

磁流體在垂直收縮平板之熱流場分析 A Thermal Flow Analysis of a MHD Fluid on a Vertical Shrinking Sheet

賴全

Chuan Lai

黎明技術學院機械工程學系

Department of Mechanical Engineering Lee-Ming Institute of Technology

許政行 胡舒毓

Cheng-Hsing Hsu, Shu-Yu Hu

中原大學機械工程學系

Department of Mechanical Engineering Chung-Yuan Christian University

陳柏壯

Po-Chuang Chen

核能研究所核子燃料及材料組

Nuclear Fuels and Materials Division Institute of Nuclear Energy Research

摘 要

本文為研究導電性牛頓流體在收縮平板表面上之穩態熱流場邊界層行為解析。其探討垂直方向平板於均勻磁場且不同的質量吸入效應狀態下，加入熱對流效應後所產生的影響。經由相似轉換將偏微分統御方程式重新推導後得以用常微分方程式來分析熱流場行為，並以有限差分法進行數值求解。分析結果可得知，加入自然對流效應後，流場會出現回流的狀況，且隨磁場強度、質量吸入效應的增加，回流的狀況受到抑制而漸減，而在越高的蒲朗多數(Prandtl number) 下，因自然對流效應所產生的回流現象也會受到抑制。

關鍵詞：磁流體、熱流場、牛頓流體、收縮平板

Abstract

A thermal flow analysis for Newtonian MHD fluid on a shrinking sheet was studied. The effects of the uniform vertical magnetic field and a suction flow on the sheet were considered in the present heat convection problem. The similarity method was adopted to transform the governing partial differential equations to a set of ordinary differential equations. A finite-difference method was employed to



obtain numerical solution of the equations. The results show that a reverse flow was present with the natural convection and this effect can be suppressed by the increasing magnetic parameter or suction rate. In addition, the reverse flow is also suppressed with higher Prandtl number.

Key Words: MHD Fluid, Thermal Flow Analysis, Newtonian Fluid, Shrinking Sheet



1. 前言

因科學與工業製程技術不斷的進步，任何微小細節均可能是產品生產或品質上的關鍵。這其中，導電性流體的概念也開始在工業製程中備受注意。如在半導體產品的製作過程中，即存在工作機台或載送製品的動態平台對液態輸送管線之間的電磁干擾問題。其中輸送管內的液體就是屬於導電性流體應用範疇。電磁的干擾會造成機台定位等作業環境和產品良率受相當程度的影響，當磁場強度過大時，便會導致產品良率下降。在鋼鐵鑄造、塑膠射出成型、薄膜製作等製程中，時間與溫度等控制因素均會影響產品的物理性質，而外部磁場環境可能會對產品在拉伸或收縮時的流場或熱傳效應產生影響。由以上製程中的顧慮便可以知道確實有必要對磁性流體的特性做更進一步的研究【1】。對於流場的分析研究，目前電磁場對於導電性流體之邊界層影響在不同的幾何形狀下，如平板流場、楔形流場或是牛頓、非牛頓等不同性質之流體，皆已有許多分析及討論。而本文將針對導電性牛頓流體在一收縮平板且為固定磁場環境中，流體的熱流場狀況進行分析。

2. 研究內容與目的

Miklavčič and Wang【2】探討收縮平板在一維與二維收縮時速度邊界層的解。在邊界層條件假設一個吸入參數 s ，最後找到當 $s = \sqrt{6/(2m-1)}$ 時存在有解析解 $f(\eta) = s^2/(\eta + \varepsilon)$ 。其中 m 為維度參數， η 為相似轉換因子，並討論吸入參數 s 在其它情況下的數值。

根據文獻，拉伸平板和收縮平板相關的邊界層問題已經有相當多的研究成果。近年工業製程要求高品質，磁場對邊界層的影響開始被受注意，本文將探討平板在

非牛頓流體中收縮時，磁場對速度邊界層的影響。

為了觀察溫度場對於速度邊界層之影響，本文將採用固定磁場。並在多組不同磁場強度下，進行導電性牛頓流體在收縮平板上之計算及分析。物理模型經由連續方程式、動量守恆方程式及能量守恆方程式推導出統御方程式。再透過相似轉換之數值技巧分別獲得三階與二階之兩組非線性微分方程式，如此便可經由數值方法之協助計算近似解。

2.1 物理模型與基本假設

1904年，Ludwig Prandtl發表了一篇開創性的論文，將流場區分為邊界層流區 (boundary layer flow region) 及勢流區 (potential flow region) 並建構出流線，且描述了流體在邊界層流區產生的摩擦效應現象進而使速度受到影響，勢流區則因遠離物體表面，故可忽略摩擦效應的影響。

邊界層流區間內因存在磨擦效應，所以剪應力 (shear stress) 與剪應變率 (shear rate) 成為影響速度變化的重要參數，而當彼此關係互為線性時，則稱為牛頓流體。於二維模式下剪應力 τ_{xy} 與剪應變率 $\partial u/\partial y$ 之關係可表示如下

