

最佳直線攔截導引律之實用演算法則 A Practical Algorithm for implement Optimal Straight Interception Guidance Law

陳積德 劉正瑜 高振育 全中興

Chi-Teh Chen, Cheng-Yu Liu, Y. J. Kau,
Chung-Hsing Chyuan

黎明技術學院數位多媒體系

Department of Digital Multimedia Technology, Lee-Ming Institute of Technology

摘 要

在攔截高速、高側向加速度閃避的現代空中目標時，最佳直線攔截導引律 (Optimal Straight Interception Guidance Law, OPSG) 具有攔截時間短、側向加速需求及誤失距離低等良好性能。但實踐時需估算目標運動參數，及解非線性方程式以獲得擊靶時間，而難以應用於實際的飛彈系統中。本文提出的 SOPSG 演算法則，僅需使用飛彈上能夠量測到的信息來實踐 OPSG，模擬結果顯示，能保持與 OPSG 導引律使用理想參數時之性能，可用於解決 OPSG 實踐不易問題，使之更具實用性。

關鍵詞：最佳直線攔截導引律、SOPSG 演算法則

Abstract

Intercepting modern air targets with high speed and high maneuverability, the Optimal Straight Interception Guidance Law (OPSG) shows good performances, with short interception time, low lateral acceleration required and small miss-distance. Due to require in flight estimating the values of target's parameters, and solving nonlinear equations to get time-to-go, OPSG law suffers very difficulties to implement. This paper presents an algorithm (SOPSG) to implement OPSG, only using the information measured by on-board sensors. Numerical simulation results show that the SOPSG can maintain performances as OPSG using ideal parameters. It reveals SOPSG can be a practical solution to overcome the implementation difficulties of OPSG law and easy to apply on a practical missile guidance system.

Key Words: Optimal Straight Interception Guidance Law, SOPSG algorithm.



1. 前言

飛彈導引律(Guidance Law)是飛彈導控系統(Guidance & Control System)的核心演算法則，其功能是将尋標器(seeker)感測的目標運動信息轉換成飛彈導引命令，以驅使飛彈持續地保持在攔截航向上，直到接戰終了。一個設計良好的飛彈導引律，在理想情況下可達到零誤失距離(miss distance)性能，且攔截過程中之側向加速需求具有遞減的特性。

經典的比例導引律(Proportional Navigation, PN)[1-2]，具有實現容易及牢靠性強(robust properties)的優點，是使用最廣泛的空用導引律。但PN在設計時並未考慮目標的直線及側向加速因素，在面對具有高速及高側向加速閃避的新式戰機，及重返大氣層以高速運動的對地導彈威脅時，由於攔截初期航向誤差修正小，攔截末期側向加速需求遞增至飽和狀態，將導致高誤失距離，性能明顯不足。

為了改善PN導引律性能，應用近代控制、最佳化與估測等理論，近40年來已發展出許多先進的導引律(advanced guidance law) [3-5]，其中基於最短攔截路徑所發展的最佳直線導引律(the Optimal Straight Interception Guidance Law, OPSG)[6]，在攔截高速或高側向加速度閃避的空中目標時，其側向加速需求呈現遞減特性，顯示其在攔截初期，即大幅地修正航向誤差，具有攔截時間短、側向加速需求小及誤失距離低等優點。但由於實踐OPSG所需的目標動態參數，如：目標速度及加速度，需線上用估測方式(estimation methods)[7]獲得，在計算擊靶時間(time-to-go)及攔截航向時，需要線上求解無解析解非線性方程式，而難以實踐。

為解決OPSG實踐不易問題，本文提出不需參數估算及線上求解非線性方程式的

SOPSG演算法則。文中首先在第2節回顧OPSG導引律及實踐所需參數，在第3節中推導SOPSG演算法則，在第4節中以數值模擬方式，比較使用理想參數OPSG與SOPSG在誤失距離、攔截目標時間與側向加速度需求之性能，最後在第5節提出結論。

2. OPSG 導引律及實踐參數

圖1為飛彈-目標2D接戰幾何關係，假設目標縱向速度為 u_T 、縱向與側向加速度 a_{TL} 與 a_{TR} 已知，則目標運動軌跡[8]，如方程式(1)及(2)所示：

