

靜壓錐形軸承使用毛細管節流器於靜止時之設計參數特性
The Design Parameter Characteristics of Conical
Hydrostatic Bearing by Using Capillary Throttles
in Static State

蕭順德

Shun-Te Hsiao

黎明技術學院機械工程系

Department of Mechanical Engineering, Lee-Ming Institute of Technology

陳金龍 賴全

Chin-Lung Chen and Chuan Lai

黎明技術學院機械工程系

Department of Mechanical Engineering, Lee-Ming Institute of Technology

摘 要

本研究主要探討四腔靜壓錐形軸承於軸靜止及軸心不傾斜時之設計參數特性分析，本文分析時先展開錐形軸承之油墊，建立流量平衡方程式。再以數值分析規劃電腦解析程式，求解軸承之油腔壓力、徑向及軸向負荷，剛度等特性。經以不同設計參數分析後建立本軸承之特性曲線，作為高速工具機軸承之設計依據。

關鍵詞：錐形靜壓軸承、毛細管節流器、徑向偏心率、軸向偏位率

Abstract

This paper aims to study the design parameters and characteristics of four-chamber conical hydrostatic bearing in static and unbiased states. We first established the flow equilibrium equations by unfolding the oil pad of the conical bearing. Next, we applied numerical methods to deduce correct values for pressure in the oil chamber, axials and radial loads, and stiffness. Using the data collected, we designed optimal bearings for high-speed applications.

Key Words: Conical Hydrostatic Bearing, Capillary Throttles, radial offset ratio, axial offset ratio



1.前言

一般傳統工具機主軸設計時，為同時承受徑向及軸向負載，皆有徑向及軸向(止推)軸承之組合式設計。但是此項設計會增加摩擦損失，因此如圖 1 所示能同時承受徑向及軸向負載之錐形軸承為改善此項缺失之一項選擇。

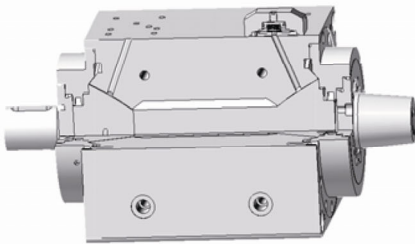


圖 1 靜壓錐形軸承示意圖

Prabhu 及 Ganesan 陸續發表了以球座標系統(spherical coordinate system)於使用不可壓縮潤滑油之條件，以雷諾方程式及流量平衡方程式解析錐形靜壓軸承之油膜壓力，以及探討油腔分別建立在轉子上[1]、轉子和承載座偏心與歪斜[2]，及油腔建立在承載座[3]、轉子和承載座偏心與歪斜之止推軸承特性[4]及其動態特性分析[5]。

Sinha 等人[6] 使用有限元素法分析不平行油縫錐形軸承之軸承幾何參數、溫度、壓力及黏性等參數特性，Yoshimoto 等人[7]使用連續性定理、流量平衡方程式及雷諾方程式(Reynolds equation)分析水潤滑螺旋槽錐形靜壓軸承之參數特性， Dupont [8]則分析氣體螺旋槽高速錐形靜壓軸承之參數特性，Liu 等人[9]提出以三維動力方程式建立數學模型解析錐形動靜壓軸承特性。

但是這些研究只探討錐形軸承之止推能力及軸承轉動特性，而未探討其徑向能力及各設計參數與軸承之特性。本文設定主軸於靜止時，忽略動壓效應，在不使用雷諾方程式狀態下，建立流量平衡方程

式並使用數值分析方法解析油腔壓力，且將錐形軸承展開並建立壓力分佈之立體模型，解析錐形軸承之節流器參數、錐角、長徑比、徑向偏心率、軸向偏位率、軸向節流面寬度比及周向節流面寬度比等設計參數對錐形軸承徑向負荷、軸向止推力、剛度之特性。

2. 符號說明

A_e	油腔之有效面積
a	軸向節流面寬度
B	錐面寬度
\bar{B}	長徑比 $\bar{B} = B/D_s$
c	間隙比 $c = h_o/D_s$
D_L	錐形軸承大端直徑 $D_L = D_s + 2B \sin \psi$
D_s	錐形軸承小端直徑
d_L	軸承心軸大端直徑
d_s	軸承心軸小端直徑
d_c	毛細管直徑
e_d	徑向偏心率
e_L	軸向偏位量
h_o	靜態油膜厚度 $h_o = (D_L - D_s) \cos \psi / 2$
L	油腔之有效寬度
\bar{L}	無因次有效寬度 $\bar{L} = L/D_s$
n	錐形軸承油腔數
l_c	毛細管長度
P_k	k 油腔壓力
\bar{P}_k	k 油腔無因次壓力 $\bar{P}_k = P_k/P_s$
P_s	毛細管供油壓力
α	周向封油邊半角
β	油墊之有效角
γ_a	軸向節流面寬度比 $\gamma_a = a/B$
γ_c	周向節流面寬度比 $\gamma_c = \alpha/\phi$
δ_c	毛細管節流器參數 $\delta_c = (3\pi d_c^4)/(32l_c h_o^3)$



