+2}\right) + \overline{c_2^\infty} \left(-\zeta^{-1} - \sum_{n=1}^N \frac{n}{-n-2} m_n \zeta^{-n-2}\right)\right] \\ &\quad + R\left[c_3^\infty \left(\frac{\zeta^2}{2} - m_1 \log \zeta - \sum_{n=2}^N \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n+1}\right) + \overline{c_3^\infty} \left(\log \zeta - \sum_{n=1}^N \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n-1}\right)\right] \end{aligned} \quad (32)$$

將(29)(30)(31)(32)帶入(7)(10)，比較log ζ項，可得

$$A(\zeta) = A = \frac{2\mu\alpha^*}{1+\kappa} (2Rc_2^\infty m_2 + Rc_3^\infty m_1 - \overline{Rc_3^\infty}) \quad (33)$$

$$B(\zeta) = \overline{A} + \frac{\mu\alpha^* \gamma}{4k} R[-\overline{c_1^\infty} m_1 + c_1^\infty] (c_1^\infty \zeta + \overline{c_1^\infty} \zeta^{-1}) \quad (34)$$

重新整理得熱電彈性問題之邊界條件如下：

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) + \frac{m(t)}{m'(t)} \overline{\varphi_0(t)} + \overline{\phi_0(t)} &= -\frac{m(t)}{m'(t)} \frac{\overline{A}}{t} \\ &\quad - \frac{\mu\alpha^* \gamma}{4k} R\left[c_1^\infty \left(\frac{t^2}{2} - \sum_{n=2}^\infty \frac{n}{-n+1} m_n t^{-n+1}\right) - \overline{c_1^\infty} \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{-n-1} m_n t^{-n-1}\right] \left[\overline{c_1^\infty} t + c_1^\infty \frac{1}{t}\right] \end{aligned} \quad (35)$$

定義於S<sup>+</sup>解析之應力函數及 $\overline{\varphi_0(\frac{1}{\zeta})}$ ,  $\overline{\phi_0(\frac{1}{\zeta})}$ ,  $\overline{m'(\frac{1}{\zeta})}$ 如下：

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) + \frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \overline{\varphi_0(\frac{1}{\zeta})} + \overline{\phi_0(\frac{1}{\zeta})} &= -\frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \frac{\overline{A}}{\zeta} \\ &\quad - \frac{\mu\alpha^* \gamma}{4k} R\left[c_1^\infty \left(\frac{\zeta^2}{2} - \sum_{n=2}^\infty \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n+1}\right) - \overline{c_1^\infty} \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n-1}\right] \left[\overline{c_1^\infty} \zeta^{-1} + c_1^\infty \zeta\right] \end{aligned} \quad (36)$$

當滿足邊界條件(35)，方程式(36)於邊界 $\bar{t}=1$ 上為連續。

因為

$$m(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{n=1}^N m_n \zeta^{-n}\right), m'(\zeta) = R\left(1 - \sum_{n=1}^N nm_n \zeta^{-n-1}\right), \overline{m'(\frac{1}{\zeta})} = \overline{m'(\frac{1}{\zeta})} = R\left(1 - \sum_{n=1}^N nm_n \zeta^{-n+1}\right)$$

則 $\overline{m(\zeta)}/\overline{m'(\frac{1}{\zeta})}$ 在 $|\zeta| \leq 1$ 之區域除了在 $\zeta=0$ 具N階奇異點外皆為解析函數，可將此函數在 $|\zeta| \leq 1$ 之區域處展開為以下形式：

$$\frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} = \frac{b_N}{\zeta^N} + \frac{b_{N-1}}{\zeta^{N-1}} + \dots + \frac{b_1}{\zeta} + b_0 + \dots \quad \text{for } |\zeta| \leq 1 \quad (37)$$

而 $\varphi_0(\zeta)$ 為在S<sup>+</sup>區域解析之函數，可表示為

$$\varphi_0(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \quad \text{for } |\zeta| \geq 1 \quad (38)$$

則 $\overline{\varphi_0(\frac{1}{\zeta})}$ 將在為S<sup>+</sup>區域解析之函數，如下：

$$\overline{\varphi_0(\frac{1}{\zeta})} = -\overline{a_1} \zeta^2 - 2\overline{a_2} \zeta^3 + \dots \quad \text{for } |\zeta| \leq 1 \quad (39)$$

由(37)與(39)式之乘積，可以看出當 $N > 2$ ，在(36)式之 $\overline{m(\zeta)\varphi_0(\frac{1}{\zeta})}/\overline{m'(\frac{1}{\zeta})}$ 項在 $\zeta=0$ 處具有 $N-2$ 階奇異點，可將此函數在 $|\zeta| \leq 1$ 之區域處展開為以下形式



$$\frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \overline{\varphi_0'(\frac{1}{\zeta})} = \frac{d_{N-2}}{\zeta^{N-2}} + \frac{d_{N-1}}{\zeta^{N-1}} + \dots + \frac{d_1}{\zeta} + d_0 + \dots \quad \text{for } |\zeta| \leq 1 \quad (40)$$

比較(37)(39)和(40)式，可知(40)式中各係數關係之如下：

$$\begin{aligned} d_{N-2} &= -b_N \bar{a}_1 \\ d_{N-3} &= -b_{N-1} \bar{a}_1 - b_N 2\bar{a}_2 \\ &\dots \\ d_1 &= -b_3 \bar{a}_1 - b_4 2\bar{a}_2 - \dots - b_N (n-2) \bar{a}_{n-2} \\ d_0 &= -b_2 \bar{a}_1 - b_3 2\bar{a}_2 - \dots - b_N (n-1) \bar{a}_{n-1} \end{aligned} \quad (41)$$

同前之推導知在(36)式中之  $\frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \overline{A\zeta}$  項在  $\zeta=0$  處具有  $N-1$  階奇異點，可將此項在  $|\zeta| \leq 1$  之區域處展開為以下形式

$$\frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \overline{A\zeta} = \frac{b_N \bar{A}}{\zeta^{N-1}} + \frac{b_{N-1} \bar{A}}{\zeta^{N-2}} + \dots + \frac{b_2 \bar{A}}{\zeta} + b_1 \bar{A} + \dots \quad (42)$$