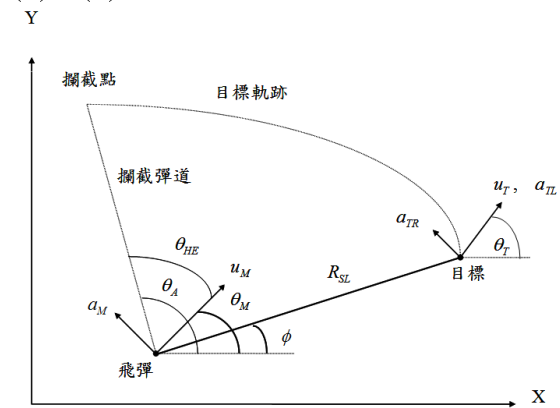


圖1 飛彈-目標2D接戰幾何關係圖

$$y_T(t) = y_{T0} + \frac{1}{(a_{TR}^2 + 4a_{TL}^2)} (\sin \theta_{T0} (a_{TR} u_T^2 \sin(\alpha) + 2a_{TL} \cos(\alpha) u_T^2 - 2a_{TL} u_{T0}^2) + \cos \theta_{T0} (a_{TR} u_{T0}^2 - \cos(\alpha) a_{TR} u_T^2 + 2a_{TL} \sin(\alpha) u_T^2)) \quad (1)$$

$$x_T(t) = x_{T0} + \frac{1}{(a_{TR}^2 + 4a_{TL}^2)} (\cos \theta_{T0} (a_{TR} u_T^2 \sin(\alpha) + 2a_{TL} \cos(\alpha) u_T^2 - 2a_{TL} u_{T0}^2) - \sin \theta_{T0} (a_{TR} u_{T0}^2 - \cos(\alpha) a_{TR} u_T^2 + 2a_{TL} \sin(\alpha) u_T^2)) \quad (2)$$

依照直線攔截理念，飛彈擊靶時間 t_{go} (time-to-go)需滿足(3)式的非線性方程式



$$t_{go} = \frac{\sqrt{(x_T(t+t_{go})-x_M(t))^2 + (y_T(t+t_{go})-y_M(t))^2}}{u_M} \quad (3)$$

$$\equiv \frac{R_A}{u_M}$$

式中 $(x_T(t+t_{go}), y_T(t+t_{go}))$ 為目標攔截點位置、 $(x_M(t), y_M(t))$ 為飛彈位置， R_A 為飛彈位置與目標攔截點之距離， u_M 為飛彈速度。解非線性方程式(3)，求出彈擊靶時間 t_{go} 後代入(1)及(2)式，可求出飛彈攔截方位 $\theta_A(t)$ 、航向誤差 $\theta_{HE}(t)$ 及攔截航向變化率 $\dot{\theta}_A(t)$ ，如(4)~(6)式：

$$\theta_A(t) = \tan^{-1} \left(\frac{y_T(t+t_{go}) - y_M(t)}{x_T(t+t_{go}) - x_M(t)} \right) \quad (4)$$

$$\theta_{HE}(t) \equiv \theta_A(t) - \theta_M(t) \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_A = \frac{1}{R_A} ((1+i_g) \sin(\theta_{T0} + \alpha_A - \theta_A) u_{TA} + \sin(\theta_A - \theta_M)) \quad (6)$$

其中

$$u_{TA} \equiv u_{T0} + a_{TL}(t+t_{go}) \quad (7)$$

$$\alpha_A \equiv \frac{a_{TR}}{a_{TL}} \ln \left(\frac{u_{TA}}{u_{T0}} \right) \quad (8)$$

$$1+i_g = \frac{(1 - \cos(\theta_{HE})) u_M}{u_M - u_{TA} \cos(\theta_{T0} + \alpha_A - \theta_A)} \quad (9)$$