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

其中 μ 為流體的黏滯係數，自然界當中有許多流體，諸如水、油、空氣等皆為牛頓流體。但其中也有剪應力與剪應變率兩者關係為非線性變化的流體，此時稱為非牛頓流體。本文將探討的是在垂直平板方向存在固定均勻磁場並考慮溫度傳導的情況下，流體為含有極微小之磁性分子的牛頓磁性流體。

圖 1 為本研究之平板收縮模型示意圖，假設平板僅在 x 方向平板中心收縮。圖 2 為本研究探討之物理模型示意圖，平板長度 L ，均勻厚度為 d ，平板上有一初



始溫度 T_0 ，假設該平板為一張薄平板 ($L \gg d$)。外部環境溫度為 T_∞ ，並存在一個 y 方向的固定磁場 B 以及重力項 g ，平板在 x 方向以速度 $u = -U^*x$ 收縮，使平板表面產生邊界層熱流場。在熱流場表面存在 y 方向的質量吸入速度 $v(x)$ ，邊界層熱流場以外之 x 方向的速度為 $U_x = 0$ 。藉此分析邊界層內的熱流場隨著磁場大小、質量吸入速度、起始溫度的不同而產生變化。

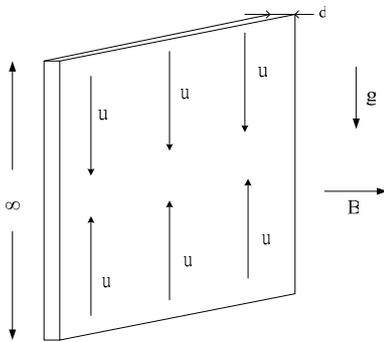


圖 1 平板收縮示意圖

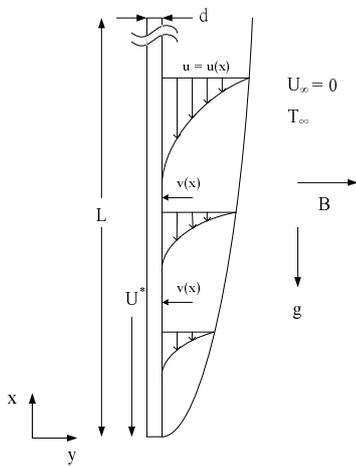


圖 2 物理模型示意圖

本研究採用以下之假設：

1. 流體為牛頓流體。
2. 二維穩態層流。
3. 流體密度、磁場及其它物理性質均為常數。
4. 不可壓縮流體且具有黏滯性的導電性流體。

5. 平板收縮時，平板表面有質量吸入效應 (Suction)。
6. 具導電性流體的磁雷諾數(Magnetic Reynolds number)遠小於 1。

2.2 基本磁液動力學理論

當導電性流體受電磁場作用，會產生四種作用力，分別為靜電力(electrostatic force)、總羅倫茲力(ponder motive force)、因電介質改變所產生的力(electrostrictive force)以及因電磁率改變所產生的力(magnetostrictive force) 其中只有總羅倫茲力與統制流體運動的力相當，其它三種力之階級(order)皆遠小於統制流體運動的力，所以可忽略不討論【3】。而在磁性流體力學理論中，流體中的磁性粒子平均自由路徑 λ (mean free path)相較於問題之特徵長度(characteristic length)甚小，則可忽略個別粒子的行為，而假設是由物理性質連續分佈之巨觀量，因此本研究將磁性流體視為連體(continuum)。

在 19 世紀時，英國物理學家馬克斯威爾(Maxwell)建立了描述電磁場的基本方程組，並稱之為馬克斯威爾統制方程組(Maxwell's equations)，其方程組如下所述：

由法拉第定律(Faraday's law)可知，變動的磁場可以產生電場，其電磁關係式表示如下：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

安培定律(Ampere-Maxwell law)描述電流產生磁場，但變動的電場也可產生磁場。故馬克斯威爾將兩者整合，磁場成為電流與變動的電場所共同產生：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

高斯定律(Gauss's law)描述任一封閉曲面向外總電通量等於該曲面包圍的總靜電荷：



$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \quad (4)$$

有 N 極必存在 S 極，磁極不可能獨立存在，相反亦然：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5)$$

其中 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ， $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

\vec{B} 是磁感應強度向量 (magnetic induction)， \vec{E} 是電場強度向量 (electric intensity)， \vec{H} 是磁場強度向量 (magnetic intensity)， \vec{j} 是感應電流密度向量 (induced current)， ϵ 是介電係數 (permittivity)， \vec{D} 是電位移向量 (electric induction)， ρ_c 是電子體積密度 (net space-charge density)， μ_0 是磁導率 (magnetic permeability)。

