

矩形螺旋彈簧之剪應力修正因子 The shear correction factor of rectangular helical spring

余嗣英 林滄偉

Szu-Ying Yu, Hung-Wei Lin

黎明技術學院電機工程學系
Department of Electrical Engineering,
Lee-Ming Institute of Technology

陳俊生 郭岳其

Chun-Sheng Chen, Yue-Ci Guo

龍華科技大學工程研究所
Department of Mechanical Engineering,
Lunghwa University of Science and Technology

摘 要

彈簧可承受的剪力及壽命是目前最常探討的部分，而彈簧的剪應力計算必須加入修正因子，才能精確的算出該彈簧的剪應力，最為常見的為 Wahl 所推論出的圓形斷面彈簧修正因子，可是矩形斷面彈簧並沒有明確的修正公式，本文使用有限元素分析法及數學擬合法，來推論出屬於矩形斷面彈簧的彈簧修正因子。研究結果顯示，矩形斷面彈簧的應力修正公式可以用彈簧指數來表示，且可得到不同矩形斷面彈簧的應力修正公式。

關鍵詞：螺旋彈簧、修正因子

Abstract

The formula for shear stress of the spring must add a correction factor, it can be more accurately calculated shear stress of the spring. The most common Wahl correction factor is deduced by a circular cross-section of the spring, is now recognized as the most accurate one formula, but rectangular cross-section of the spring doesn't have a clear correction formula, so this paper will use the finite element analysis and mathematical fitting method to infer the rectangular



cross-section belonging to a spring correction factor. The results of this study showed that the stress correction formula of rectangular cross-section spring index can be used to represent the stress of this study, and different from the analysis of a rectangular cross-section of the spring.

Key Words: Helical spring, Correction factor



1. 前言

彈簧的用途普遍，在生活中更是不可或缺，彈簧的設計與製造上，因為彈性模數、斷面形狀及彈簧指數等因素，計算彈簧應力的公式會有所差異，因此彈簧的應力公式需要一校正因子，以便精確算出彈簧受力後的應力值，設計出更安全的彈簧。有關彈簧的彈性修正係數，在 Francu[1] 提出了非圓形截面的彈性修正係數推導公式，此修正係數在之後計算以及分析曲率修正因子時最常被使用到。在圓形斷面彈簧這方面，因彎曲效應而產生的曲率修正因子是由 Wahl[2] 所提出，修正因子包含形狀變化、彈簧變形與彈簧曲率等因素，以無螺旋角的條件下進行公式推導，推導在彈簧自由端不同以及螺旋角不同的情況下的修正因子。日本彈簧研究委員會[3] 提出計算圓形斷面彈簧應力的修正係數及推導方式，並比較所有修正係數作準確度。在應力公式計算方面，張殷愷[4] 探討了彈簧設計公式與彈簧常數之誤差估計，並利用有限元素分析軟體以及實驗分析，了解荷重及壓縮變形的相互關係。在陳盈璋[5] 彈簧分析中，以田口方法找出最佳化的尺寸，來達到降低最大應力值的效果。在彈簧螺旋角對應力影響方面，Wittrick[6] 在假設螺旋角很小的情況下分析剪應變效應下，推導出 12 組方程式來描述螺旋彈簧的行為。張智鈞[7] 根據 Wittrick 的研究加入扭角效應並利用傳遞矩陣法求解，分析預扭角螺旋彈簧的自然頻率與振動模態之影響。Leung[8] 也推導出具預扭角螺旋彈簧的運動方程式，並探討預扭角、曲率等因素對該彈簧之自然頻率的影響。而 Massoud[9] 用 D'Ambert's 法推導力與位

移的方程式，確定軸向與橫向運動為成對運動。目前彈簧常用的修正因子局限於圓形斷面彈簧的修正因子，綜上所述有關矩形斷面彈簧的修正因子卻無明顯的探討，本文將循圓形彈簧修正因子的分析過程，以找尋出矩形彈簧的修正公式。

