

## 液滴撞擊壁面上動態液滴之數值計算

劉昭忠<sup>1</sup> 劉源昌<sup>2</sup> 劉昭恕<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> 中州科技大學 電機與能源科技系

<sup>3</sup> 國立高雄應用科技大學 機械工程系

### 摘 要

本研究以數值方法模擬液滴與壁面上動態液滴之碰撞過程。在碰撞過程中，以等位函數法計算兩液滴邊界的合併及擴展現象。在數值模式上，將統御方程式以結構性單區塊、交錯網格系統和有限體積法進行空間離散，其中對流項、黏滯項和擴散項以二階的中央差分法，時間離散則採用具二階準確度的 Crank-Nicolson 方法。離散化後的所得到的線性代數方程式，則用 SIP 求解。整個計算程序使用 SIMPLER 演算法則。為了驗證程式準確性，先計算雷諾數為 400 及韋伯數為 4.3 之純水液滴撞擊平板的暫態過程，並與實驗結果相比較，發現計算結果非常準確。隨後，計算液滴撞擊壁面上擴展、縮回和靜止等過程的動態液滴，藉以瞭解不同形狀的動態液滴對液滴撞擊行為之影響。

關鍵字：動態、伸長、縮回、等位函數法

---

通訊作者

姓名：劉昭忠

E-mail：c00jcl00@dragon.ccut.edu.tw

## 壹、前言

噴霧系統的應用，在工業界中已廣泛地被使用，如噴霧冷卻 (spray cooling)、噴霧成形 (spray forming)、噴霧塗佈 (spray coating) 和噴墨列印技術 (Ink-jet painting)。在真實噴霧系統環境中，許多原料已被霧化成細小液滴，且液滴會連續撞擊壁面，因此，除了液滴撞擊乾壁面的過程外，又因先前撞擊的液滴會在乾壁面上形成一個液膜，後續液滴便會接著撞擊在此液膜上。所以，無論是液滴撞擊壁面或液滴撞擊液膜，均是噴霧系統中的重要模式。從過去迄今，液滴撞擊壁面之模式已有許多文獻 [1-5] 加以研究，但液滴撞擊液膜之模式，至目前為止則缺乏較詳細之研究 [13-14]。

以數值方法模擬液滴撞擊壁面上的動態液滴，是一個非常複雜且困難的問題。因為在極短時間內，由於液滴的撞擊作用，使得液滴彼此間的邊界會產生一連串的變化，所以如何捕捉液滴邊界的變化，將是數值模擬的重點。

## 貳、文獻探討

Madejski [4] 為了克服液態金屬液滴撞擊平板的擴展過程，乃利用慣性力、黏滯力及表面張力三者達平衡時的量階 (Order of Magnitude) 分析，發展出近似方法來捕捉液滴變形擴展過程。Trapaga 和 Szekely [3] 則使用數值模式，配合標誌法和流體體積法 (Volume of Fluid) 的方式，來模擬平板上液滴的變形過程，並提出相關變數對此過程之影響。Fuki et al. [5] 使用有限元素法來模擬液滴垂直撞擊平板的過程。為了準確求得液滴複雜的變形行為，配合特別的技巧來修正液滴變形後的計算網格，並提出雷諾數 (Reynolds Number)、韋伯數 (Weber Number) 對油滴擴展的影響。

液滴撞擊液膜的研究，楊鴻進 [13] 在其研究中以液滴撞擊不同成分的液膜，由其實驗結果發現，其行為模式可大致分為三類：(I) 反彈脫離型、(II) 混和附著型、(III) 拉伸分離型，但細部行為模式還需視實驗條件而定。蔡銘煌 [14] 主要探討液滴撞擊固體表面及撞擊固體表面上之半圓球狀液膜後所呈現的現象。由其研究結果發現，單一液滴撞擊壁面之結果與相關文獻的結果相似，至於液滴撞擊半圓形液膜時，半圓球狀液體內有氣泡被包覆的情況產生。

從液滴撞擊半圓形液膜的研究中可發現，在壁面上均存在一靜止半圓形液滴，但在真實噴霧系統中，壁面上之液滴非是靜止且半圓形狀，而是一個動態的擴展過程。有鑑於此，本研究以數值方法模擬液滴與壁面上動態液滴之碰撞過程，在捕捉液滴間的變形行為時，以 Osher 和 Sethian [6-7] 所提出的等位函數法 (Level Set Function) 來解決邊界合併破裂等拓撲性質改變的問題。為了驗證數值程式的準確性，先計算分析單一液滴撞擊壁面的結果，並與實驗值做比較。隨後，再探討不同形狀的動態液滴對液滴撞擊行為之影響。