將飛彈攔截目標期間 $(t_0 \sim t_f)$ 側向加速度平方積分，作為最佳化的性能指標：

$$J = \int_0^t a_{MC}^2(t) dt \quad (10)$$

並令航向誤差 $\theta_{HE}(t) \approx 0$ ，則攔截航向變化率 $\dot{\theta}_A(t)$ 可表示成：

$$\dot{\theta}_A = \frac{\theta_{HE}}{R_A} \quad (11)$$

由(10)與(11)式可推導出 OPSPG 導引命令 $a_{MC}(t)$ [6] 為：

$$a_{MC} = N u_M \dot{\theta}_A(t) \quad (12)$$

式中 u_M 為飛彈速度， N 為導航常數其最佳值為 3。由(1)~(12)式可知，實踐 OPSPG 所需之參數均與目標運動參數有關，由於無法直接量測，需使用估測方式獲得。另外，方程式(3)因無解析解，需線上利用數值方式[9]，疊代求解彈擊靶時間 t_{go} ，使得 OPSPG 導引率不易實踐。

3. SOPSPG 演算法則

為簡化 OPSPG 實踐方式，將圖 1 飛彈-目標 2D 接戰幾何關係用圖 2 表示。

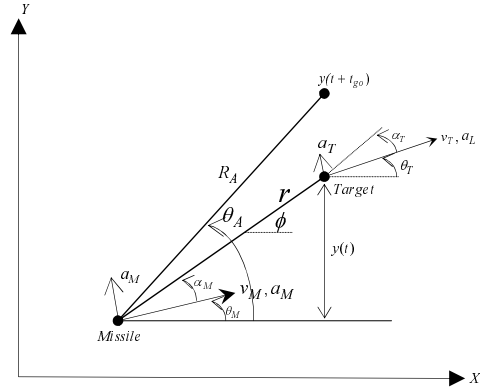


圖 2 飛彈-目標 2D 接戰幾何關係圖

其中 $y(t)$ 與 $y(t+t_{go})$ 分別表示目標及目標攔截點位置， r 與 R_A 分別表示飛彈與目標之距離及飛彈與目標攔截點在攔截航向上距離。

令 $\theta_A(t) \approx 0$ 時，則攔截航向 $\theta_A(t)$ 可近似表示成：

$$\theta_A(t) = \frac{y(t+t_{go})}{R_A} \quad (13)$$

將(13)式對時間微分，得：

$$\dot{\theta}_A(t) = \frac{\dot{y}(t+t_{go})(1+i_g)R_A - y(t+t_{go})\dot{R}_A}{R_A^2} \quad (14)$$

因為 $\theta_{HE}(t) \approx 0$ ，由(9)式得

$$i_g = -1 \quad (15)$$

另由(3)式，飛彈與目標攔截點距離變化率可表示為：

$$\dot{R}_A = u_M i_g = -u_M \quad (16)$$

將(15)及(16)式代入方程式(14)，可將攔截航向變化率 $\dot{\theta}_A(t)$ 表示成：

$$\dot{\theta}_A(t) = \frac{\dot{y}(t+t_{go})}{u_M t_{go}^2} \quad (17)$$

將(17)代入(12)式，可將OPSG導引命令簡化為

$$a_{MC} = N \frac{y(t+t_{go})}{t_{go}^2} \quad (18)$$

其中目標攔截點位置 $y(t+t_g)$ 可近似為

$$y(t+t_{go}) = y(t) + \dot{y}(t)t_{go} + 0.5at_{go}^2 \quad (19)$$

其中 $\dot{y}(t)$ 目標位置變化率， a 為目標縱向、側向加速度及飛彈速度變化量垂直於視線 ϕ 方向的分量，可表示為：

$$a = a_T \cos\alpha_T - a_L \sin\alpha_T + a_{ML} \sin\alpha_M \quad (20)$$

當 $\theta_A(t) \approx 0$ ，飛彈-目標間之視線方向 ϕ ，可近似為：

$$\phi = \frac{y}{r} \quad (21)$$

將(21)式對時間微分並進行簡化，可得：

$$y(t) + \dot{y}(t)t_{go} = \dot{\phi}(v_c t_{go}^2) \quad (22)$$

其中 v_c 為飛彈與目標在視線方向的相對速度。

將(19)及(22)式代入(18)式中，則OPSG導引命令可表示成(23)式

$$a_{MC} = Nv_c \dot{\phi} + \frac{N}{2}(a_T \cos\alpha_T - a_L \sin\alpha_T + a_{ML} \sin\alpha_M) \quad (23)$$