2. 理論基礎

對圓形斷面螺旋彈簧而言，一個彈簧的組成是由直徑 d 的線圈節距 P ，以螺旋方式繞成，平均彈簧直徑 (D) 除以線圈直徑 (d) 稱為彈簧指數 C_s (spring index)，則

$$C_s = \frac{D}{d} \quad (2.1)$$

彈簧受力 (F) 時會產生兩種力量，一種為扭轉剪力，另一種為直接剪力。直接剪力造成的直接剪應力 τ_F 為

$$\tau_F = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d^2} \quad (2.2)$$

因扭矩造成的扭轉剪應力 τ_T 為

$$\tau_T = \frac{T_r}{J} = \frac{\left(\frac{1}{2}FD\right)\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (2.3)$$

彈簧受力後最大的剪應力會在彈簧的內側，綜合兩式將兩個剪應力組合包含彈簧指數 C 的最大剪應力 τ 為

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_T + \tau_F = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \\ &= \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4FCd}{\pi d^3 C_s} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2C_s}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

由於螺旋彈簧受力作用是屬於非直桿受扭力，考慮彎曲效應則線圈斷面內部直接剪應力為 $\tau_F = 1.23 \frac{F}{A} = 1.23 \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}}$ (2.5)



將方程式整理後也可改寫成

$$\tau_F = \frac{8FD}{\pi d^3} \times \frac{0.615}{C_s}$$

將前述的扭轉剪應力以及修正後的直接剪應力在疊加之後，可算出線圈內部最大剪應力值為

$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3} + \left(\frac{8FD}{\pi d^3} \times \frac{0.615}{C_s} \right) = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{0.615}{C_s} \right) \quad (2.6)$$

上式括號中的係數稱為直接剪力係數

$$\text{(direct shear factor)} K_s = 1 + \frac{0.615}{C_s} \quad (2.7)$$

若彈簧承受高週期性之負載，因為曲率的影響，彈簧內部發生應力集中效應，扭轉剪應力強度較大。Wahl 應力修正公式包括了曲率(C)的影響，因此可再修正至更精確

$$\tau = K_w \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C_s} \right) \quad (2.8)$$

其中 Wahl 因數 K_w 定義為

$$K_w = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C_s} \quad (2.9)$$

式中的第一項，基本是一個應力集中係數，並解釋了曲率的影響。

對矩形斷面螺旋彈簧而言，彈簧是由面積為 $b \times h$ 的線圈以螺旋方式組成，彈簧斷面如圖 1 所示，平均彈簧直徑(D)除以水平方向邊長(b)稱為彈簧指數 (spring index) C_R ，則

$$C_R = \frac{D}{b} \quad (2.10)$$

圖 1 的矩形水平底邊寬度以 b 表示，垂直高度則以 h 來表示表示。長邊的中點位置為 A_1 ，應力為該長邊的最大值，其應力修

正係數以 α_1 表示， A_2 為短邊的中點位置， α_2 為其修正係數，若 $b > h$ ， A_1 為 b 的中點，而 $b < h$ ， A_1 為 h 的中點，其修正係數如表 1 所示。

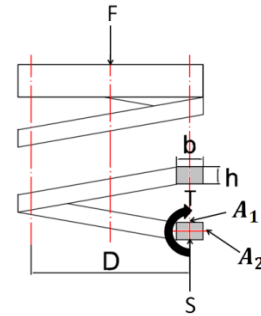


圖 1 矩形斷面彈簧

斷面面積為方形或矩形之螺旋彈簧，同一螺旋彈簧因為面積的不同而有不同的彈簧係數，而係數表示方法參照 Francu 所提出的方式，表 1 為彈性修正係數。

表 1 彈性應力修正係數

b/h	1.0	1.2	1.5	1.75	2.0
α_1	0.208	0.219	0.231	0.239	0.246
α_2	0.208	0.235	0.269	0.291	0.309