## 參、研究方法

### 一、物理及數學模式

本研究主要是模擬液滴撞擊壁面上動態液滴之過程（圖 1a-1c），並利用等位函數法來計算液氣之界面。

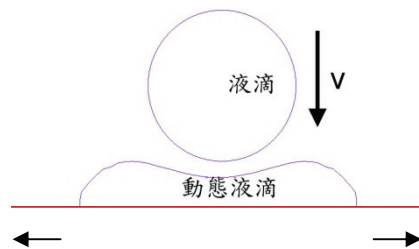


圖 1a 液滴撞擊壁面上擴展液滴示意圖

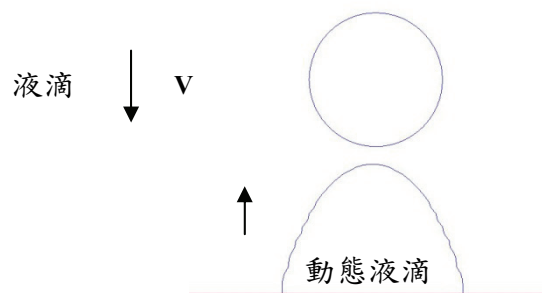


圖 1b 液滴撞擊壁面上縮回液滴示意圖

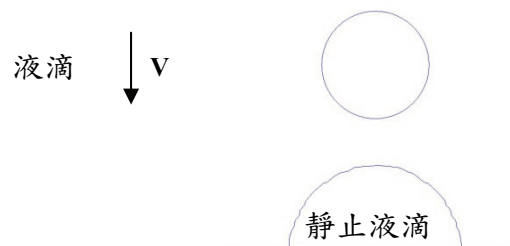


圖 1c 液滴撞擊壁面上靜止液滴示意圖

統御方程式分別為：

連續方程式：

$$\nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1)$$

動量方程式：

$$u_i + (u \cdot \nabla)u = \frac{1}{\rho}(-\nabla p + \nabla \cdot (2\mu\tau)) + k\delta(s)n \quad (2)$$

在等位函數法中，對互不相溶的兩種流體而言，其流體粒子的密度與黏性係數均保持不變，即

$$\rho_t + (u \cdot \nabla)\rho = 0, \quad (3)$$

$$\mu_t + (u \cdot \nabla)\mu = 0. \quad (4)$$

在壁面邊界條件方面，若使用無滑邊界條件，將造成界面無法在平板移動之數值困難，若以完全滑動方式處理，則又與黏性流理論相違背，故本研究中的等位函數法採取所謂部分滑動條件〔8〕來解決此一問題。

以傳統的數值方法求解式(3)和(4)，常因兩流體界面處的密度與黏性係數急遽變化而產生嚴重的數值擴散現象。因此，本研究利用等位函數法來捕捉此一界面〔7, 8〕，以避免此一現象的發生。

在等位函數法中，以 $\phi$ 代表等位函數，其值在流體1中大於零，在流體2中小於零，則 $\phi$ 之零位面正好就是兩流體之界面。若將空間中某一點 $\phi$ 之初始值設為該點與界面之法向距離，其正負號以該點所屬之流體來決定，則 $\phi$ 零位面之移動方式即是兩流體界面之移動方式，其方程式如下：

$$\phi_t + (u \cdot \nabla)\phi = 0, \quad (5)$$

由於 $\phi$ 為平滑函數，故其數值求解要比 $\rho$ 或 $\mu$ 容易，而 $\rho$ 或 $\mu$ 則可直接由下式求得：

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi > \alpha \\ \rho_2/\rho_1 & \text{if } \phi < -\alpha \\ \bar{\rho} + \Delta\rho \sin(\pi\phi/2\alpha) & \text{if } |\phi| \leq \alpha, \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= (\rho_2 + \rho_1)/2\rho_1 \\ \Delta\rho &= (\rho_1 - \rho_2)/2\rho_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi > 0 \\ \mu_2/\mu_1 & \text{if } \phi < 0 \\ (\mu_2 + \mu_1)/2\mu_1 & \text{if } \phi = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其物理意義在於將原為零厚度之流體界面擴展成厚度為 $\alpha$ 之帶狀區，其中 $\alpha \sim O(h)$ ， $h$ 為格點尺度。

此外，式(5)成立的重要前提是 $\phi$ 為一距離函數。然而，只有 $\phi$ 的初始值滿足此一條件，其後流場的變化會使 $\phi$ 無法保證仍能保持為距離函數。再者，若界面發生合併現象時， $\phi$ 在界面處將呈現不連續的函數值。因此，為求等位函數之空間導數不但具高階準確度且又不產生數值振盪現象，就必須對 $\phi$ 做“重初始化”(Reinitialization)，使其保持為距離函數〔8〕。