直接應用(23)式來實踐OSPG，仍需估測目標加速度、航向及量測飛彈速度變化和航向等信息，需進一步簡化。

由圖2知飛彈與目標間相對距離變化 \dot{r} 及視線角變化 $\dot{\phi}$ 可分別表示為(24)及(25)式：

$$\dot{r} = v_T \cos\alpha_T - v_M \cos\alpha_M \quad (24)$$

$$r\dot{\phi} = -v_T \sin\alpha_T + v_M \sin\alpha_M \quad (25)$$

將(25)式對時間微分，得到

$$\begin{aligned} & \dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \\ &= -a_L \sin\alpha_T - v_T \dot{\alpha}_T \cos\alpha_T + a_{ML} \sin\alpha_M + v_M \dot{\alpha}_M \cos\alpha_M \end{aligned} \quad (26)$$

其中將目標的縱向速度變化 \dot{v}_T 及飛彈本身

的速度變化 \dot{v}_M 表示為：

$$\dot{v}_T = a_L \quad (27)$$

$$\dot{v}_M = a_{ML} \quad (28)$$

另將(24)式等號兩邊乘以 $\dot{\phi}$ ，得到

$$\dot{r}\dot{\phi} = v_T \dot{\phi} \cos\alpha_T - v_M \dot{\phi} \cos\alpha_M \quad (29)$$

而視線變化率可分別表示為：

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_M + \dot{\alpha}_M \quad (30)$$

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_T + \dot{\alpha}_T \quad (31)$$

其中

$$\dot{\theta}_T = \frac{a_T}{v_T} \quad (32)$$

將(30)~(32)代入(29)式，可得：

$$\dot{r}\dot{\phi} = v_T \left(\frac{a_T}{v_T} + \dot{\alpha}_T \right) \cos\alpha_T - v_M \dot{\theta}_M \cos\alpha_M - v_M \dot{\alpha}_M \cos\alpha_M \quad (33)$$

再將(26)及(33)式合併簡化後，則(20)式垂直於視線方向的加速度分量 a ，可表示為：

$$a = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + v_M \dot{\theta}_M \cos\alpha_M \quad (34)$$

將(34)式代入(23)式簡化，則OPSG導引命令可表示為易實踐的SOPSG演算法則：

$$a_{MC} = \frac{N}{2}(r\ddot{\phi} + a_M \cos\alpha_M) \quad (35)$$

其中飛彈側向加速垂直於視線上的分量 $a_M \cos\alpha_M$ 、視線方向二次變化率 $\ddot{\phi}$ 及視線距離 r ，這三項信息均可經由飛彈上的感測裝置獲得。

4. 數值模擬

4.1 假設條件：

飛彈為理想狀態，其動態遲滯為零，在攔截過程彈速保持2馬赫(660m/sec)，速度與彈軸平行，側向加速度極限為 $\pm 30G$ ；導航常數 N 均使用最佳值3.0；實踐OPSG導引命令(方程式(12))及SOPSG演算法(方程式(35))有關之參數，如： a_{TL} 、 a_{TR} 、 u_T 、



θ_T 、 $\ddot{\phi}$ 、 r 及 α_M 均為理想值不含雜訊。

4.2 模擬場景：

飛彈攔截目標之場景座標系統如圖1所示，在模擬的三個場景中飛彈起始位置均為(0,0)，初始航為東偏北30度，而目標的起始位置均為(0,6000)，初始航向均由北偏西60度。

場景1：目標的起始位置(5000m, 3000m)，初始航向由北偏西90度，初速為330m/sec，並帶有3G的縱向加速度。

場景2：目標的起始位置(5000m, 0m)，初始航向由北偏西60度，目標初速為330m/sec，向左作9個G值的側向閃避，側閃時並以1G的縱向加速。

場景3：目標的起始位置(5000m, 0m)，初始航向由北偏西60度，初速為330m/sec並以1G的縱向加速，3sec後，再向右作9個G值側向閃避，並保持1G的縱向加速度。