ε_d	徑向偏心率 $\varepsilon_d = e_d / h_o$
ε_L	軸向偏位率 $\varepsilon_L = e_L / h_o$
ϕ	油區半角 $\phi = \pi / n$
ψ	半錐角 $\psi = \sin^{-1}[(D_L - D_S) / 2B]$
θ_1	第一油腔位置角

3. 理論分析

3.1 軸承油區油膜厚度計算模型

如圖 2 所示的四油腔靜壓軸承，Y 軸指向為與負荷 W 同方向，則第 k 油區與其上游第 k-1 油區分界點的無因次膜厚為 $\bar{h}'_k = 1 + \varepsilon_L \sin \psi + \varepsilon_d \cos \psi \cos(\theta_k - \theta'_k)$ (1)

第 k 油區(油腔)中點處的無因次膜厚為 $\bar{h}_k = 1 + \varepsilon_L \sin \psi + \varepsilon_d \cos \psi \cos \theta_k$ (2)

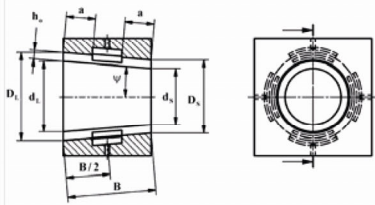
式中如圖 2 所示油腔每一位置角為

$$\theta_k = \theta_1 + 2(k-1)\phi$$

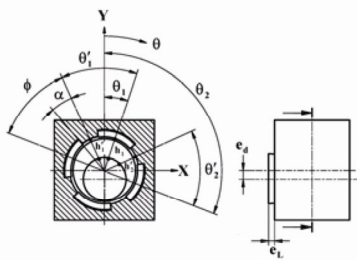
$$\theta_{k+1} = \theta_1 + 2[(k+1)-1]\phi$$

$$\theta'_1 = \theta'_k = \theta'_{k+1} = \phi$$

$$k = 1, \dots, n$$



2(a) 軸向剖切圖



2(b) 徑向剖切圖

圖 2 錐形靜壓軸承剖切圖

3.2 流量平衡方程式

如圖 4 所示第 k 油區無因次流量為

(1) 經過節流器流入第 k 油區之無因次流量

$$\hat{Q}_k = \delta_c (1 - \bar{P}_k) \quad (3)$$

(2) 第 k-1 油區流入第 k 油區圓周方向之無因次流量

$$\bar{Q}_k = \frac{2\bar{L}\bar{h}'_k{}^3}{(1 + \bar{B} \sin \psi)\phi\gamma_c} (\bar{P}_{k-1} - \bar{P}_k) \quad (4)$$

(3) 第 k 油區流入第 k+1 油區圓周方向之無因次流量

$$\bar{Q}_{k+1} = \frac{2\bar{L}\bar{h}'_{k+1}{}^3}{(1 + \bar{B} \sin \psi)\phi\gamma_c} (\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1}) \quad (5)$$

(4) 流出第 k 油區軸向之無因次流量

$$\bar{Q}'_k = \left(\frac{1}{l_n \frac{R_2}{R_1}} + \frac{1}{l_n \frac{R_4}{R_3}} \right) A_k \bar{P}_k \sin \psi \quad (6)$$

式中

$$L = \sqrt{\frac{R_4^2 - R_3^2}{2 \ln \frac{R_4}{R_3}}} - \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

$$R_1 = \frac{D_s}{2 \sin \psi}$$

$$R_2 = R_1 + a$$

$$R_4 = R_1 + B$$

$$R_3 = R_4 - a$$

$$A_k = \int_{\theta_k - (\phi - \frac{\alpha}{2})}^{\theta_k + (\phi - \frac{\alpha}{2})} (1 - \varepsilon_L \sin \psi + \varepsilon_d \cos \psi \cos \theta)^3 d\theta$$