本研究的另一個重要課題便是如何確保質量守恆，其作法是在每一個時間步階結束之前，將損失的質量補回，而將多餘的質量剔除，也就是將各點等位函數值同時加或減一個常數，使其所對應的體積（質量）維持在設定值。此作法之關鍵在於如何以等位函數值求算體積，其細節請參考文獻〔8〕。

## 二、數值模式

本研究以〔8-11〕所發展的數值模式來求解問題，此模式採用結構性單區塊、非交錯網格及有限體積法來進行計算空間之離散處理，並採用依序疊代法求解連續方程式、動量方程式以及等位函數運動方程式。不可壓縮流場速度與壓力之間的弱耦合則以 SIMPLER 處理〔10，11〕，對流項、黏滯項或擴散項的相關物理量皆以二階的中央差分法來處理。時間離散則採用具二階準確度的 Crank-Nicolson 算則。離散化後的所得到的線性代數方程式，則是用 SIP (Strongly Implicit Procedure)〔12〕求解。

## 肆、結果與討論

為了與液滴碰撞壁面過程的實驗值〔14〕比較，選用水液滴直徑為  $420\mu\text{m}$ 、撞擊速度為  $0.86\text{m/s}$ ，獲得無因次化參數之雷諾數 (Re) 為 400，而韋伯數 (We) 為 4.3。

整個二維計算區域，在 X 方向為 20 倍液滴半徑，Y 方向為 8 倍液滴半徑，所用的格點數分別為  $201 \times 81$  (case1) 與  $401 \times 81$  (case2)，並擴大計算區域，採用 X 方向為 30 倍液滴半徑，Y 方向為 8 倍液滴半徑，所用的格點數為  $301 \times 81$  (case3)。

將計算結果與實驗值比較 (圖 2a-2b) 得知，雖未考慮乾壁面粗糙度之影響，但隨著無因次化時間變化的中央液面高度 (圖 2a) 和擴展距離 (圖 2b) 其最大誤差範圍大概在 7% 以下，因此其計算模擬結果可謂相當準確。

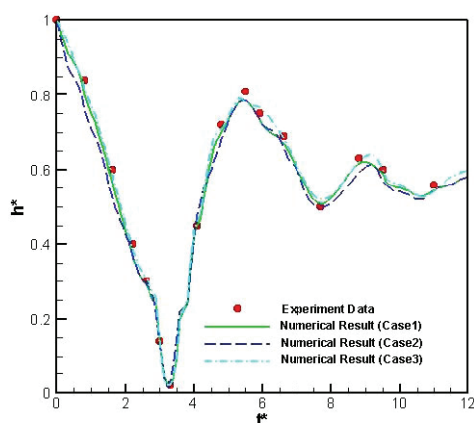


圖 2a 液滴撞擊平板過程中的無因次化中央液面高度時序曲線圖



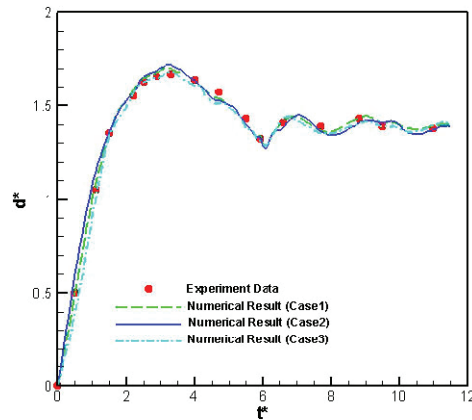
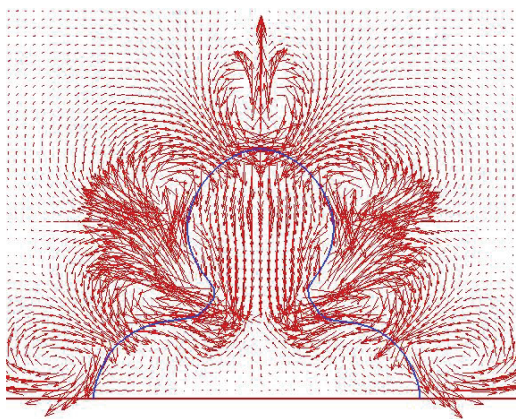