歐姆定律 (Ohm's law) 為：

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (6)$$

其中 σ 為電流係數 (electrical conductivity)， \vec{V} 為流場速度向量。因磁性流體之微小粒子為電中性，可忽略電位移向量 $\vec{D} = 0$ ，且不探討電場之影響，即 $\vec{E} = 0$ ，將馬克斯威爾方程組式(2) ~ (5)和歐姆定律(6)整理可獲得磁感應方程式：

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \nu_m \nabla^2 \vec{B} \quad (7)$$

式中 $\nu_m = 1/\sigma \mu_0$ 為導電性流體的動黏滯係數。將式(7)式無因次化後可得：

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \frac{1}{Re_M} \nabla^2 \vec{B} \quad (8)$$

其中 Re_M 為磁雷諾數，並表示為 $Re_M = \mu_0 \sigma U_0 L$ ，為一個無因次參數。磁雷諾數可表示為具有導電性之流體流動時所引起的誘導磁場強度與外加磁場強度的比值。在本文中假設 $Re_M \ll 1$ ，即磁雷諾數很低時，感應磁場 (induced magnetic field) 相對於外加磁場 (applied magnetic field) 可被忽略【3】，式(8)可簡化為：

$$\nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (9)$$

由以上說明，本文只考慮總羅倫茲力存在其作用於每單位體積之導電物質上的力

量，即

$$\vec{F}_M = \vec{j} \times \vec{B} = \sigma (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (10)$$

當只探討垂直平板方向之磁場 $\vec{B} = B \vec{j}$ ，收縮速度僅為 x 方向 $\vec{V} = u \vec{i}$ 時，式(10)可簡化為：

$$\vec{F}_M = -\sigma B^2 u \vec{i}$$

如此便推得動量守恆方程式之磁力項。

2.3 自然對流

自然對流形成的原理是密度梯度 (density gradient) 作用在流體上，此種作用的淨效應即為浮力 (buoyancy force)，並在流體中產生自然對流。

考慮層流邊界層流動 (圖 3) 係由浮力驅動所致，假設穩定、二維、定物性等條件，重力作用在負 x 方向。假設僅考慮重力效應的作用，動量方程式可整理成

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11)$$

在邊界層內任意點的 x 壓力梯度，必須等於邊界層外側靜止區域的壓力梯度值，而且此區域的 $u=0$ ，故式(11)是可簡化成

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \quad (12)$$

將式(12)帶入式(11)，整理可得

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{\rho} (\rho_s - \rho) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (13)$$

在式(13)是等號右邊的第一項代表浮力，流動係源自於密度 ρ 的變化。若導入體積熱膨脹係數 β ，則可使變化量呈顯性變數， β 的定義為

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (14)$$

在等壓狀況下的溫度改變導致密度之變化，可藉由流體的熱力性質予以提供相關資料。倘若以下列的近似型式表示

$$\beta \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = (\rho_s - \rho) \approx \rho \beta (T_s - T) \quad (15)$$



是故浮力項可重新表示為

$$F_B = \frac{\rho \beta (T - T_\infty)}{\rho} \quad (16)$$

至此，推得本文之動量守恆方程式之浮力項。

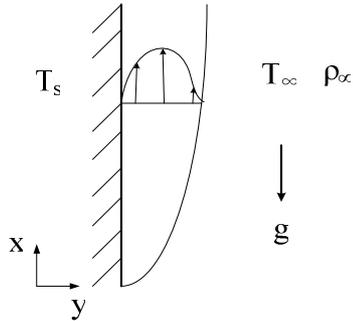


圖 3 自然對流示意圖

2.4 統御方程式

本文考慮二維平面中，流體為不可壓縮、穩態的導電性流體。如圖 4 所示，在邊界層內取一個微小之流體質點作為控制體積來探討，將以微分之型式推導出統御方程式，並用卡式座標系統(Cartesian Coordinates System)表示。

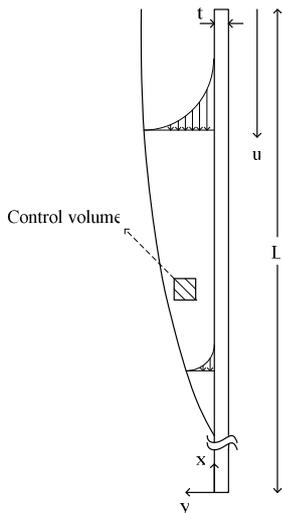


圖 4 控制體積示意圖

由控制體積內流體質量變化率等於流體淨流進率，由此便可推導出連續方程式 (continuity equation) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

運用牛頓第二運動定律，物體受外力之合力等於物體的動量變化量 ($\sum F = \frac{DmV}{Dt}$) 便可推導出動量守恆方程式 (momentum equation) :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_M + F_B \quad (18)$$

其中 τ_{xy} 將採用前文提到的牛頓流體模式， F_M 為磁力項， F_B 為浮力項，而方程式變為：

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \sigma B^2 u + g\beta(T - T_\infty) \quad (19)$$

其中動黏滯係數 (kinematic viscosity) $\nu = \mu/\rho$ 。

由能量守恆於熱邊界層之微分控制容積，由能量之淨變化率可推得能量方程式 (thermal energy equation) :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (20)$$