由圖 1 可以得知，矩形截面直接剪力所造成的直接剪應力 τ_F 為

$$\tau_F = \frac{F}{A} = \frac{F}{bh} \quad (2.11)$$

而從圖亦可得知，矩形截面扭矩造成的扭轉剪應力 τ_T 為

$$\tau_T = \frac{T_T}{J} = \frac{\left(\frac{1}{2}FD \right) \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{bh^3}{6}} = \frac{3FD}{2bh^2} \quad (2.12)$$

方形截面彈簧製造時所產生的彎曲效應，經由精確分析後，將在扭轉剪應力中加入彈性係數，公式可以再更精確地找出矩形扭轉剪應力公式為



$$\tau_T(A_1) = \frac{FD}{2\alpha_1bh^2} \text{ and } \tau_T(A_2) = \frac{FD}{2\alpha_2bh^2} \quad (2.13)$$

彈簧受力後最大的剪應力會在彈簧長邊的內側，綜合上兩式，並將兩個剪應力組合在一起，最大剪應力 τ 加上彈簧指數 C_R 的式子為

$$\tau = \tau_T + \tau_F = \frac{3FD}{2bh^2} + \frac{F}{bh} = \frac{3FD}{2bh^2} \left(1 + \frac{2h}{3D}\right) = \frac{3FD}{2bh^2} \left(1 + \frac{2}{3C_R}\right) \quad (2.14)$$

將前述修正後的扭轉剪應力，及直接剪應力疊加後，可算出線圈內部最大剪應力值為

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{FD}{\alpha_1bh^2} \left(1 + \frac{2F\alpha_1}{C_R}\right) = \tau_T \left(1 + \frac{2F\alpha_1}{C_R}\right) \quad (2.15)$$

依照 Wahl 係數的做法，將上式再修正後之剪應力為

$$\tau = \tau_T \left(K_c + \frac{2F\alpha_1}{C_R}\right) \quad (2.16)$$

式中的 K_c 即是我們要找的曲率修正因子，不同的矩形截面皆可由同樣方式求得。

3. 分析方法

本文分析採用有限元素法之 SolidWorks 軟體在修改形狀較為方便，可將模型細分成許多稱作元素的小塊形狀，將複雜問題簡化為需同步解決的多個簡單問題。在求得不同矩形斷面之彈簧曲率修正因子，使用 Mathematica 數學軟體來計算，用非線性曲線擬合功能可從很多個數據點資料中，找到一個相符合的曲線，並將此曲線以迴歸分析法呈現所要的公式形

式，此擬合方式是在其他非線性擬合方式中最接近應力分析據點的擬合方式。本文的目是要求出不同彈簧螺圈直徑、彈簧指數以及斷面形狀的狀況下之彈簧曲率修正因子，先求出各種不同形狀的彈簧最大剪應力，再由分析出之剪應力值與公式所得之剪應力值做一比較，將應力效應曲線以一公式來表示稱為剪應力修正因子。

在彈簧的剪應力分析中，彈簧圈數以及螺旋角的影響並不大，因此在分析應力時只擷取彈簧其中一圈以及將螺旋角設定趨近於零來分析，分析的零件示意圖如圖 2。本文所做的是因曲率產生之剪應力修正因子，因此探查的應力位置為彈簧內側中點，如圖 2 的紅點所示之位置，左邊的圖為分析零件部分的圖，右邊為完整的分析零件圖，分析材料選擇了彈簧中常用的碳鋼。而施力方向為一端固定，一端垂直拉伸方向施力，以模擬彈簧受到拉伸之力時彈簧的應力情形。

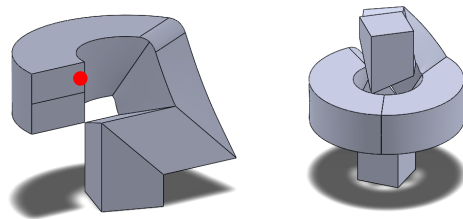


圖 2 彈簧部分圖示

長方形斷面的彈簧分析流程與正方形斷面的流程大致上是相同的，只是在彈簧斷面的邊長上設定方式不同，因為斷面邊長的不同而有分為長邊在下(橫)與短邊在下(直)兩種不同的形式，表示方式如圖 3 圖 4 所示。其餘分析的設定與正方形斷面之彈簧相似，並定義長方形斷面的彈簧指數為彈簧螺圈直徑除以水平邊長。