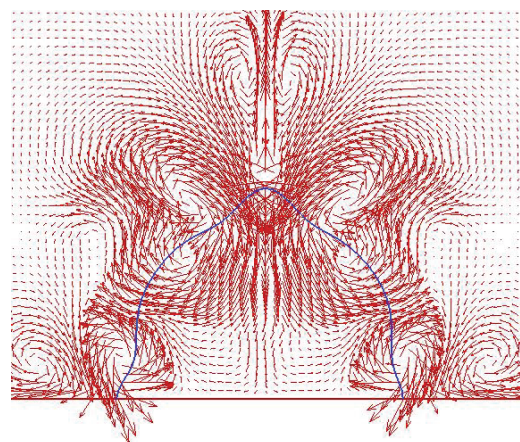
圖 2b 液滴撞擊平板過程中的無因次化擴展距離時序曲線圖

為了探討液滴撞擊壁面上動態液滴的過程，先將水液滴直徑為  $50\mu\text{m}$ 、速度為  $1.8\text{m/s}$  ( $\text{Re}=100$ ,  $\text{We}=2.2$ ) 撞擊壁面，在第一次振盪模式中的擴展與縮回，和最後的靜止等三種過程產生時，分別以相同條件的水液滴撞擊之。

以雷諾數 ( $\text{Re}$ ) 為 100，而韋伯數 ( $\text{We}$ ) 為 2.2 之液滴撞擊壁面上擴展液滴 (圖 1a)。初時，壁面上擴展液滴動能已被壁面之摩擦力和本身表面張力消耗了一些能量，所以動能已比撞擊之液滴的動能為小。當兩者邊界合併時，撞擊動能無法瞬間傳入擴展液滴內部，而在合併部分之表面張力無法使合併邊界固定不動，導致在合併部分會向外擴張 (圖 3a-3b)。因合併邊界逐漸向外擴張，使得壁面上液滴擴展距離會往內收縮 (圖 3c)。隨後，當兩液滴合而為一，內部動能逐漸向下增大，且能克服壁面之摩擦，合併後的液滴開始產生擴展過程 (圖 3d-3e)。隨著時間增加，合併液滴沿平板 ( $X$  軸) 兩個方向產生擴展。當擴展到極限時，被表面張力拉回，而循環來回振盪。此振盪模式符合單一液滴撞擊平板之行為模式。



(a)



(b)