2.5 相似轉換

本研究採用相似轉換法 (similarity method) 將二維的質量守恆方程式和動量守恆方程式之偏微分型式轉為常微分型式，接著再以數值方法進行求解。在諸多研究流場的論文中皆以此技巧進行邊界層之解析。

首先假設流線函數 ψ (stream function) 和相似轉換因子 η (similarity variable) 為：

$$\psi \equiv U^* \sqrt{vx/U^*} \cdot f(\xi, \eta) \quad (21)$$

$$\eta \equiv y \sqrt{U^*/vx} \quad (22)$$

其中， $\xi(x) = \frac{x}{L}$ ， $u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ， $v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ 。將式(17)

對 x 、 y 微分可得：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U^* \cdot f' \quad (23)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{U^*}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{2} f'\right) \quad (24)$$



其中撇號表示對相關函數之微分。將 u 、 v 分別對 x 和 y 偏微分可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U^*}{x} \left(\xi \frac{\partial f'}{\partial \xi} - \frac{1}{2} f'' \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{U^*}{x} \left(\xi \frac{\partial f'}{\partial \xi} - \frac{1}{2} f'' \right) \quad (26)$$

由式(23)和式(24)相加為零，表示相似轉換參數已滿足連續方程式(11)。接著再將動量守恆方程式(13)中的其它項以相似轉換參數表示：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U^* \left(\frac{U^*}{xk} \right)^{\frac{1}{2}} f'' \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{U^{*2}}{xk} f'' \quad (28)$$

將式(24)~式(28)代入動量守恆方程式(19)可推得相似方程式為：

$$f'' + \frac{1}{2} f' \cdot f'' - \xi \frac{\partial^2 f'}{\partial \xi^2} f' + \xi \frac{\partial(G-T_m)L}{U^{*2}} = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f'}{\partial \xi} \right) \quad (29)$$

速度邊界層的相似方程式推導完成後，便可建立能量方程式之相似轉換，假設一相似解 $\phi = \phi(\eta)$ ，並令 $\phi = \frac{T-T_m}{T_w-T_m}$ 代入(20)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{U^*}{2x} \eta \phi' \quad (30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{U^*}{xk} \right)^{\frac{1}{2}} \phi' \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{U^*}{xk} \phi'' \quad (32)$$

將式(23)、式(24)、式(30)~式(32)代入能量方程式(20)可推得相似方程式為：

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \phi'' + \frac{1}{2} f' \phi'' = \xi \left(f' \frac{\partial \phi''}{\partial \xi} - \phi'' \frac{\partial f'}{\partial \xi} \right) \quad (33)$$

將下列無因次參數帶入相似轉換方程組中

$$Re = \frac{U^* L}{\nu}, Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}, Mn = \frac{Ha^2}{Re}, Ha^2 = \frac{\sigma B^2 L^2}{\mu} \quad (34)$$

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}, Gr = \frac{g \beta (T_w - T_m) L^3}{\nu^2}$$

其中 Re 是 Reynolds number; Pr 是 Prandtl number; Mn 是 magnetic parameter; Ha 是 Hartman number; Ri 是 Richardson number; Gr 是 Grashof number。

相似轉換方程組可以重新整理為下式

$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{2} f' f'' - \xi Mn f' + \xi Ri \phi = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f'}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \phi'' + \frac{1}{2} f' \phi'' = \xi \left(f' \frac{\partial \phi''}{\partial \xi} - \phi'' \frac{\partial f'}{\partial \xi} \right) \end{cases} \quad (35)$$

數值計算的部分，運用 Local Similar Solution【4-6】求解，當 $\frac{\partial f'}{\partial \xi}$ 、 $\frac{\partial \phi''}{\partial \xi}$ 之值很小時，該項次可以被忽略，全式重新整理如下

$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{2} f' \cdot f'' - \xi Mn \cdot f' + \xi Ri \cdot \phi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \phi'' + \frac{1}{2} f' \cdot \phi'' = 0 \end{cases} \quad (36)$$

本研究假設平板在 x 軸上往負 x 方向收縮，在 $y=0$ 時平板以速度 $u = -U^* x$ 收縮 (U^* 為速度常數)，且平板表面假設為無滑動條件 (No-slip)， y 方向存在吸入現象 $v = v(x)$ 。在 $y \rightarrow \infty$ 時，因位處於邊界層外，假設流體為靜止，即 $u = 0$ 。

可由式(23)、(24)可整理得邊界條件如下：

$$\begin{aligned} y=0 : u &= u(x), \\ v &= v(x) = -\left(\frac{U^*}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} + \xi \frac{\partial f'}{\partial \xi}\right) \\ y \rightarrow \infty : u &\rightarrow 0 \quad v \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $v(x)$ 的假設是由相似轉換法推導而出。而 S 定義為本研究探討之吸入參數。當 $y=0$ 及 $y \rightarrow \infty$ 帶入式(37)可得 $\eta=0$ 和 $\eta \rightarrow \infty$ ，再藉由速度 u 、 v 之邊界條件假設即可推得相似邊界條件如下，其中吸入參數 S 為質量吸入之無因次速度。

$$\begin{aligned} \eta=0 : f(0) &= S, \quad f'(0) = -1, \quad \phi(0) = 1 \\ \eta \rightarrow \infty : f'(\infty) &= 0, \quad \phi(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