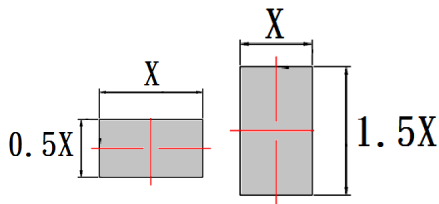


圖 3 長寬表示方法
(X 為底邊,1.5X 為長邊,0.5X 為短邊)

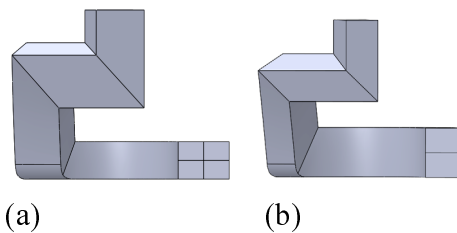


圖 4 長方形斷面彈簧
(a.長邊在下 b.短邊在下)

螺旋彈簧之剪應力分析分成三組，彈簧螺圈直徑分別為 $\varnothing 30\text{mm}$ 、 $\varnothing 50\text{mm}$ 、 $\varnothing 80\text{mm}$ ，每組分析以固定彈簧直徑改變彈簧指數方式來分析。一般業界所使用的彈簧指數通常為 4~14 之間，彈簧指數計算方法為彈簧螺圈直徑除以邊長，彈簧螺圈斷面形狀為正方形，計算出彈簧線徑邊長後再繪製出彈簧，邊長如表 2。長方形斷面的彈簧分析流程與正方形斷面的流程大致上是相同的，斷面邊長的不同而有分為長邊在下(橫)與短邊在下(直)兩種不同的形式，其餘分析的設定與正方形斷面之彈簧相似，並定義長方形斷面的彈簧指數為彈簧螺圈直徑除以水平邊長。

4. 結果與討論

本文將先使用繪圖軟體繪出矩形斷面彈簧分析模型，並分析剪應力狀況，來探討彈簧螺圈直徑、斷面形狀及彈簧指數等因素，對於彈簧受力後之應力的影響，再

以數學運算軟體找出適合的應力修正公式。

首先分析的形狀為正方形，而正方形的邊長可由彈簧指數與彈簧螺圈直徑的關係式求得。彈簧指數 C_s ， D 為彈簧螺圈直徑、 d 為水平方向之矩形邊長，詳細邊長如表 2 所示。從圖 5 的比較圖可以發現，固定彈簧指數下，當彈簧螺圈直徑越小、彈簧斷面積越小，受到的剪應力值越大，而圖 6 則顯示修正係數隨彈簧指數增加而下降，證明彈簧指數與應力值成反比。雖然不同的彈簧螺圈直徑之分析剪應力不同，但是在圖 6 可以看出不同的彈簧直徑計算出來的修正係數卻是非常接近。

表 2 彈簧指數與線徑邊長關係

(單位:mm)

彈簧指數 (C)	彈簧螺圈直徑		
	$\varnothing 30$	$\varnothing 50$	$\varnothing 80$
3	10.000	16.667	26.667
4	7.500	12.500	20.000
5	6.000	10.000	16.000
6	5.000	8.333	13.333
7	4.286	7.143	11.429
8	3.750	6.250	10.000
9	3.333	5.556	8.889
10	3.000	5.000	8.000
11	2.727	4.545	7.273
12	2.500	4.167	6.667
13	2.308	3.846	6.154
14	2.143	3.571	5.714
15	2.000	3.333	5.333

本文分析螺旋彈簧矩形斷面有兩種類型，一種是長邊直立的形式，另一種則為橫置，彈簧指數計算為彈簧螺圈直徑除以斷面的水平面，矩形斷面模型的分析方式與正方形斷面的方法相似，差別僅在長邊