如圖 4 所示第 k 油區的流量平衡為

$$\hat{Q} + \bar{Q}_k = \bar{Q}'_k + \bar{Q}_{k+1} \quad (7)$$

將(3)、(4)、(5)與(6)式代入(7)式中，

整理得：

$$\left[\delta_c + \frac{2\bar{L}}{(1 + \bar{B} \sin \psi)\phi\gamma_c} (\bar{h}'_k{}^3 + \bar{h}'_{k+1}{}^3) + \left(\frac{1}{l_n \frac{R_2}{R_1}} + \frac{1}{l_n \frac{R_4}{R_3}} \right) A_k \sin \psi \right] \bar{P}_k - \frac{2\bar{L}\bar{h}'_{k+1}{}^3}{(1 + \bar{B} \sin \psi)\phi\gamma_c} \bar{P}_{k+1} - \frac{2\bar{L}\bar{h}'_k{}^3}{(1 + \bar{B} \sin \psi)\phi\gamma_c} \bar{P}_{k-1} = \delta_c \quad (8)$$



式中

$$k = 1, \dots, n$$

式(8)代表 n 個方程式，聯立求解 n 個未知數 \bar{P} ，得到 n 個油腔之無因次壓力。

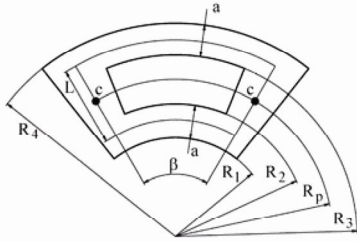


圖 3 錐形靜壓軸承油墊展開圖

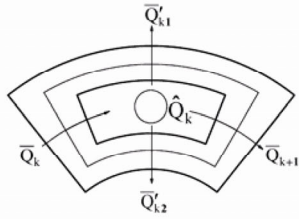


圖 4 第 k 油區流量

3.3 軸承負荷數學模型

如圖 5 所示為錐形靜壓軸承之第 k 油區的壓力分佈展開圖，依圖將 k 油區之壓力分佈以重積分導出徑向及軸向負荷之無因次數學模型為

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ky} = & \frac{1}{4\gamma_c} (\gamma_a - 1) \cos \psi (1 + \bar{B} \sin \psi) \\ & \left\{ \left[\frac{1}{\phi} (\cos(\theta_1 + (2k-3)\phi + \alpha)) \right. \right. \\ & - \cos(\theta_1 + (2k-3)\phi - \alpha)) \\ & + 2\gamma_c \sin(\theta_1 + (2k-3)\phi - \alpha) \Big] \bar{P}_{k-1} \\ & + \left[\frac{1}{\phi} (-\cos(\theta_1 + (2k-3)\phi + \alpha)) \right. \\ & + \cos(\theta_1 + (2k-3)\phi - \alpha)) \\ & \left. \left. - 2\gamma_c \sin(\theta_1 + (2k-1)\phi - \alpha) \right] \bar{P}_k \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\bar{W}_y = - \sum_{k=1}^n \bar{W}_{ky} \quad (10)$$

徑向負荷為

$$W_y = P_S D_S B \bar{W}_y \quad (11)$$

錐形靜壓軸承無因次軸向負荷為

$$\begin{aligned} \bar{W}_{kz} = & \frac{1}{4} \phi (1 - \gamma_a) (1 + \bar{B} \sin \psi) [2\gamma_c \bar{P}_{k-1} \\ & + 2(2 - \gamma_c) \bar{P}_k] \sin \psi \quad (12) \end{aligned}$$

$$\bar{W}_z = \sum_{k=1}^n \bar{W}_{kz} \quad (13)$$

軸向負荷為

$$W_z = P_S D_S B \bar{W}_z \quad (14)$$

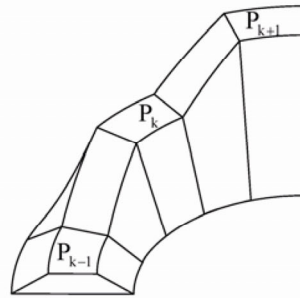


圖 5 第 k 油區的壓力分佈

3.4 軸承剛度數學模型

(1) 徑向剛度

油膜在偏心方向之剛度為每單位偏心率改變時負荷之變量，因此其無因次數學模型為

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ky} = & \frac{d\bar{W}_{ky}}{d\epsilon_d} \\ = & \frac{1}{4\gamma_c} (\gamma_a - 1) \cos \psi (1 + \bar{B} \sin \psi) \\ & \left\{ \left[\frac{1}{\phi} (\cos(\theta_1 + (2k-3)\phi + \alpha)) \right. \right. \\ & - \cos(\theta_1 + (2k-3)\phi - \alpha)) \\ & + 2\gamma_c \sin(\theta_1 + (2k-3)\phi - \alpha) \Big] \frac{\bar{P}_{k-1}}{d\epsilon_d} \\ & + \left[\frac{1}{\phi} (-\cos(\theta_1 + (2k-3)\phi + \alpha)) \right. \\ & + \cos(\theta_1 + (2k-3)\phi - \alpha)) \\ & \left. \left. - 2\gamma_c \sin(\theta_1 + (2k-1)\phi - \alpha) \right] \frac{\bar{P}_k}{d\epsilon_d} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\bar{S}_y = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{ky} \quad (16)$$