3.數值方法

在工程科學上，所發生的一切問題，常模擬成數學式，用來表示他們的關係。而此數學式可能由實驗數據所組成一些曲線函數關係、經驗公式或理論所導出的公式，然後使用電腦程式語言進行程式撰寫



並執行出我們所求的近似解答，這就稱之為數值方法。工程數學上所碰到的微分級積分常常是不容易處理，甚至算不出其正解(Exact solution)，但透過泰勒級數法或二項式定理展開成無限多項，然後求其近似解。

3.1 有限差分法

一函數 $f(x)$ 在某一點的導數，取間距 $\Delta x = h$ ，其泰勒級數之展開為

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \quad (39)$$

將上式(39)用差分運算符號表示，可改寫為 $f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \frac{h^3}{3!} f'''_i + \dots$ (40)

同理，泰勒級數也可以向後展開，展開如下式

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \quad (41)$$

差分運算符號則表示為

$$f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i - \frac{h^3}{3!} f'''_i + \dots \quad (42)$$

將式(40)與式(42)相減，並將三階項之後捨去，全式重新整理為

$$f'_i = \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (43)$$

若將式(40)與式(42)相加，全式重新整理為

$$f''_i = \frac{1}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (44)$$

以此類推可得更高階的運算，上述方法即為中央差分，其截斷誤差為 $O(h^2)$ 。

3.2 相似轉換之數值化

由上一節的邊界條件可知， $f'(0)$ 、 $f'(\infty)$ 之值分別為 -1 、 0 ，若以中央差分來求數值解，可將相似方程降階一次。令 $f' = z$ ， $f'' = z'$ ， $f''' = z''$ ，代入相似方程

$$\begin{aligned} \text{組原式：} & f''' + \frac{1}{2} f'' - \xi M n f' + \xi R i \cdot \phi = 0 \\ \rightarrow z'' + \frac{1}{2} f' \cdot z' - \xi M n \cdot z + \xi R i \cdot \phi = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

數值化：

$$z''_i + \frac{1}{2} f'_i \cdot z'_i - \xi M n \cdot z_i + \xi R i \cdot \phi_i = 0 \quad (46)$$

將式(43)、式(44)代入

$$\frac{1}{h^2} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) + \frac{1}{2} f'_i \cdot \frac{1}{2h} (z_{i+1} - z_{i-1}) - \xi M n \cdot z_i + \xi R i \cdot \phi_i = 0 \quad (47)$$

依據迭代法，將 z_i 整理到等式的另一邊

$$z_i = \left(\frac{1}{h^2} + \xi M n \right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{h^2} (z_{i+1} + z_{i-1}) + \frac{1}{2h} (z_{i+1} - z_{i-1}) \cdot f'_i + \xi R i \cdot \phi_i \right) \quad (48)$$

以此類推，令一能量守恆相似轉換式也可數值化為

$$\phi_i = \frac{1}{2} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) + \frac{Pr \cdot h}{4} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \cdot f'_i \quad (49)$$

其中式(46)與式(47)， f'_i 以單步法來計算，式子如下

$$f'_{i+1} = f'_i + h \cdot z_i \quad (50)$$

3.3 倫奇-庫達法

所謂的單步法是利用一個已知點的值來推測出下一點的值的方法，以數學式子簡單的表示為：

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (51)$$

式中 y_i 為已知值， ϕ 為 y_i 處的斜率， h 為 x_i 與 x_{i+1} 之間距，如此便可計算推測出 y_{i+1} 之值，由單步法所得之 y_{i+1} 值與真實值存在截斷誤差。倫奇-庫達法將式(40)改寫為：

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) h \quad (52)$$

式中 $\phi(x_i, y_i, h)$ 稱為增量函數(increment function)，其意義為取該區間中的平均斜率，此增量函取以一般式表示為：



$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (53)$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 為常數, k_1, k_2, \dots, k_n 為 :

$$k_1 = f(x_1, y_1)$$

$$k_2 = f(x_1 + p_2 h, y_1 + q_{2,1} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_1 + p_3 h, y_1 + q_{3,1} k_1 h + q_{3,2} k_2 h)$$

⋮

$$k_n = f(x_1 + p_n h, y_1 + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