4.3 模擬結果

表1.為相對應不同攔截場景之誤失距離與攔截時間；在圖3、圖5與圖7圖中顯示OPSG與SOPSG，在不同攔截場景中目標與飛彈之航跡；在圖4、圖6與圖8中為飛彈攔截過程中所需之側向加速度歷程。顯示出SOPSG與OPSG性能幾近一致。

表1. 模擬結果

場景	性能指標	OPSG	SOPSG
1	誤失距離(m)	0.20	0.20
	攔截時間(sec)	5.99	5.99
2	誤失距離(m)	0.10	0.10
	攔截時間(sec)	5.21	5.21
3	誤失距離(m)	0.10	0.00
	攔截時間(sec)	5.60	5.60

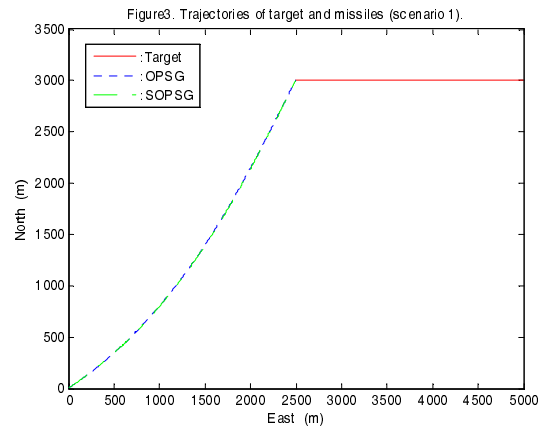


圖3 OPSG與SOPSG攔截目標航跡(場景1)

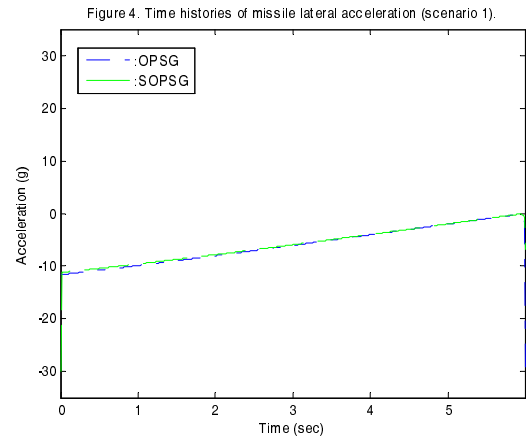


圖4 OPSG與OPSG攔截目標之側向加速需求歷程(場景1)

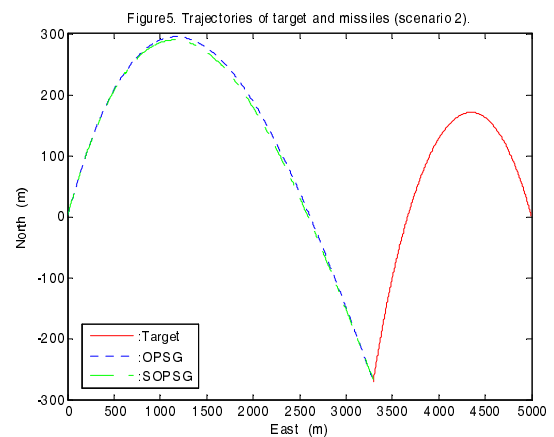


圖5 OPSG與SOPSG攔截目標航跡(場景2)



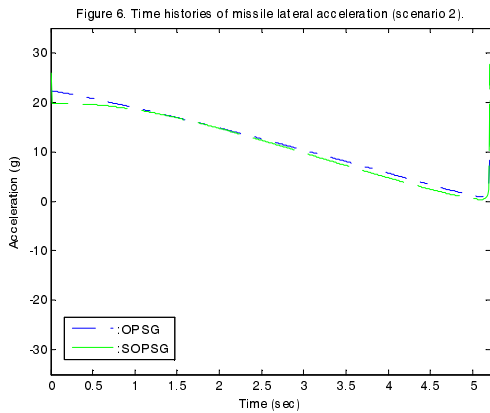


圖 6 OSPG 與 SOPSG 攔截目標之側向加速需求歷程 (場景 2)