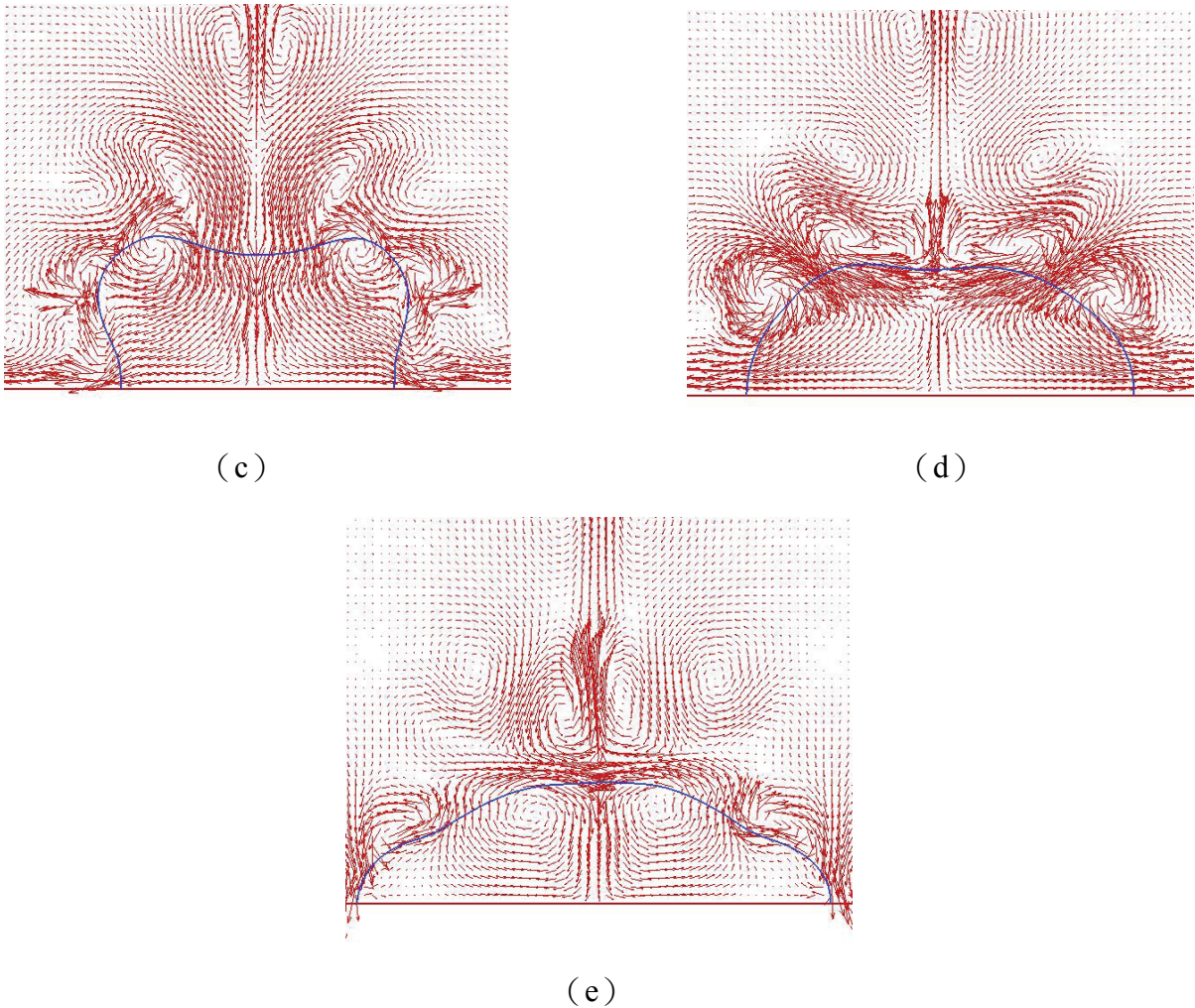


圖 3. 不同無因次化時間液滴撞擊壁面上擴展液滴圖：(a)  $t^*=0.1$ ，(b)  $t^*=0.3$ ，(c)  $t^*=0.6$ ，  
(d)  $t^*=0.7$ ，(e)  $t^*=1.1$ 。

為了更瞭解兩液滴的合併過程，從兩者內部的速度分佈得知，初時，撞擊液滴因動能較大，所以內部向下流場較強，而擴展液滴因動能較小，因此，中心內部左右各一的順時針轉動渦流，和在擴展邊緣處兩邊各一的順時針轉動渦流之流場強度均較弱。當兩者合併時，擴展液滴內部渦流流動反向流場會抵銷撞擊液滴的內部流場，在加上液滴本身並非剛體，因此，除了往下流動外，也會往合併之處流動（圖 3a-3c）。隨著時間增加，兩液滴合而為一產生擴展時，其內部流場如同壁面上擴展液滴之內部流場（圖 3d-3e）。

在相同條件下，液滴撞擊壁面上縮回液滴（圖 1b）。初時，兩者邊界合併，壁面上縮回液滴動能往上，會抵銷撞擊液滴的向下動能，再加上合併之處的表面張力無法使邊界固定不動，導致在合併邊界往外擴張（圖 4a-4b），也使得壁面液滴擴展距離會往內收縮（圖 4c-4d）。當兩液滴合而為一，內部動能克服壁面之摩擦力，合併後之液滴開始產生擴展過程（圖 4e-4f），其後之振盪模式，如同單一液滴撞擊平板之振盪模式。以液滴內部流場變化得知，初時，向下流場比向上流場的強度強，又因表面張力無法使邊界固定不動，導致流場往合併