式中下標 n 可表示為倫奇-庫達法的階數。

3.4 數值方法之對比與驗證

若以知名的單步法—四階倫奇-庫達法(Runge-Kutta method)來計算, 會需要 $f(0), f'(0), f''(0), \phi(0), \phi'(0)$ 等五個初值條件, 其中 $f''(0), \phi'(0)$ 二初值參數皆為相互作用及影響, 不易使用各式猜值技巧, 如牛頓法、假位法等方法來解決初值問題, 然若利用中央差分之結果所得到 $f''(0), \phi'(0)$ 之值再帶回倫奇-庫達法中, 便可利用射擊法來修正其步進結果, 直至終值達到本文所要求的, 是故在此用做對比於中央差分法, 兩者的計算結果是否一致。

圖 5 分別為不同參數下的四階倫奇-庫達法與中央差分法之計算結果圖, 從圖中可看出兩者結果近乎重疊, 而在數據的比較上, 兩種數值方法的有明顯差異性出現在小數第四、五位以後, 計算時間上雖以中央差分法較為費時, 然四階倫奇-庫達法在 $f''(0), \phi'(0)$ 兩初始條件之猜值計算較為困難, 且易出現發散結果, 需要反覆修正程式的判讀, 在本文大量之參數組合下, 整體以中央差分計算是較為有效率的求解。

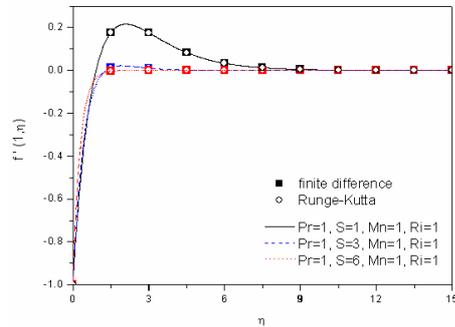


圖 5 四階倫奇-庫達法與中央差分法之計算比較圖

4. 結果與討論

考慮 Ri 值也就是自然對流時, 速度流場由 Ri 數主導, 越高的 Ri 值速度越大, 邊界層也隨之變小, 而磁場的加大, 則可看出也有抑制自然對流的效果, 因為速度流場上 Ri 值越高速度越快, 故也有較好熱傳效果。

當 Prandtl number 為 1, 吸入參數 S 等於 1, 在不同 Richardson number 及 Magnetic parameter 其速度場下的結果圖如圖 6 所示。從圖中可知, 相同的 Ri 值下受磁場影響速度較慢者熱傳效果也差。吸入參數 S 等於 3, 其速度流場的表現與 S=1 相似, 惟速度極值受到吸入參數增加的影響而變低, 而在自然對流較低的情況下, 除因自然對流產生的回流現象減少外, 流場也受磁場影響進而邊界層縮減。

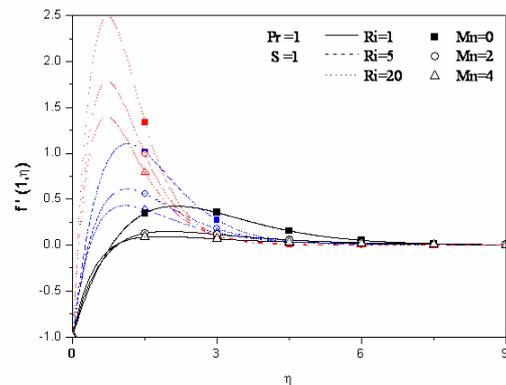


圖 6 Pr = 1, S = 1 下之 $f'(1, \eta) - \eta$



圖 7 為相對應圖 6 的溫度場分佈，因 Ri 數較低，自然對流效應不顯著，在熱傳上則不同於有回流現象磁場較大者熱傳較差之結果，而以磁場較大有較好之熱傳的結果但整體仍以 Ri 值較大者(···)有較好的熱傳。