依據(40)及(42)式之關係，可將(36)式重組如下：

$$\begin{aligned} &\varphi_0(\zeta) + \frac{d_{N-2}}{\zeta^{N-2}} + \frac{d_{N-1}}{\zeta^{N-3}} + \dots + \frac{d_1}{\zeta} + d_0 + \frac{b_N \bar{A}}{\zeta^{N-1}} + \frac{b_{N-1} \bar{A}}{\zeta^{N-2}} + \dots + \frac{b_2 \bar{A}}{\zeta} + b_1 \bar{A} \\ &+ \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 (-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n}) - (\bar{c}_1^\infty)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n-2}] \\ &+ \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[(c_1^\infty)^2 (-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n+2}) - c_1^\infty \bar{c}_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n}] = \\ &-\overline{\phi_0(\frac{1}{\zeta})} - \frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \overline{\varphi_0'(\frac{1}{\zeta})} + \frac{d_{N-2}}{\zeta^{N-2}} + \frac{d_{N-1}}{\zeta^{N-3}} + \dots + \frac{d_1}{\zeta} + d_0 \\ &- \frac{m(\zeta)}{m'(\frac{1}{\zeta})} \overline{A\zeta} + \frac{b_N \bar{A}}{\zeta^{N-1}} + \frac{b_{N-1} \bar{A}}{\zeta^{N-2}} + \dots + \frac{b_2 \bar{A}}{\zeta} + b_1 \bar{A} - \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 \frac{\zeta}{2} + (c_1^\infty)^2 (\frac{\zeta^3}{2})] \end{aligned} \quad (43)$$

此方程式左側在  $S^-$  區域解析，右側在  $S^+$  區域解析，以解析連續法且忽略常數部分(因其不以影響應力狀態)可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= -\frac{d_{N-2}}{\zeta^{N-2}} - \frac{d_{N-1}}{\zeta^{N-3}} - \dots - \frac{d_1}{\zeta} - d_0 - \frac{b_N \bar{A}}{\zeta^{N-1}} - \frac{b_{N-1} \bar{A}}{\zeta^{N-2}} - \dots - \frac{b_2 \bar{A}}{\zeta} - b_1 \bar{A} \\ &- \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 (-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n}) - (\bar{c}_1^\infty)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n-2}] \\ &- \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[(c_1^\infty)^2 (-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{-n+1} m_n \zeta^{-n+2}) - c_1^\infty \bar{c}_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{-n-1} m_n \zeta^{-n}] \\ &\overline{\phi_0(\zeta)} = -\frac{m(\frac{1}{\zeta})}{m'(\zeta)} \overline{\varphi_0'(\zeta)} + \bar{d}_{N-2} \zeta^{N-2} + \bar{d}_{N-3} \zeta^{N-3} + \dots + \bar{d}_1 \zeta + \bar{d}_0 \\ &- \frac{m(\frac{1}{\zeta})}{m'(\zeta)} \overline{A\zeta^{-1}} + \bar{b}_N A \zeta^{N-1} + \bar{b}_{N-1} A \zeta^{N-2} + \dots + \bar{b}_2 A \zeta + \bar{b}_1 A - \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 \frac{\zeta^{-1}}{2} + (\bar{c}_1^\infty)^2 (\frac{\zeta^{-3}}{2})] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \overline{\phi_0(\zeta)} &= -\frac{m(\frac{1}{\zeta})}{m'(\zeta)} \overline{\varphi_0'(\zeta)} + \bar{d}_{N-2} \zeta^{N-2} + \bar{d}_{N-3} \zeta^{N-3} + \dots + \bar{d}_1 \zeta + \bar{d}_0 \\ &- \frac{m(\frac{1}{\zeta})}{m'(\zeta)} \overline{A\zeta^{-1}} + \bar{b}_N A \zeta^{N-1} + \bar{b}_{N-1} A \zeta^{N-2} + \dots + \bar{b}_2 A \zeta + \bar{b}_1 A - \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 \frac{\zeta^{-1}}{2} + (\bar{c}_1^\infty)^2 (\frac{\zeta^{-3}}{2})] \end{aligned} \quad (45)$$



參、結果與討論

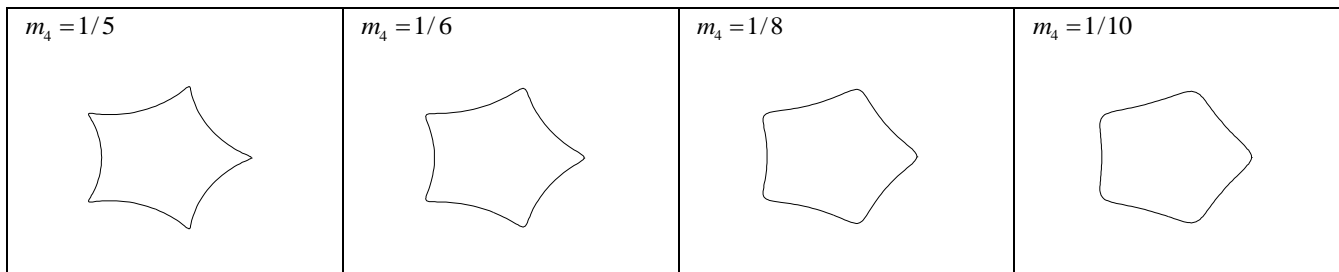
完成上述推導過程可針對幾種幾何形狀及參數  $m_n$  求出應力函數之正解，因為孔洞邊緣周圍之邊界條件  $\sigma_{rr} = 0$ ，將各函數帶入下列方程式並取  $\zeta = e^{i\theta}$  可求得孔洞邊緣周圍的環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  分布狀況。並可檢查應力集中現象。

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re} \left[ \frac{\phi'(\zeta)}{m(\zeta)} \right] + \frac{\mu\alpha\gamma}{2k} f_1(\zeta) \overline{f_1(\zeta)} \quad (46)$$