與短邊的判斷方式不太一樣。剪應力公式計算應力需注意使用的彈性修正係數不同，如表 2 所示，彈性修正係數會因矩形的長邊與短邊的尺寸不同而有所差異。首先找出直立與橫置的剪應力以及彈簧係數的差異性，再判斷後續分析長方形斷面彈簧的形式，彈簧螺圈直徑為 $\phi 50\text{mm}$ 力量固定為 10N 的拉力。

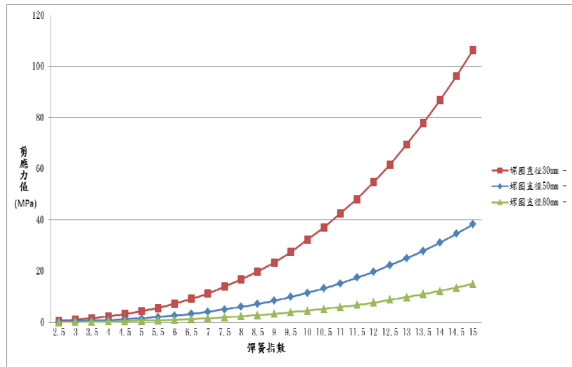


圖 5 彈簧指數與剪應力關係圖

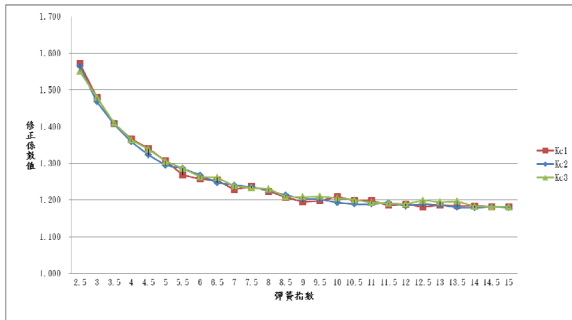


圖 6 修正係數與彈簧指數的關係圖

從圖 7 可以看出在兩種不同類型的斷面分析結果中，當彈簧螺圈直徑相同時，長方形斷面彈簧施力相同其直立形式所測得的應力值比橫置時的應力還要大。從圖 8 中彈簧斷面積為 $10\text{mm} \times 15\text{mm}$ ，彈簧圈數為 6 圈的整體彈簧圖中，可以看出直立與橫置斷面形式的彈簧，橫置斷面的彈簧所使用到的空間並不大。在彈簧係數 K 方

面，計算公式為 $\frac{Gb^2h^2}{8nD^3}$ ，G 為剪切彈性係數，b 為線寬 h 則為線高， ϵ 為應變，n 為彈簧圈數，D 為彈簧螺圈直徑，因為分析的彈簧材料、斷面面積、彈簧螺圈直徑以及彈簧圈數是一樣的，所以計算下來不管橫置或直立形式的彈簧斷面，彈簧係數是一樣的，因此後續之應力分析將以橫置的長方形斷面來做分析。

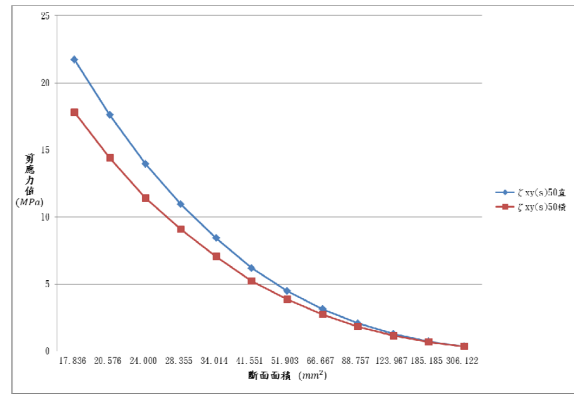


圖 7 直立與橫置之矩形彈簧分析($\phi 50$ 、長/短=1.5)

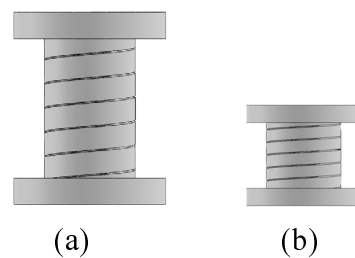


圖 8 直立與橫置斷面完整彈簧比較(a: 直立、b: 橫置)