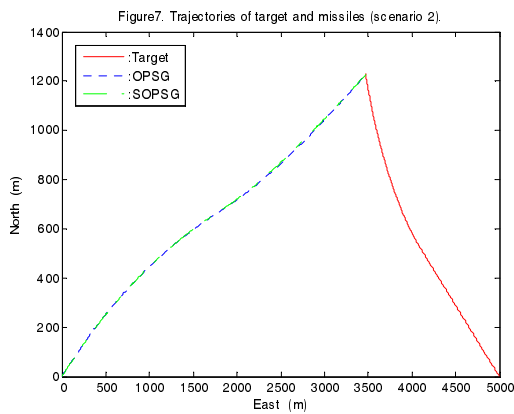


圖 7 OSPG 與 SOPSG 攔截目標航跡(場景 3)

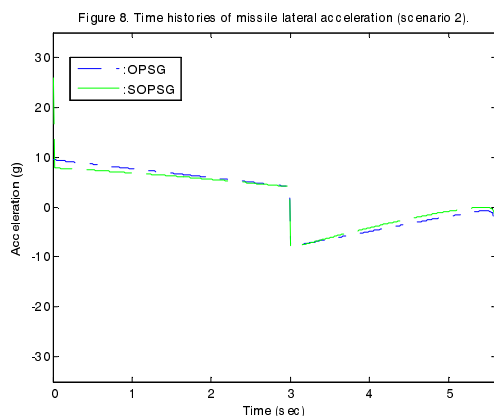


圖 8 OSPG 與 OPSG 攔截目標之側向加速需求歷程 (場景 3)

5. 結論

最佳直線攔截導引律(OPSG)實踐時需要目標參數與擊靶時間信息，然而不可避免的估測誤差，會大幅降低其性能[10]，並使得牢靠性相對地降低。

本文所提出的SOPSG演算法則，僅需使用飛彈與目標距離、視線的二次變化率及飛彈側向加速信息，這些信息均可經由飛彈上的感測器獲得，顯示其易於實踐。

經由模擬驗證顯示，使用SOPSG在攔截高速/高側向閃避空中目標時，能提早因應目標狀態，快速地修正航向誤差，且攔截所需的側向加速度具有遞減特性，其性能與使用理想參數值之OPSG導引律幾近一致，可用於解決OPSG導引律實踐不易之問題。

參考文獻

1. S. Vathsal and A. K. Sarkar, "Current Trends in Tactical Missile Guidance," *Defence Science Journal*, vol. 55, no. 2, pp.265-280, July, 2005.
2. Neil F. Palumbo, *et al.*, Basic Principal of Homing Guidance," *HOHN HOPKINS APL TECHNICAL DIGEST*, vol. 29, no.1, 2010.
3. Neil F. Palumbo, *et al.*, "Modern Homing Missile Guidance Theory and Techniques," *HOHN HOPKINS APL TECHNICAL DIGEST*, vol. 29 no.1, 2010.
4. Lin Ching Fang, Modern Navigation, Guidance, and Control Processing, Prentice Hall, 1991.
5. Paul Zarchan, Tactical and Strategic Missile Guidance, 6nd Edition, vol. 239, Progress in Astronautics and Aeronautics, 2012.



6. Chi-Teh Chen, Cheng-Yu Liu and Chung-Hsing Chyuan, “The Optimal Solution of Straight Interception Guidance Law,” *Journal of Lee-Ming Institute of Technology*, vol.19, no.1, 2007.
7. Chi-Teh Chen, *et al.*, “A study on the Optimal Straight Interception Guidance Law Implemented by Estimated Parameters,” *Journal of Lee-Ming Institute of Technology*, vol. 22, no.1, 2011.
8. Tsao, Lu-Ping, Chou, Ching-Lain, Chen, Chuen-Ming, and Chen, Chi-Teh, “Aiming Point Guidance Law for Air-to-Air Missiles,” *International Journal of System Science*, vol. 29, no 2, 1998.
9. Powell, M.J.D., “Minimization of Functions of several Variables.” *Numerical Analysis: An Introduction*, Academic Press, 1996.
10. F. William Nesline and Paul Zarchan, “A New Look at Classical vs Modern Homing Missile Guidance,” *J. Guidance and Control*, vol. 4, 1981.