圖三、圖五和圖七分別為近似五角形近似四角形孔近似三角形孔施加能量通量  $j_{xy} = j_{xy}^\infty$  時，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化圖。圖中發現於多邊形上邊緣 ( $0 \leq \eta \leq 180$ ) 下邊緣

( $180 \leq \eta \leq 360$ ) 兩部分產生之環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  互為反對稱。圖四、圖六和圖八分別為近似五角形近似四角形孔近似三角形孔施加電流密度  $j_{ey} = j_{ey}^\infty$  時，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化圖。圖中發現於多邊形上邊緣 ( $0 \leq \eta \leq 180$ ) 下邊緣 ( $180 \leq \eta \leq 360$ ) 兩部分產生之環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  互為對稱。另外，由圖中可發現於多邊形之角落處會發生應力集中現象，且角落越尖銳 ( $m_n$  值越小) 應力集中越顯著。其增加之幅度可對照參數  $m_n$  與多邊形知幾何圖示，在參數  $m_n$  大於某臨界值時幾何會發生非一對一對映。因此，本推導與討論僅適用於此臨界值之下。而在越接近臨界值時角落尖銳程度會急遽增加，導致在尖端之應力及中現象亦急遽增加，增加幅度遠大於  $m_n$  較小時。

一、近似五角形孔(Quasi-pentagon hole):  $m(\zeta) = R(\zeta + m_4\zeta^{-4})$



應力函數  $\phi(\zeta)$  及  $\phi(\zeta)$  之正解如下:

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & A(\zeta) \log \zeta - \frac{d_2}{\zeta^2} - \frac{d_1}{\zeta} - d_0 - \frac{m_4 \bar{A}}{\zeta^3} - \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 (-\frac{4}{3} m_4 \zeta^{-4}) + (\bar{c}_1^\infty)^2 \frac{4}{5} m_4 \zeta^{-6}] \\ & - \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[(c_1^\infty)^2 (\frac{4}{3} m_4 \zeta^{-2}) + c_1^\infty \bar{c}_1^\infty \frac{4}{5} m_4 \zeta^{-4}] \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & B(\zeta) \log \zeta - \frac{\zeta^{-1} + m_4 \zeta^4}{1 - 4m_4 \zeta^{-5}} \phi_0(\zeta) + \bar{d}_2 \zeta^2 + \bar{d}_1 \zeta + \bar{d}_0 - A \frac{\zeta^{-2} + m_4 \zeta^3}{1 - 4m_4 \zeta^{-5}} \\ & + \bar{b}_4 A \zeta^3 - \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[c_1^\infty \bar{c}_1 \frac{\zeta^{-1}}{2} + (\bar{c}_1^\infty)^2 (\frac{\zeta^{-3}}{2})] \end{aligned} \quad (48)$$

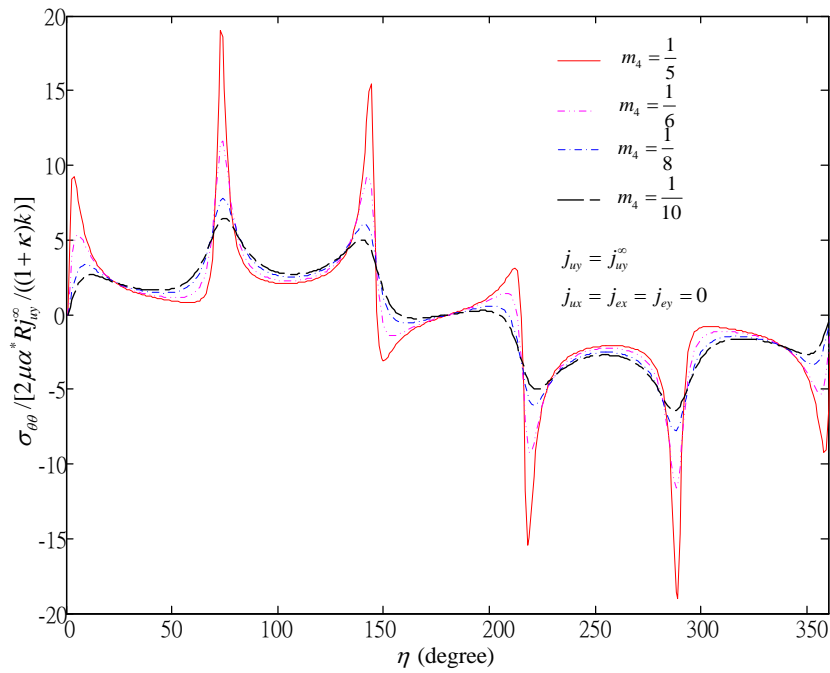
其中:

$$A(\zeta) = A = \frac{2\mu\alpha^*}{1+\kappa} (-Rc_3^\infty)$$

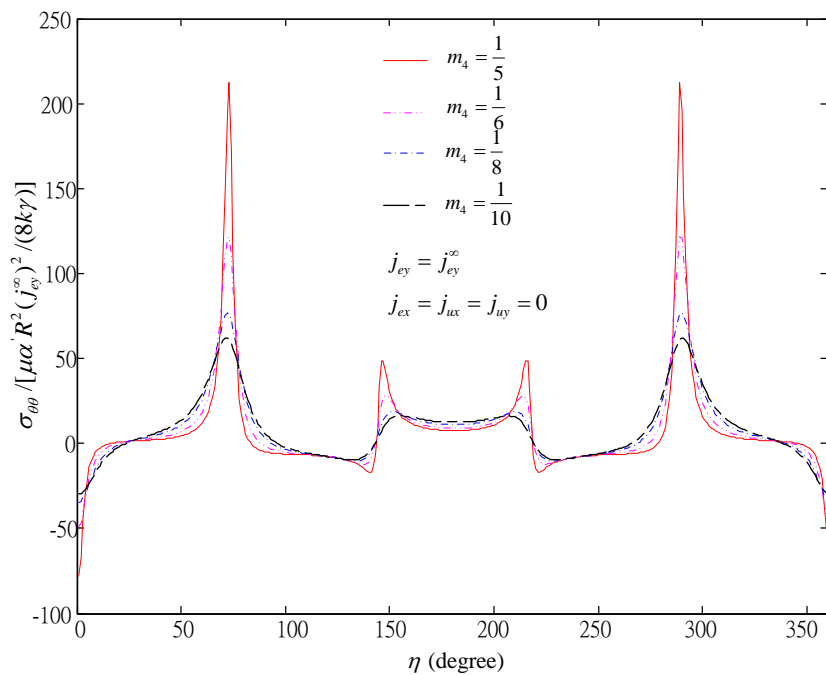
$$B(\zeta) = \bar{A} + \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[(c_1^\infty)^2 \zeta + c_1^\infty \bar{c}_1^\infty \zeta^{-1}]$$