徑向剛度為

$$S_y = \frac{P_s D_s B}{h_o} \bar{S}_y \quad (17)$$

(2) 軸向剛度

油膜在軸向滑動方向之剛度為每單位偏位量改變時負荷之變量，因此其無因次數學模型為

$$\bar{S}_{kz} = \frac{d\bar{W}_{kz}}{d\varepsilon_L}$$

$$\bar{W}_{kz} = \frac{1}{4} \phi (1 - \gamma_a) (1 + \bar{B} \sin \psi) [2\gamma_c \bar{P}_{k-1} + 2(2 - \gamma_c) \frac{\bar{P}_k}{d\varepsilon_L}] \sin \psi \quad (18)$$

$$\bar{S}_z = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{kz} \quad (19)$$

軸向剛度為

$$S_z = \frac{P_s D_s B}{h_o} \bar{S}_z \quad (20)$$

4. 結果討論

毛細管節流器之四腔靜壓頸軸承於軸頸靜止時，供油壓力 $P_s=5\text{MPa}$ 、軸承小端直徑 $D_s=30\text{mm}$ 、間隙比 $c=1/1285$ 、工作溫度 $T=40^\circ\text{C}$ 和潤滑油型號 Mobil Velocite NO.12 等設計條件下，探討軸向節流面寬度比 γ_a 、周向節流面寬度比 γ_c 、徑向偏心率 ε_d 、軸向偏位率 ε_L 、長徑比 \bar{B} 、半錐角 ψ 和節流器參數 δ_c 對於錐形靜壓軸承剛度之影響。

(1) 如圖 6 所示，當節流器參數等於 13 時，於徑向無因次剛度有一最佳值為 0.624，軸向無因次剛度為 0.248，節流器參數大於 13 時，隨著參數值的增加，徑向及軸向剛度值皆減少。

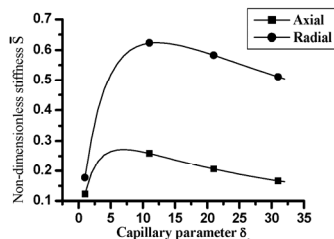


圖 6 節流器參數與無因次剛度之關係

(2) 如圖 7 所示，當半錐角等於 20° 時，於徑向無因次剛度有一最佳值為 0.624，軸向無因次剛度為 0.248，半錐角大於 20° 時，隨著參數值的增加，徑向剛度值減少，軸向剛度值增加。