橫置形式的長邊與短邊使用的比例，從圖 9 中可以看出長短邊比例固定，不同的彈簧直徑所測得的比較值相差並不多。使用的橫置斷面彈簧而直徑為 C，圖 10 為不同長短邊比例的修正係數值 $Kc1$ (彈簧螺圈 $\phi 30\text{mm}$ 時所得到的 Kc 值) 比較圖



表，由圖與表中可以看出不同的比例會得到不一樣的比較值，比例越小所得應力值越大，因此修正係數值就越大。從剪應力公式也發現彈簧中的螺旋角對整體應力分析的結果影響並不大，因此在分析時的螺旋角接近於零，而在本文中只將彈簧擷取中間的一圈來分析，所以彈簧一圈的完整度會影響到分析出來的應力結果。

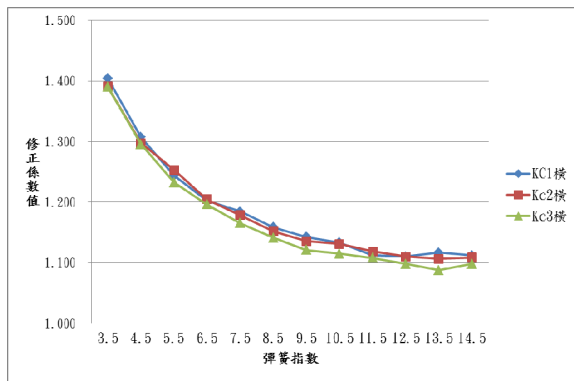


圖 9 彈簧指數與 Kc 值關係(橫置斷面短邊為底邊 0.5 倍)

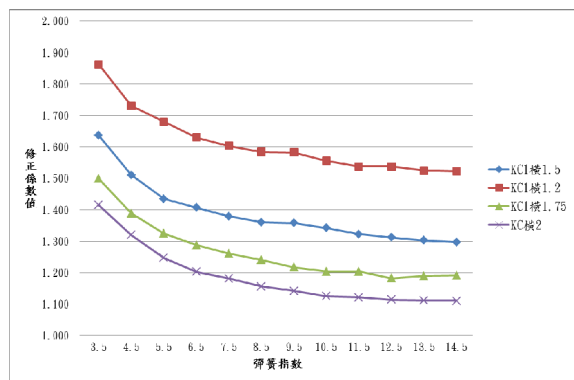


圖 10 不同長寬比之彈簧指數與 Kc1 值關係

由圖 6 可以得知不同螺圈直徑下的修正應力值曲線是很接近的，因此推算公式的正方形點資料由螺圈直徑 $\phi 50\text{mm}$ 的曲率修正係數 Kc2 值取得，再以 Mathematica 軟體中的曲線擬合函數運算後，來找出與

點相符合的修正因子公式，以及繪製出擬合完成之曲線，本文章所使用的運算函數是非線性公式擬合(Nonlinear Model Fit)的方式來進行擬合運算。

由圖可以得知擬合出的公式為

$$\frac{-10.1346 + 71.8362X}{-52.3241 + 64.1698X}$$

式中 X 等於彈簧指數 C，將此公式化到最簡為

$$\frac{9C - 1}{8C - 6}$$

長方形依照長邊與短邊的比例 1.2、1.5、1.75 以及 2 的形狀來分析，由圖 7 可以看出長方形斷面彈簧螺圈直徑雖然不同但應力分析結果並無太大的影響，長方形斷面使用的參數為彈簧螺圈直徑 $\phi 30\text{mm}$ 的曲率修正係數 Kc1 所分析的結果點資料，再使用 Mathematica 中的曲線擬合函數，找出與數據點相符合的修正因子，以及繪製出擬合完成的曲線。長邊與短邊的比例 1.2 的計算公式與結果，擬合出公式之後再將這些公式簡化，以方便以後套用在剪力公式中。