$$d_0 = 3m_4 A, \quad d_1 = \frac{2}{1-2(m_4)^2} \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[(\frac{4}{3}(m_4)^2 (c_1^\infty)^2)], \quad d_2 = \frac{2}{1-2(m_4)^2} \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[(\frac{4}{3}(m_4)^3 (c_1^\infty)^2)]$$





圖三 當單獨施加能量通量  $j_{uy} = j_{uy}^{\infty}$  時，近似五角形孔不同參數  $m_4$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化

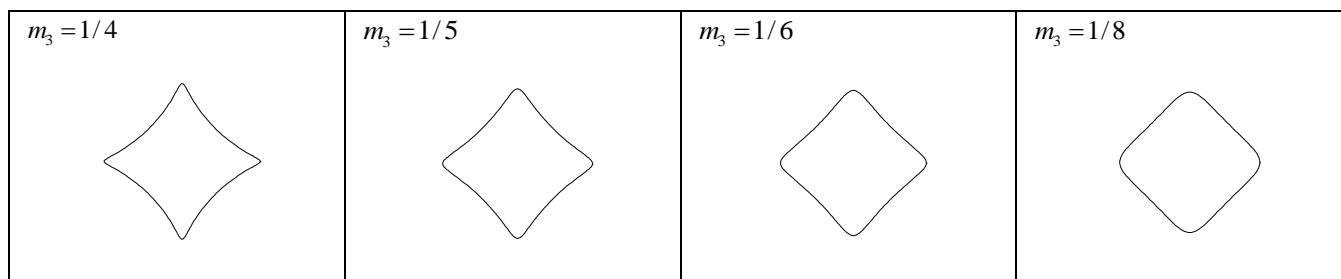


圖四 當單獨施加電流密度  $j_{ey} = j_{ey}^{\infty}$  時，近似五角形孔不同參數  $m_4$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化





二、近似四角形孔(Quasi-square hole):  $m(\zeta) = R(\zeta + m_3\bar{\zeta}^{-3})$



應力函數  $\varphi(\zeta)$  及  $\phi(\zeta)$  之正解如下:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = & A(\zeta) \log \zeta - \frac{d_1}{\zeta} - d_0 - \frac{m_3 \bar{A}}{\zeta^2} - \frac{\mu \alpha' \gamma}{4k} R[c_1^{\infty} \bar{c}_1 (\frac{3}{2} m_3 \zeta^{-3}) + (\bar{c}_1^{\infty})^2 \frac{3}{4} m_3 \zeta^{-5}] \\ & - \frac{\mu \alpha' \gamma}{4k} R[(c_1^{\infty})^2 (\frac{3}{2} m_3 \zeta^{-1}) + c_1^{\infty} \bar{c}_1^{\infty} \frac{3}{4} m_3 \zeta^{-3}] \end{aligned} \tag{49}$$

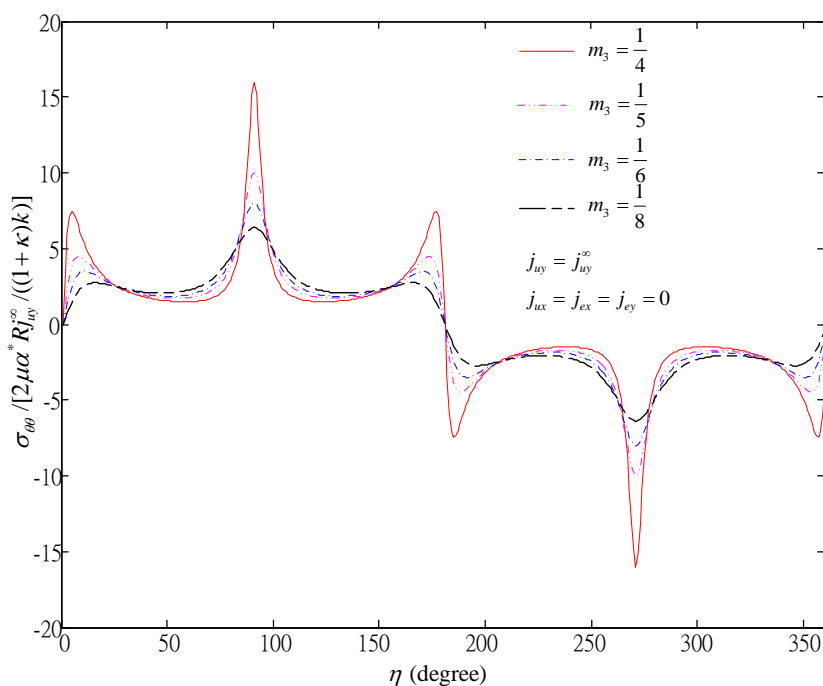
$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & B(\zeta) \log \zeta - \frac{\zeta^{-1} + m_3 \zeta^3}{1 - 3m_3 \zeta^{-4}} \phi_0'(\zeta) + \bar{d}_1 \zeta + \bar{d}_0 - A \frac{\zeta^{-2} + m_3 \zeta^2}{1 - 3m_3 \zeta^{-4}} \\ & + \bar{m}_3 A \zeta^2 - \frac{\mu \alpha' \gamma}{4k} R[c_1^{\infty} \bar{c}_1 \frac{\zeta^{-1}}{2} + (\bar{c}_1^{\infty})^2 (\frac{\zeta^{-3}}{2})] \end{aligned} \tag{50}$$