之處方向流動（圖 4a-4d）。隨後，液滴合而為一，其內部流場就與擴展液滴之內部流場相似（圖 4e-4f）。

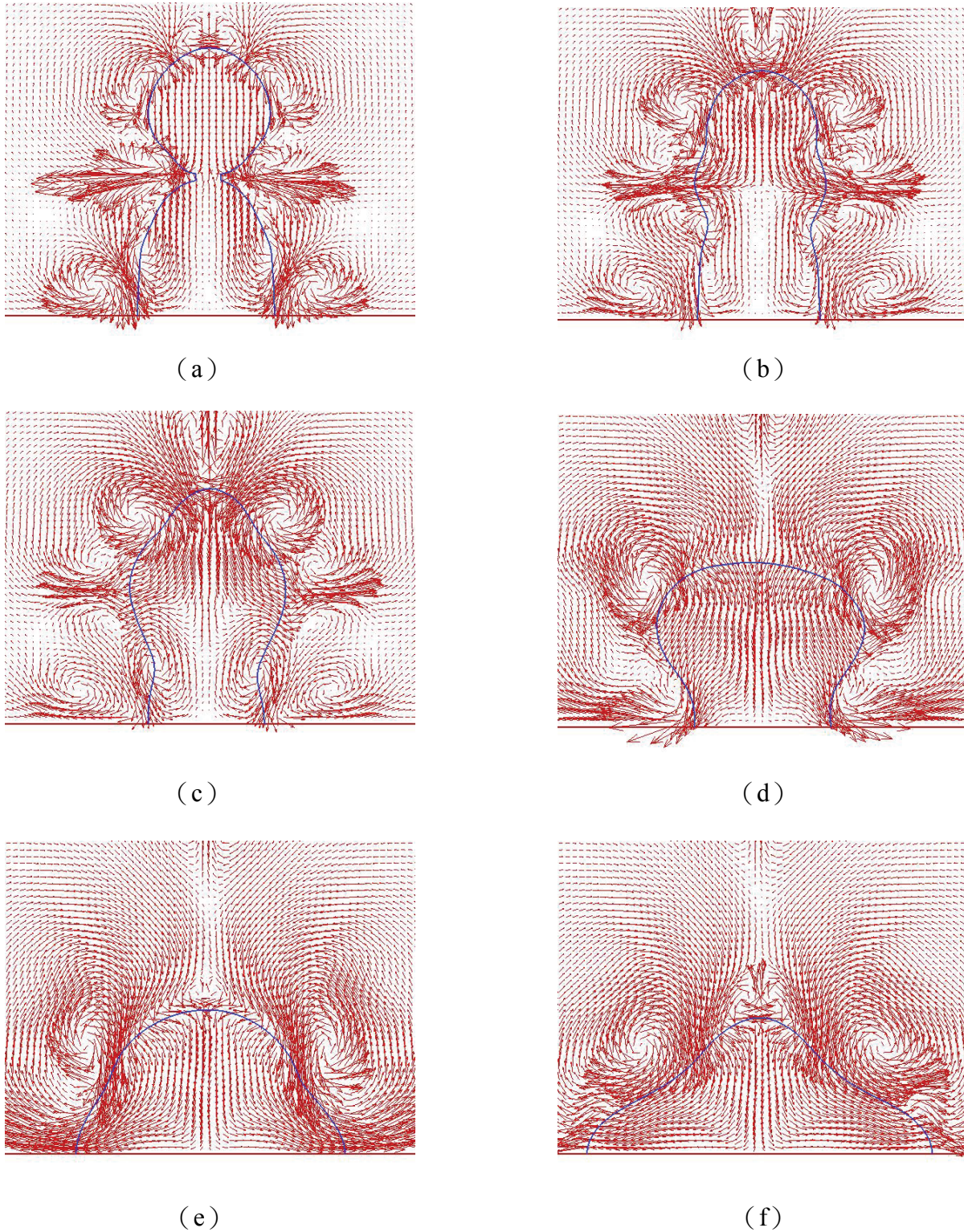


圖 4. 不同無因次化時間液滴撞擊壁面上縮回液滴圖：(a)  $t^*=0.1$ ，(b)  $t^*=0.2$ ，(c)  $t^*=0.3$ ，  
(d)  $t^*=0.6$ ，(e)  $t^*=0.8$ ，(f)  $t^*=1.1$ 。





液滴以雷諾數 (Re) 為 100，而韋伯數 (We) 為 2.2 撞擊壁面上靜止液滴 (圖 1c)。初時，壁面上液滴動能雖為零，但在撞擊過程中，液滴間之合併與合併後之擴展過程，其碰撞機制均與上述之理由相同。在合併之初，液滴在壁面之擴展距同樣會往內收縮，且在合併邊界往外擴張 (圖 5a-5c)。隨後，液滴內部之動能克服壁面摩擦力，遂開始產生擴展過程 (圖 5d-5e)。