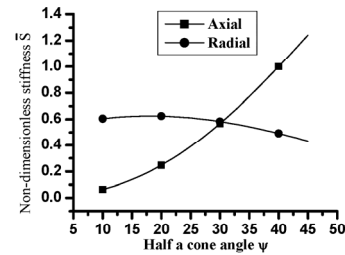


圖 7 半錐角與無因次剛度之關係

(3) 如圖 8 所示，軸向、徑向剛度隨著長徑比的增加而增加。

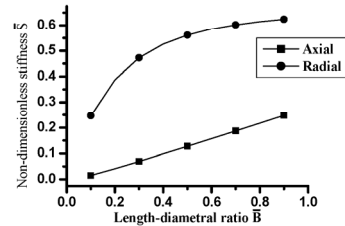


圖 8 長徑比與無因次剛度之關係

(4) 如圖 9 所示，徑向剛度於軸向節流面寬度比等於 0.14 時有一極值為 0.663，其餘軸向、徑向剛度隨著軸向節流面寬度比的增加而減少。

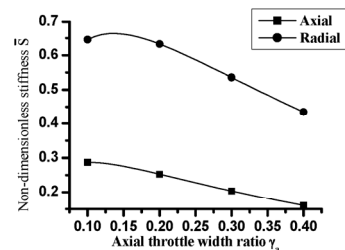


圖 9 軸向節流面寬度比與無因次剛度之關係



(5) 如圖 10 所示，軸向剛度於周向節流面寬度比等於 0.3 時有一極值為 0.257，其餘軸向剛度隨著軸向節流面寬度比的增加而減少，徑向剛度則增加。

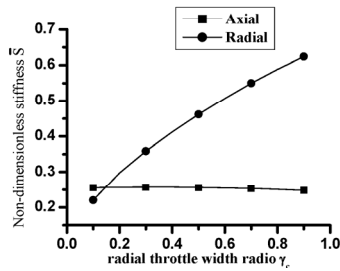


圖 10 周向節流面寬度比與無因次剛度之關係

(6) 如圖 11 所示，軸向、徑向剛度隨著徑向偏心率的增加而減少。

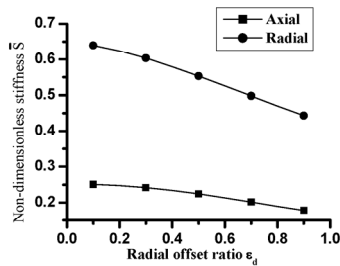


圖 11 徑向偏心率與無因次剛度之關係

(7) 如圖 12 所示，軸向、徑向剛度隨著軸向偏位率的增加而減少。

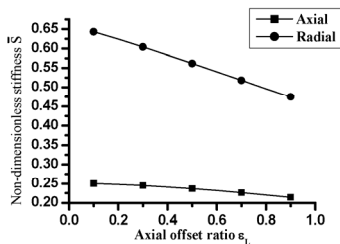


圖 12 軸向偏位率與無因次剛度之關係

5. 結論

本文使用毛細管節流器，探討錐形軸承之節流係數、半錐角、長徑比、節流面寬度比、徑向偏心率與軸向偏位率對軸承剛度在油腔中之變化，摘要綜述如下：

- (1) 當節流器參數等於 13 時，於徑向無因次剛度有一最佳值為 0.624，軸向無因次剛度為 0.248，若節流器參數大於或小於 13 時雙向剛度逐漸遞減。
- (2) 軸向剛度隨著半錐角之增加而減少，徑向剛度隨著半錐角之增加而增加。
- (3) 軸向、徑向剛度隨著長徑比的增加而增加。
- (4) 徑向剛度於軸向節流面寬度比等於 0.14 時有一極值為 0.663，其餘軸向、徑向剛度隨著軸向節流面寬度比的增加而減少。
- (5) 軸向剛度於周向節流面寬度比等於 0.3 時有一極值為 0.257，其餘軸向剛度隨著軸向節流面寬度比的增加而減少，徑向剛度則增加。
- (6) 軸向、徑向剛度隨著徑向偏心率及軸向偏位率的增加而減少。

6. 參考文獻

1. Prabhu, T. J. and Ganesan, N. "Characteristics of conical hydrostatic thrust bearings under rotation." *Wear*, 73, pp. 95-122, 1981.
2. Prabhu, T. J. and Ganesan, N. "Non-parallel operation of conical hydrostatic thrust bearings." *Wear*, 86, pp. 29-41, 1983.
3. Prabhu, T. J. and Ganesan, N. "Eccentric operation of conical hydrostatic thrust bearings." *Wear*, 87, pp. 273-285, 1983.
4. Prabhu, T. J. and Ganesan, N. "Analysis of multirecess conical hydrostatic thrust bearings under rotation." *Wear*, 89, pp. 29-40, 1983.
5. Prabhu, T. J. and Ganesan, N. "Theoretical analysis of the dynamic stiffness of conical hydrostatic thrust bearings under tilt, eccentricity and rotation." *Wear*, 91, pp. 149-159, 1983.
6. Sinha, P., Chandra, P. and Hartiya, S. "Analysis of a non-constant gap externally pressurized conical bearing



- with temperature and pressure dependent viscosity.” Proc Instn Mech Engrs, 214 (C), pp. 699-710, 2000.
7. Yoshimoto, S., Kume, T. and Shitara, T. “Axial load capacity of water-lubricated hydrostatic conical bearings with spiral grooves for high speed spindles.” Tribology International, 31(6), pp. 331-338, 1998.
8. Dupont, R. “On an isotropic and centrifugal force invariant layout of a conically shaped gas-lubricated high-speed spiral-groove bearing.” Precision Engineering, 27, pp. 346-361, 2003.
9. Liu, J. Z., Cen, S. Q., Zhang, S. L., Wu, C. and Cheng, X. Y., (2004) “The experimental model study on the dynamic characteristics of hybrid conical bearing.” Henan Science, 22(1), pp. 33-36, 2004.