其中:

$$A(\zeta) = A = \frac{2\mu\alpha'}{1+\kappa} (-R\bar{c}_3^{\infty})$$

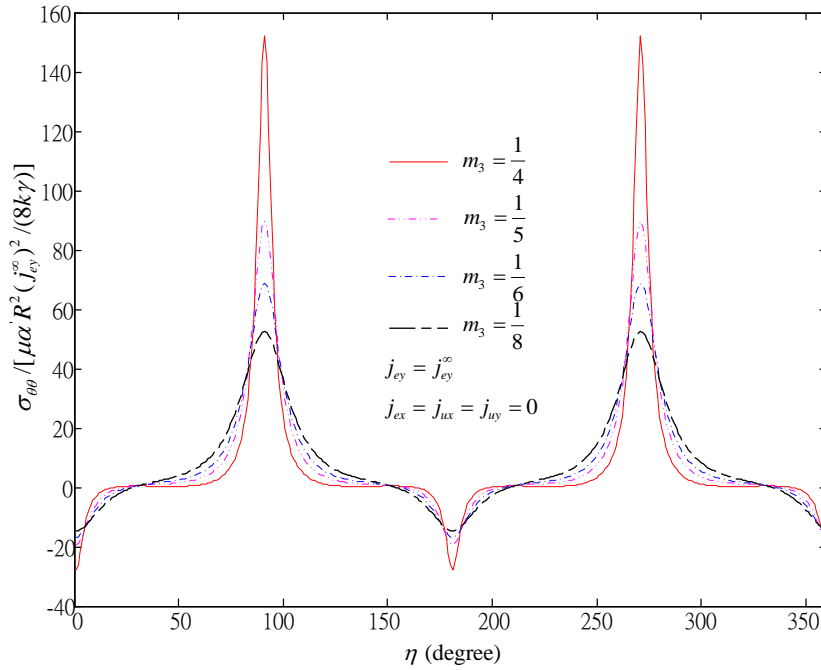
$$B(\zeta) = \bar{A} + \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[(c_1^{\infty})^2 \zeta + c_1^{\infty} \bar{c}_1^{\infty} \zeta^{-1}]$$

$$d_0 = 2(m_3)^2 A, \quad d_1 = \frac{1}{1-(m_3)^2} \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R[\frac{3}{2}(m_3)^3 (c_1^{\infty})^2 + \frac{3}{2}(m_3)^2 (\bar{c}_1^{\infty})^2]$$



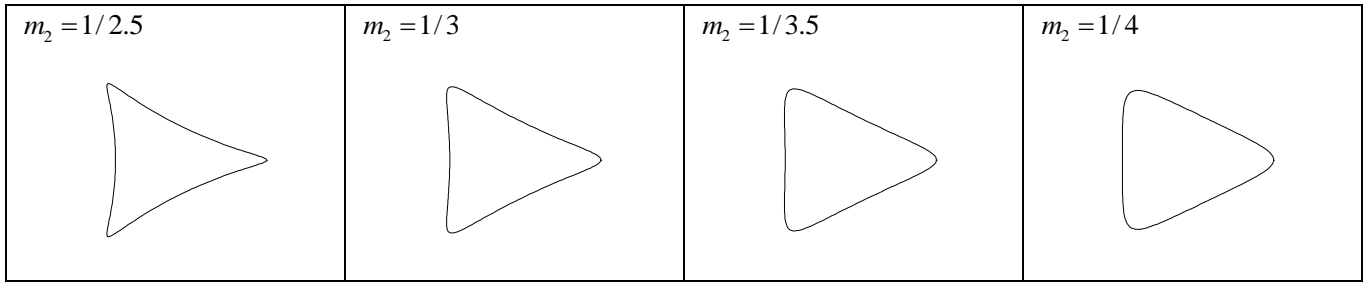
圖五 當單獨施加能量通量  $j_{wy} = j_{wy}^{\infty}$  時，近似四角形孔不同參數  $m_3$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化





圖六 當單獨施加電流密度  $j_{ey} = j_{ey}^{\infty}$  時，近似四角形孔不同參數  $m_3$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化

三、近似三角形孔(Quasi-triangle hole) :  $m(\zeta) = R(\zeta + m_2\zeta^{-2})$



應力函數  $\varphi(\zeta)$  及  $\phi(\zeta)$  之正解如下:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = & A(\zeta) \log \zeta - (m_2)^2 A - \frac{m_2 \bar{A}}{\zeta} - \frac{\mu \alpha \gamma}{4k} R[2c_1^{\infty} \bar{c}_1 m_2 \zeta^{-2} + (\bar{c}_1^{\infty})^2 (\frac{2}{3} m_2 \zeta^{-4})] \\ & - \frac{\mu \alpha \gamma}{4k} R[2(c_1^{\infty})^2 m_2 + c_1^{\infty} \bar{c}_1^{\infty} (\frac{2}{3} m_2 \zeta^{-2})] \end{aligned} \tag{51}$$