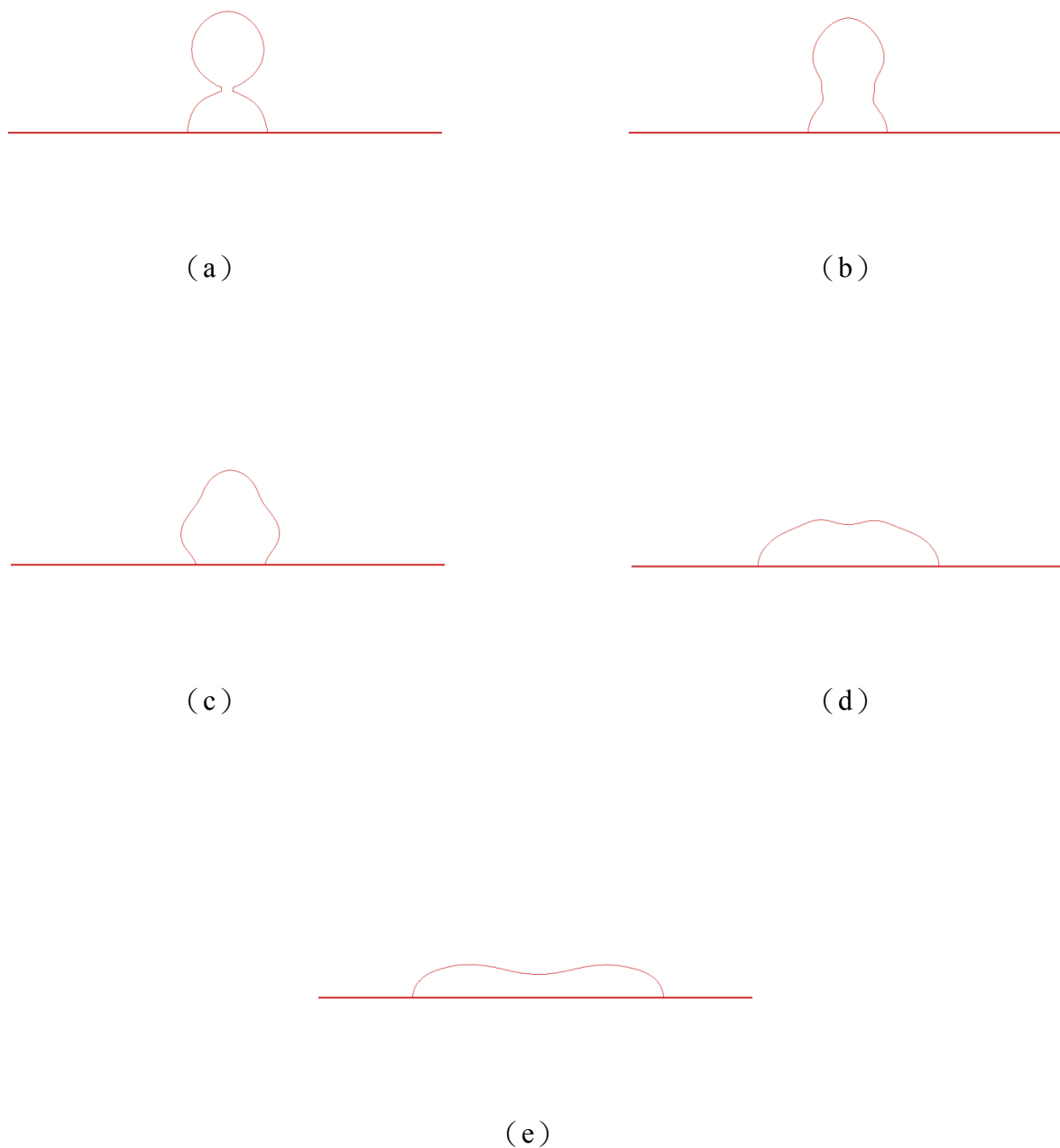


圖 5 不同無因次化時間液滴撞擊壁面靜止液滴圖：  
(a)  $t^*=0.1$ ，(b)  $t^*=0.2$ ，(c)  $t^*=0.3$ ，(d)  $t^*=0.6$ ，(e)  $t^*=1.0$ 。

圖 6 為液滴撞擊壁面上動態液滴無因次化擴展半徑時序曲線圖。在這三種撞擊過程中，無因次化時間 0 至 0.2，表液滴合併之初，合併邊界雖向外擴張，但其擴張效果還不至於影響液滴與壁面的接觸位置，因此，液滴擴展距離不變。無因次化時間 0.2 至 0.4，表合併邊界向外擴張變大，此種合併邊界移動因素，使得液滴擴展距離會往內收縮。無因次時間大於 0.4，表合併後液滴本身動能克服壁面摩擦力，開始產生擴展過程，其振盪模式如同單一液滴撞擊平板之行為模式。就合併後液滴之最大擴展距離而言，因受壁面摩擦力和液滴表面張力之故，消耗了液滴本身動能，但就三種撞擊過程之結果，液滴撞擊動能對壁面擴展液滴之動能，屬於正向效果，最大擴展距離最大，其次，為液滴撞擊壁面上靜止液滴，雖然撞擊動能需提供給靜止液滴動能後才產生擴展過程，但其最大擴展距離仍大於撞擊動能被縮回液滴動能所抵銷。

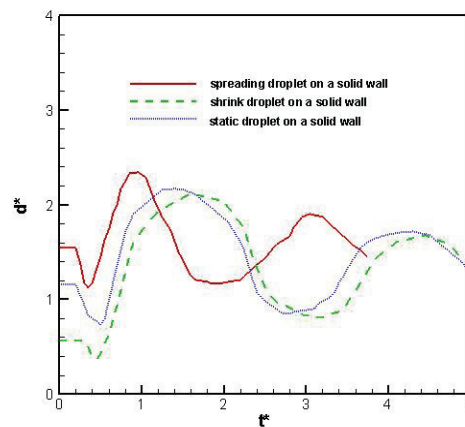


圖 6 液滴撞擊壁面上動態液滴無因次化擴展半徑時序曲線圖

## 伍、結論

本研究以數值方法模擬液滴與壁面上動態液滴之碰撞過程。為了驗證程式準確性，先計算雷諾數為 400 及韋伯數為 4.3 之純水液滴撞擊平板的暫態過程，並與實驗結果相比較，發現計算結果非常準確。隨後，計算液滴撞擊壁面上擴展、縮回和靜止等過程的動態液滴。就液滴合併後最大擴展距離之結果，壁面上擴展液滴之擴展距離最大，其次為壁面上之靜止液滴過程，最後為壁面上縮回液滴之擴展距離。