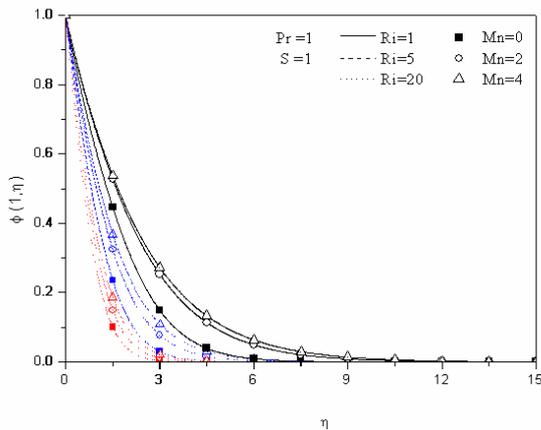


圖 7 Pr = 1, S = 1 下之 $\phi(1, \eta) - \eta$

圖 8 為吸入參數 S 等於 6 之速度場結果圖，隨吸入參數之增加，回流受到更明顯的抑制，且在 Ri=5 之值時，流場的差異性不隨磁場增減有明顯變化。

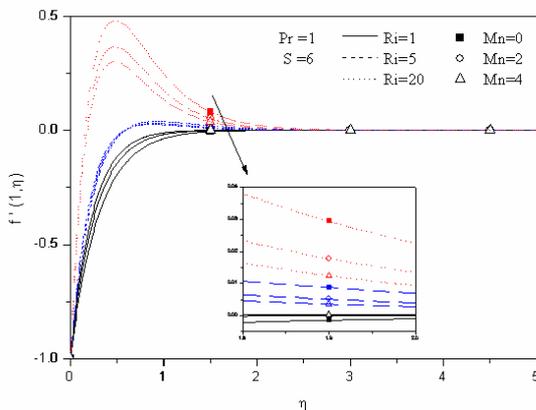


圖 8 Pr = 1, S = 6 下之 $f''(1, \eta) - \eta$

圖 9 為相對應圖 8 的溫度場分佈，自然對流較大者仍有較好之熱傳，而由於 Ri=5 之速度差異性小，在溫度曲現則也是

相當的接近。相比於圖之 Pr=1、S=1 速度結果圖，除了速度的極值下降外，邊界層厚度也因速度變緩之影響而增加。與 Pr=1、S=1 溫度結果圖比較，又因 Prandtl 數為速度邊界層與溫度邊界層之比值，故當 Pr 數增加而速度變界層減小時，溫度變界層也就隨之變得更小，其溫度邊界層符合預期結果。當 Ri=5 的回流減少，但速度仍受磁場之影響，以低磁場下有較快的速度。在 Pr 數變大時，減少回流的現象，使得 Ri=5 的熱傳不同於自然對流顯著時磁場大者熱傳較差，反以較大磁場有較好之熱傳結果表現出來。相比於 Pr=1、S=6 速度結果圖，不再表現出因自然對流而產生的流，但流場仍以磁場較小較快速度。溫度場仍以 Ri 數大者(···)有較好熱傳，並皆以磁場大者(Δ)有較好之熱傳。

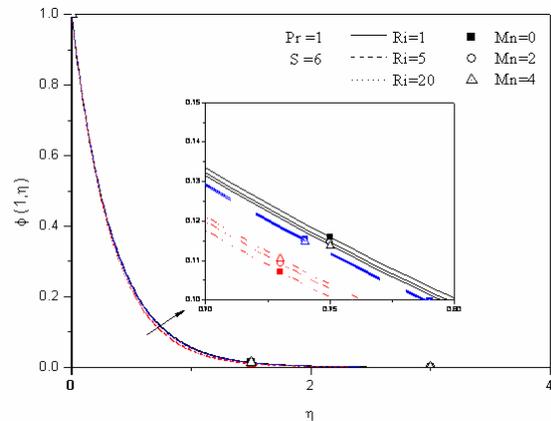


圖 9 Pr = 1, S = 6 下之 $\phi(1, \eta) - \eta$

圖 10 為 Pr 數等於 3，吸入參數 S 等於 1 之速度結果圖，相比於 Pr=1、S=1 速度結果圖，除回流變小、速度降低外，在自然對流影響較小之流場下，磁場影響較為明顯，且整體邊界層厚度也有增加之趨勢。



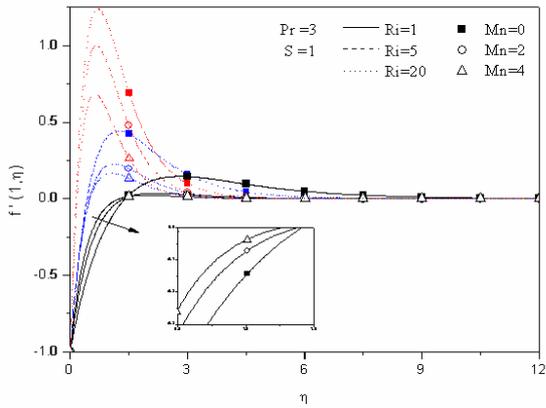


圖 10 Pr = 3, S = 1 下之 $f'(1, \eta) - \eta$ 圖

圖 11 為相對應圖 10 的溫度場分佈，在自然對流影響較小的情況下，由速度較慢者在 $\eta=1.5$ 之前有較大的速度梯度，是故在溫度分佈上也有較大之溫度梯度。Pr 數等於 3，吸入參數 S 等於 3 之速度結果圖，相比於 Pr=2、S=3 速度結果圖，除自然對流較大者漸受到兩參數之增加受到抑制使回流受到抑制外，整體趨勢一致。

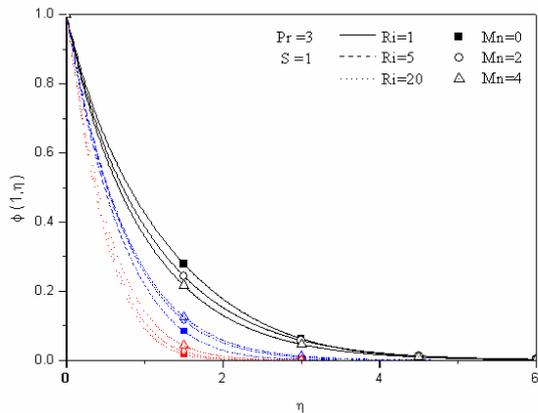


圖 11 Pr = 3, S = 1 下之 $\phi(1, \eta) - \eta$ 圖

圖 12 為 Pr 數等於 3，吸入參數 S 等於 6 之速度結果圖，其邊界層厚度比起 Pr=1、Pr=2 皆來的小，當 Pr=2、S=6 其速度流場與之趨於一致，且已無因自然對流而產生之回流，速度仍由磁場低者(■)為快。溫度分佈在不同之 Ri 值下都非常接近