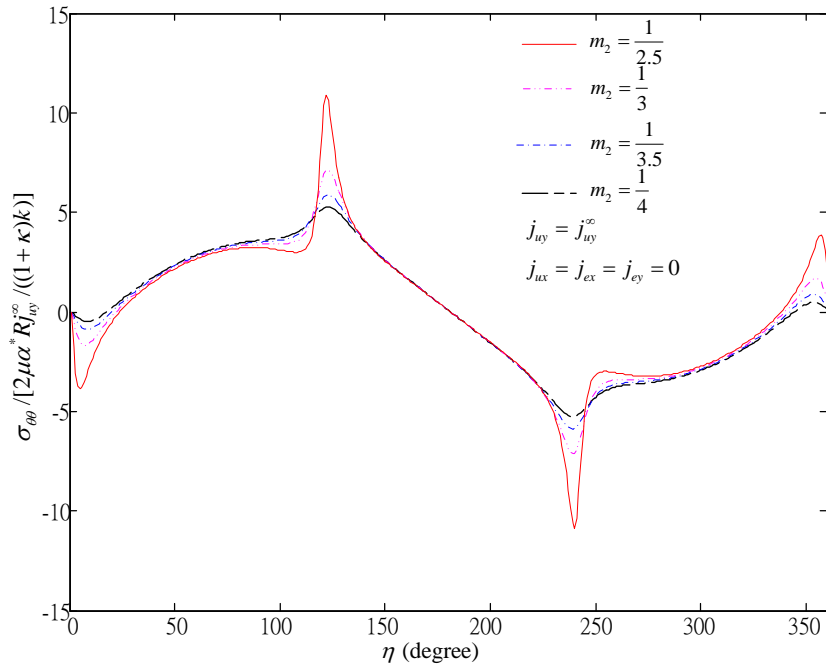
$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & B(\zeta) \log \zeta - \frac{\zeta^{-1} + m_2 \zeta^2}{1 - 2m_2 \zeta^{-3}} \varphi_0'(\zeta) + \bar{d}_0 - A \frac{\zeta^{-2} + m_2 \zeta^1}{1 - 2m_2 \zeta^{-3}} + m_2 A \zeta \\ & - \frac{\mu \alpha \gamma}{4k} R[c_1^{\infty} \bar{c}_1 \frac{\zeta^{-1}}{2} + (\bar{c}_1^{\infty})^2 (\frac{\zeta^{-3}}{2})] \end{aligned} \tag{52}$$

其中:

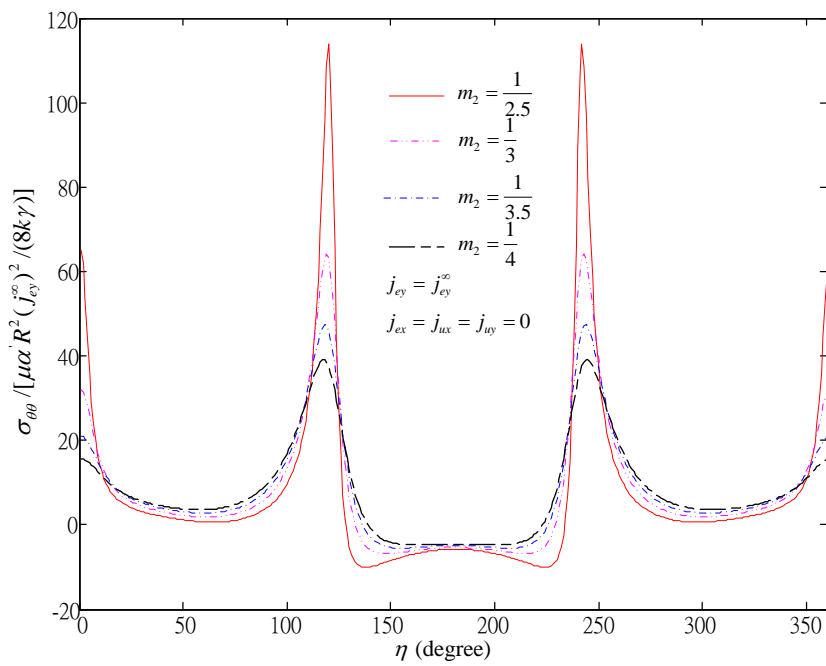
$$A(\zeta) = A = \frac{2\mu\alpha^*}{1+\kappa} (2Rc_2^{\infty} m_2 - R\bar{c}_3^{\infty})$$

$$B(\zeta) = \bar{A} + \frac{\mu\alpha\gamma}{4k} R[(c_1^{\infty})^2 \zeta + c_1^{\infty} \bar{c}_1^{\infty} \zeta^{-1}]$$





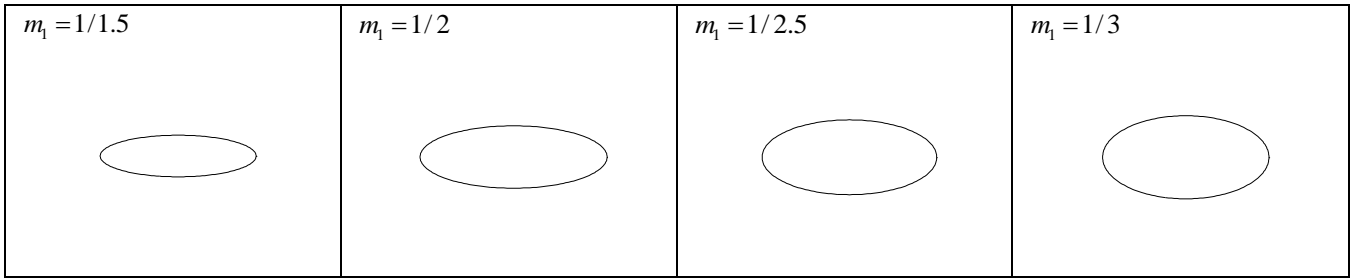
圖七 當單獨施加能量通量  $j_{uy} = j_{uy}^{\infty}$  時，近似三角形孔不同參數  $m_2$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化



圖八 當單獨施加電流密度  $j_{ey} = j_{ey}^{\infty}$  時，近似三角形孔不同參數  $m_2$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化



四、橢圓形孔(elliptic hole) :  $m(\zeta) = R(\zeta + m_1\zeta^{-1})$



我們以橢圓形孔洞之簡單範例來與現有文獻比對，取轉換函數  $z = m(\zeta) = R(\zeta + \frac{m_1}{\zeta})$ ，其中  $R = \frac{a+b}{2}$ ， $m_1 = \frac{a-b}{a+b}$ ， $a$  為橢圓形孔洞之長軸， $b$  為橢圓形孔洞之短軸，應力函數  $\varphi(\zeta)$  及  $\phi(\zeta)$  之正解如下：