長方形長寬比在 1.2 時所計算出來的應力修正公式

$$\frac{-12.598 + 32.1914X}{-23.9254 + 22.2067X}$$

化簡之後

$$\frac{9X - 2}{8X - 8}$$

長寬比例為 2 時擬合公式為

$$\frac{2.121X + 0.081}{2.064X - 1.93}$$

化簡之後

$$\frac{28X + 1}{27X - 24}$$



找出各個長寬比例所算出的修正公式以及擬合曲線之後，再將原本使用分析找到的數據曲線以及從 Mathematica 運算找出的公式曲線做比較，可以看出兩種不同方式形成的曲線但是兩者的誤差值約為 3%，比較圖如圖 11 所示。在使用數學軟體擬合公式過程中，雖然有很多種類的曲線擬合方式與函數，但在使用非線性的公式擬合出的公式與曲線，可以發現與分析出來的點資料最為符合，誤差值最大只有 3% 而已。

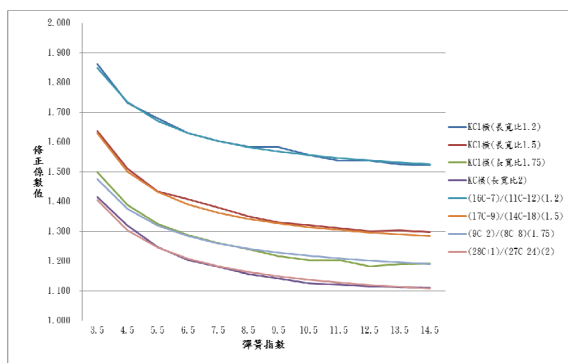


圖 11 分析結果曲線與修正公式曲線比較

5. 結論

現今通用的修正因子都為圓形斷面的螺旋彈簧，但是矩形斷面卻沒有一個較為明確的修正因子公式，本文的目的在找尋矩形斷面彈簧之剪應力修正因子，過程中使用分析軟體以及數學軟體來找出剪應力修正公式。首先以繪圖軟體繪製出欲分析之零件，再以分析軟體使用有限元素法分析找出最大剪應力之值，最後使用數學運算軟體使用非線性公式擬合的方式來找出修正因子公式。

不同彈簧尺寸之矩形螺旋彈簧修正係數跟彈簧尺寸無關但與彈簧指數有關，所

以彈簧的尺寸的大小並不會影響最後的修正係數值。長方形斷面螺旋彈簧會因為彈簧斷面積長寬比的不同導致曲率修正因子也會不同，因此長方形斷面的應力修正公式應納入面積長寬比的因素進去。

參考文獻

1. Francu, Jan ,Petra, Nováček, and Přemysl Janíček, "Torsion of a non-circular bar", Engineering Mechanics, Vol.19, pp.45-60(2012)
2. Wahl, A.M. , "Stresses in Heavy Closely Coiled Helical Springs", Trans.ASME, APM-51-17, (1929)
3. コイルばね解析法の研究委員會，報告，ばね論文集，日本，第 35~75 頁(2004)
4. 張殷愷，壓縮彈簧設計參數之有限元素分析，碩士論文，華梵大學，機電工程學系博碩專班，台北(2012)
5. 陳盈璋，滑蓋彈簧應力分析與尺寸參數設計，碩士論文，國立台灣科技大學機械工程系，台北(2008)
6. Wittrick, W. H. , "On elastic wave propagation in helical springs", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 8, pp.25-47(1966)
7. 張智鈞，具預扭角圓柱形螺旋彈簧動態之有限元素分析，碩士論文，國立台灣科技大學機械工程系，台北(2011).
8. Leung, A. Y. T. , "Vibration of thin pre-twisted helical beams", International Journal of Solids and Structures, Vol.47, 177-1195(2010)
9. Massoud, M. F. , "On the coefficient matrix of a cross-section of a vibrating curved and twisted non-prismatic space thin beam", International Journal of Mechanical Sciences, Vol.12, pp.327-340(1970)