近，但仍以 Ri 數大者(···)有較大之溫度梯度，其中又以磁場較大者(Δ)有較大溫度梯度。因此隨 Pr 數增加，速度降低，邊界層變厚，速度流場趨勢無太大差異性。

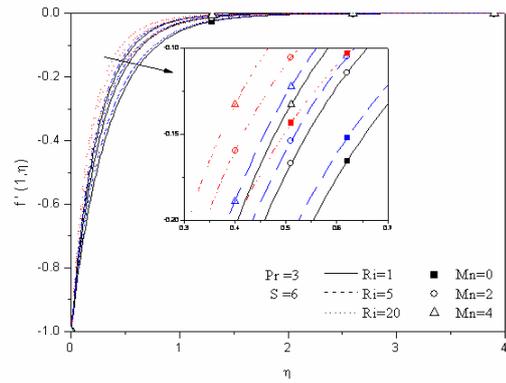


圖 12 Pr = 3, S = 6 下之 $f'(1, \eta) - \eta$ 圖

圖 13 為相對應圖 11 的溫度場分佈，溫度分佈在不同之 Ri 值下都非常接近，但仍以 Ri 數大者(···)有較大之溫度梯度，其中又以磁場較大者(Δ)有較大溫度梯度。在低 Ri 數下，溫度梯度以磁場大者為高。高 Ri 數已無回流之產生。其趨勢已跟較低的 Pr 數、高吸入參數 S 相同，同一 Ri 數下以磁場較大有較高的溫度梯度。同一 Pr 數、不同吸入參數 S 之比較下，低 Ri 數的速度梯度變動較大。仍以高 Ri 數者(···)有較大溫度梯度表現，同 Ri 數下磁場大者(Δ)溫度梯度較大。

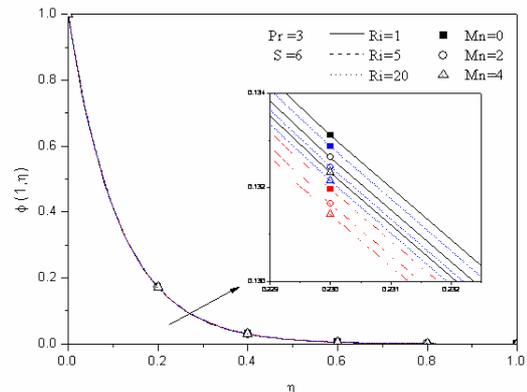


圖 13 Pr = 3, S = 6 下之 $\phi(1, \eta) - \eta$ 圖



5. 結論

透過相似轉換以及數值方法求解分析，本研究針對一垂直方向平板於均勻磁場且不同的質量吸入效應狀態下，加入熱對流效應後所產生的影響進行解析，其主要發現有：

1. 在考慮溫度邊界層情況中，若加強的自然對流的效應(Richardson number)，會使得流場出現回流的情形，但隨磁場的增強而被抑制。
2. 由結果與討論之得知 Prandtl number、質量吸入參數 S 、磁力項三個參數皆有抑制流場回流的結果，其中又以吸入效應影響最大。在速度邊界層厚度上，磁力項的影響較不其他三個參數明顯。
3. 在溫度邊界層上，磁力項增加不會使對流更好。而相較於加強 Richardson number，吸入效應更能增加對流效果。

參考文獻

1. 郭政忠 (民 93)，〈楔形流場中在磁場影響下氣膠傳輸機制之研究〉，《中原大學機械工程所碩士論文》。
2. Muhammet Y őr őr soy, “Unsteady boundary layer flow of power-law fluid on stretching sheet surface”, *Int. J. Engng Sci*, Vol. 44, pp.325-332, 2006.
3. 黃文翰 (民 99)，〈導電性流體流經收縮平板之邊界層流場分析〉，《中原大學機械工程所碩士論文》。
4. J.R. Lloyd, and E.M. Sparrow, “Combined forced and free convection flow on vertical surfaces.” *Int. J. Heat Mass Transfer* no. 13, pp. 434-438, 1970.
5. Lin, H.T., Shih, Y.P. “Laminar Boundary Layer Heat Transfer along Static and Moving Cylinders.” *J. Chin. Ins. Eng.*, No. 3, pp. 73-79, 1980.
6. Lin, H.T., Shih, Y.P. “Buoyancy Effects on the Laminar Boundary Layer Heat Transfer along Vertically Moving Cylinders.” *J. Chin. Ins. Eng.*, no. 4, pp. 47-51, 1981.