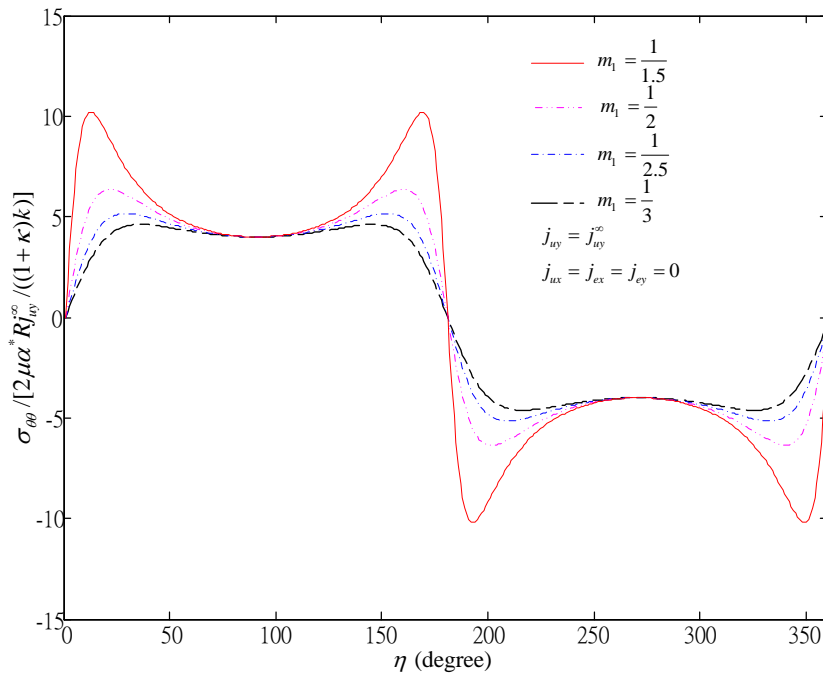
$$\varphi(\zeta) = A \log \zeta - \frac{\mu\alpha'\gamma m_1}{4k} R \left[ \frac{(c_1^\infty)^2}{2} \zeta^{-3} + \frac{c_1^\infty \bar{c}_1^\infty}{2} \zeta^{-1} \right] \tag{53}$$

$$\phi(\zeta) = B(\zeta) \log \zeta - \frac{1+m_1\zeta^2}{\zeta^2-m_1} A - \frac{\mu\alpha'\gamma R}{8k(\zeta^2-m_1)} \{ (c_1^\infty)^2 [(3m_1^2+1)\zeta^{-1} + 2m_1\zeta^{-3}] + c_1^\infty \bar{c}_1^\infty (m_1^2+1)\zeta \} \tag{54}$$

其中：

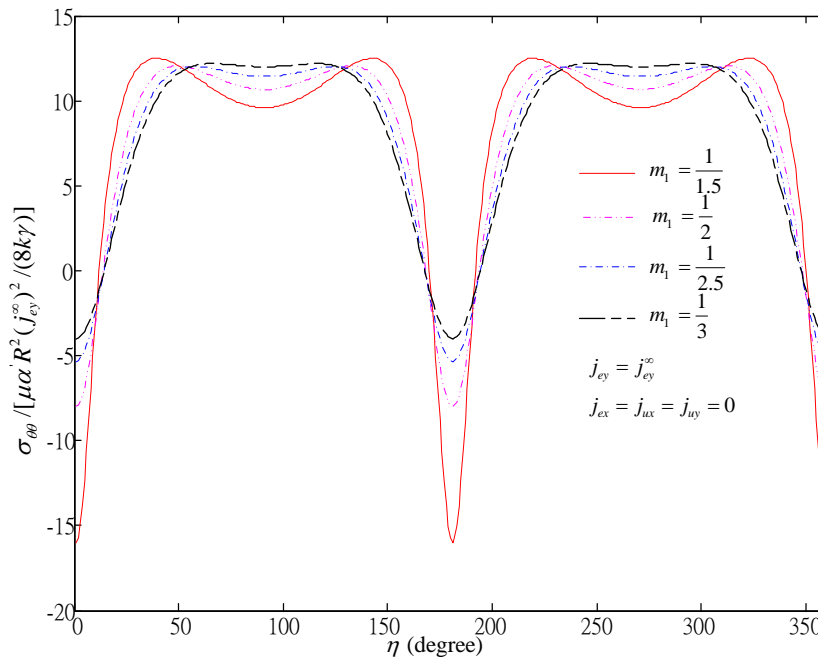
$$A = \frac{2\mu\alpha'}{1+\kappa} (Rc_3^\infty m_1 - Rc_3^\infty), \quad B(\zeta) = \bar{A} + \frac{\mu\alpha'\gamma}{4k} R [-\bar{c}_1^\infty m_1 + c_1^\infty] (c_1^\infty \zeta + \bar{c}_1^\infty \zeta^{-1})$$

當無窮遠處僅承受  $y$  軸方向之均勻電流密度 ( $j_{ey}^\infty$ ) 及能量通量 ( $j_{ey}^\infty$ ) 即 ( $j_{ex}^\infty = 0, j_{ux}^\infty = 0$ )，則  $c_1^\infty = \frac{iRj_{ey}^\infty}{\gamma}$ ， $c_2^\infty = \frac{R^2(j_{ey}^\infty)^2}{4k\gamma}$ ， $c_3^\infty = \frac{iRj_{ey}^\infty}{k}$  帶回(53)-(54)式後與與 Zhang and Wang (2016)之結果比對結果相同。



圖九 當單獨施加能量通量  $j_{ey} = j_{ey}^\infty$  時，橢圓形孔不同參數  $m_1$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化





圖十 當單獨施加電流密度  $j_{ey} = j_{ey}^\infty$  時，橢圓形孔不同參數  $m_1$ ，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化

圖九為橢圓形孔施加能量通量  $j_{uy} = j_{uy}^\infty$  時，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化圖。圖十為橢圓形孔施加電流密度  $j_{ey} = j_{ey}^\infty$  時，環向應力  $\sigma_{\theta\theta}$  隨  $\eta$  的變化圖。此結果所顯式之現象與 Zhang and Wang (2016)之結果比對結果相似。