## 符號說明

Re	雷諾數 $[Re = \frac{\rho u D}{\mu}]$	$h^*$	無因次化中央液面高度 $[h^* = \frac{h}{D}]$
We	韋伯數 $[We = \frac{\rho u^2 D}{\sigma}]$	$d^*$	無因次化擴展距離 $[d^* = \frac{d}{D}]$
$t^*$	無因次化時間 $[t^* = \frac{tv}{D}]$		
h	液面高度	D	液滴直徑
$\rho$	水之密度	t	時間
u	撞擊速度	$\mu$	黏滯係數
$\sigma$	表面張力		
T	黏滯剪力張量		
$\Delta$	Dirac delta 函數		
$\kappa$	兩相界面的曲率半徑		
d	擴展距離		
n	垂直於兩相界面向外之單位向量		
<b>上標</b>			
*	無因次		

## 參考文獻

- [1] Y. Gu and D. Li, "Liquid drop spreadings on solid surfaces at low impact speeds," Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, Vol. 163, pp. 239-245 (2000) .
- [2] M. Bussmann, S. Chandra and J. Mostaghimi, "Modeling the splash of a Droplet Impacting a Solid Surface," Phys. Fluids, Vol. 12 (12) , pp. 3121-3132 (2000) .
- [3] G. Trapaga and J. Szekely, "Mathematical modeling of the isothermal impingement of liquid droplets in spray processes," Metall. Trans. B 22, 901 (1991) .
- [4] J. Madejski, "Droplets on impact with a solid surface," Int. J. Heat Mass Transer 26, 1095 (1983) .
- [5] J. Fukai, Z. Zhao, D. Poulikakos, C. M. Megaridis and O. Miyatake, "Modeling of the deformation of a liquid droplet impinging upon a flat surface," Phys. Fluids A 5 (11) , 2588 (1993) .
- [6] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation," J. Comput. Phys. 79 (1) , pp. 12-49 (1988) .
- [7] M. Sssman, P. Smereka and S. Osher, "A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow," J. Comput. Phys. 114, pp. 146-159 (1994) .
- [8] S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow," Mcgraw-Hill, NewYork (1980) .
- [9] P. J. Van Doormal and G. D. Raithby, "Enhancements of the SIMPLE method for predicting



incompressible fluid flows,” Numer. Heat Transfer, 7, pp. 147-163 (1984) .

- [10] H. L. Stone, “Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations,” SIAM J. Numer. Anal., 5, pp. 530-558 (1968) .
- [11] 楊鴻進, ”液滴撞擊之實驗研究及現象分析”, 國立台灣大學機械工程學研究所碩士論文, 2003。
- [12] 蔡銘煌, ”液滴撞擊半圓形液膜之現象觀察與研究”, 國立台灣大學機械工程學研究所碩士論文, (2003)。
- [13] 沈澄宇, 劉昭忠, 游輝宏, “等位函數法數值分析程式開發”, 船舶技術發展計畫結案報告 (2003) .
- [14] 劉昭忠、游輝宏、鍾孟軒、沈澄宇、施仁傑、周朝宜, 液滴撞擊平板暫態過程之數值模擬, 第九屆全國計算流體力學學術研討會, 台南, pp. 195-202, 2002。



# The Numerical Simulation of a Drop Impacting a Dynamic Drop on a Solid Wall

Chao-Chung Liu<sup>1</sup> Yuan-Chang Liou<sup>2</sup> Chao-Shu Liu<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Department of Electrical Engineering and Energy Technology , Chung Chou  
University of Science and Technology

<sup>3</sup>Departement of Mechanical Engineering , National Kaohsiung University of  
Applied Sciences

## Abstract

The investigation is to develop a numerical code for the simulation of collision of a droplet with a dynamic droplet on a solid wall. In order to capture the boundary of the spread and mergence in the transient process, a level set approach is considered due to the advantage of handling the incorporation and breakup of the boundary easily. For the governing equations of mass and momentum in the numerical program, the structured one-block, non-staggered grid system and the finite volume method are adopted for discreteness of the space domain. The convection, viscosity and diffusion terms are applied by using the second order central difference methods. The Crank-Nicolson method is used to deal with the discreteness of time. The numerical solution based on SIP method is obtained as the governing equations are discretized into their algebraic equations. The computational procedure is handled by SIMPLER Algorithm. The numerical results of a water droplet impinging upon a flat surface are in good agreement with the experimental results with  $Re=400$  and  $We=4.3$ . Furthermore, the mechanism of temporal mergence and spreading process can be predicted for collision of a droplet with a dynamic droplet of the elongation or shrink shapes on a Solid.

Keywords: Dynamic, Elongation, Shrink , Level set Method.