### 五、圓形孔(Circular hole)： $m(\zeta) = R\zeta$

再將結果簡化為圓形孔洞  $z = m(\zeta) = R\zeta$ ， $m_1 = 0$ ，將  $\zeta = z/R$  帶入(24)(28)(53)(54)式得

$$f_1(z) = \frac{j_{ey}^\infty}{\gamma} (z - \frac{R^2}{z}) \quad (55)$$

$$g(z) = \frac{(j_{ey}^\infty)^2}{4k\gamma} (z^2 + \frac{R^4}{z^2}) + \frac{j_{uy}^\infty}{k} (z - \frac{R^2}{z}) \quad (56)$$

$$\phi(z) = \frac{2\mu\alpha^* R^2 j_{uy}^\infty}{(1+\kappa)k} \log(\frac{z}{R}) \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \phi(z) = & \left\{ -\frac{2\mu\alpha^* R^2 j_{uy}^\infty}{(1+\kappa)k} + \frac{\mu\alpha^*}{4k\gamma} [-R^2 (j_{ey}^\infty)^2 z + R^4 (j_{ey}^\infty)^2 \frac{1}{z}] \right\} \log(\frac{z}{R}) \\ & - \frac{2\mu\alpha^* R^2 j_{uy}^\infty R^2}{1+\kappa z^2} + \frac{\mu\alpha^* (j_{ey}^\infty)^2}{8k\gamma} (\frac{R^6}{z^3} - \frac{R^4}{z}) \end{aligned} \quad (58)$$

此結果與與 Wang and Wang (2017)之結果相同。

### 肆、致謝

本論文感謝科技部計畫資助。

計畫編號：MOST 108-2221-E-252-001-MY2

### 參考文獻

- Bell, L.E. (2008). Cooling, heating, generating power, and recovering waste heat with thermoelectric systems. *Science*, 321, 1457-1461.
- Biswas, K., He, J.Q., & Blum, I.D. (2012). High-performance bulk thermoelectrics with all-scale hierarchical architectures. *Nature*, 489, 414-418.
- England, A.H. (1971). *Complex variable methods in elasticity*. Wiley-Interscience, London.
- Hwu, C. (1992). Polygonal holes in anisotropic media. *International Journal of Solids and Structures*, 29, 2369-2384.
- Gao, C.F., & Noda, N. (2004). Faber series method for two-dimensional problems of arbitrarily shaped inclusion in piezoelectric materials. *Acta Mechanica*, 171, 1-13.
- Pang, S.J., Zhou, Y.T., & Li, F.J. (2018). Analytic solutions of thermoelectric materials containing a circular hole with a straight crack. *International Journal of Mechanical Sciences*, 144, 731-738.
- Shen, M.H., Chen, F.M., Chen, S.N., & Hung, S.Y. (2009). Piezoelectric study for a coated hole of quasi-polygonal shape in an infinite plate. *International Journal of Engineering Science*, 47, 475-486.



- Shen, M.H., & Hung, S.Y. (2012). Magnetoelastic analysis of an arbitrary shape inclusion undergoing eigenfields and remote loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 49, 3808-3815.
- Shen, M.H., & Hung, S.Y. (2012). Piezoelectric screw dislocation in an arbitrarily shaped three-phase composite. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 32, 13-20.
- Song, H.P., Gao, C.F., & Li, J.Y. (2015). Two-dimensional problem of a crack in thermoelectric materials. *Thermal Stress*, 38(3), 325-337.
- Wang, P., & Wang, B.L. (2017). Thermoelectric fields and associated thermal stresses for an inclined elliptic hole in thermoelectric materials. *International Journal of Engineering Science*, 119, 93-108.
- Wang, X., & Sudak, L.J. (2006). Interaction of a screw dislocation with an arbitrary shaped elastic inhomogeneity. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 73, 206-211.
- Zhang, A.B., & Wang, B.L. (2013). Crack tip field in thermoelectric media. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 66, 33-36.
- Zhang, A.B., & Wang, B.L. (2016). Explicit solutions of an elliptic hole or a crack problem in thermoelectric materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 151, 11-21.
- Zhang, A.B., Wang, B.L., Wang, J., & Du, J.K. (2017). Two-dimensional problem of thermoelectric materials with an elliptic hole or a rigid inclusion. *International Journal of Thermal Sciences*, 117, 184-195.



# Two Dimensional Problem of a Thermoelectric Material with an Arbitrarily Shaped Hole

M. H. Shen<sup>1</sup>, Y. S. Lin<sup>2</sup>, S. Y. Hung<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Automation Engineering, Nan Kai University of Technology

<sup>2</sup> Graduate School of Vehicle & Mechatronic Industry, Nan Kai University of Technology

## Abstract

Due to the capability of interconverting heat energy and electrical energy directly on a solid state basis, thermoelectric materials have wide engineering applications. Thermoelectric materials are typical brittle solids. Defects resulting from the manufacturing processes may cause thermoelectric and stress field concentrations and reduce the strength of the materials. Therefore, the fracture problems in thermoelectric materials have theoretical and practical significance. This paper investigates the generalized two-dimensional problem of an arbitrarily shaped hole in a nonlinear coupled thermoelectric material subjected to uniform electric current density and energy flux at infinity. Since the main purpose of this paper is to discuss the coupled behavior of thermoelectric materials subjected to thermoelectric loads, the hole is assumed to be free of tractions. The heat impermeable boundary condition is used to simplify the analysis. Based on the complex variable method and the conformal mapping technique, the exact solutions of electric potential, temperature and stress fields are derived with the assumption that the surfaces of the arbitrarily shaped hole are electrically and thermally insulated. The solutions of a elliptical and a circular hole problems will be provided to compare with the existing ones. Numerical results are provided to show the influences of hole shapes, applied electric current density and energy flux on the thermoelectric and stress fields.

**Keywords:** Thermoelectric material, Arbitrarily shaped hole, Electric current density, Energy flux

