

## 具較少線段數之 NURBS 曲線線性近似方法

施浚龍<sup>\*1</sup> 吳明勳<sup>2</sup> 葉長茂<sup>3</sup> 李敏智<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 中州科技大學機械與自動化工程系副教授 jlshih@dragon.ccut.edu.tw

<sup>2</sup> 中州科技大學機械與自動化工程系副教授 wums@dragon.ccut.edu.tw

<sup>3</sup> 中州科技大學機械與自動化工程系助理教授 yeh120@dragon.ccut.edu.tw

<sup>4</sup> 中州科技大學幼兒保育系助理教授 patty@dragon.ccut.edu.tw

### 摘要

在 CG 及 CAD/CAM 的應用領域裡，計算自由曲線之線性近似是一項非常重要且基本的幾何操作。本研究的目的即在發展一演算法，來計算 NURBS 曲線之較少線段數的線性近似。這個方法的最大優點是，當我們在對一個未滿足近似裕度的 Bézier 曲線執行分割(subdividing)操作的同時，亦能利用分割後的兩個子 Bézier 控制多邊形，去建構一個「較緊凸殼」(tighter convex hull)來重新計算父 Bézier 曲線的線性近似誤差，並利用它來重新檢驗原先分割的必要性。由於以較緊凸殼所得到之誤差會更準確，因此，使用它來作為分割與否的判斷依據，將可有效地避免一些不必要的分割動作，進而達到降低 NURBS 曲線線性近似資料量的目的。最後值得一提的是，由於本文所提出的方法，完全僅使用線性的幾何運算，因此該方法會是十分強健且有效率的。

**關鍵詞:** NURBS 曲線、線性近似、Bézier 曲線、凸殼

### 1.前言

NURBS 曲線是曲線表示之最一般化型式，而且在計算機交談式的設計上，可以提供較大的彈性，因此，NURBS 儼然已成為目前描述曲線的工業標準[1,2]。雖然基於美學及功能上的需求，零件的外型常常會以自由曲線(freeform curve)來作設計，但在 CG 及 CAD/CAM 的應用實務上，如何有效地計算出自由曲線之適當線性近似，依舊是扮演著一個非常基本且重要的角色。因為像電腦螢幕上的曲線顯示、曲線的單/雙圓弧近似、或曲線的偏置計算等等操作，往往仍需藉助曲線的多邊形分解(polygonal decomposition) (即分段線性近似) 這道程序，才能功德圓滿[3-11]；另外，以傳統的 NC 控制器而言，因為只支援直線與圓弧指令，因此，以直線段來近似

---

通訊作者

姓名：施浚龍

E-mail：jlshih@dragon.ccut.edu.tw



自由曲線，很顯然地，也是一項不可避免的工作。

一般來說，NURBS 曲線之線性近似，實務上可分為：(1)參數的(parametric)、及(2)幾何的(geometric)兩種方式。由於使用幾何的分解方法，本質上較參數的方式容易計算，而且可以得到較少的近似線段數，因此，乃廣為工業界及學術界所接納[9,12]。但由於採用幾何方式的 NURBS 曲線線性接近，其近似誤差之估算，傳統上，是根據曲線成份元素 (Bézier 曲線) 的凸殼大小而來，故所得到的誤差可能流於高估，因此會引起後續不必要的分割操作，及產生過量的曲線近似線段；另外，對於 CAD/CAM 的應用而言，因其具高品質線性近似需求的特性，所以，其所產生的直線段，自然會比其它應用更多。基於以上的認知，因此，如何有效地去改善既有的幾何分解方式，來進一步降低近似直線段的資料量，乃成了當前一急待解決的議題。

本研究的目的即在發展一有效率且強健的新演算法，來計算 NURBS 曲線之較少線段數的線性近似。這個方法的最大優點是，當我們在對一個未滿足近似裕度的 Bézier 曲線執行分割操作的同時，亦能利用分割後的兩個子 Bézier 控制多邊形，去建構一個「較緊凸殼」來重新計算父 Bézier 曲線的線性近似誤差，並利用它來重新檢驗原先分割的必要性。由於以較緊凸殼所得之誤差更具準確性，因此，使用它來作為分割與否的判斷依據，將可有效地避免一些不必要的分割操作，進而達到縮減 NURBS 曲線線性近似資料量的目的。由於本文所提出的方法，僅會使用到線性的幾何計算方式，因此該方法將是十分強健且有效率的。

## 2. Bézier 曲線段之誤差控制

在本研究中，所有討論到之曲線皆是以 NURBS 格式來表示。有關此曲線之詳細數學描述，可參考相關文獻[1,2]。在此，為了解釋上的方便，我們只對 NURBS 曲線作一簡單的介紹。一 p 次的 NURBS 曲線被定義成：

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i w_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p} w_i} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{P}_i$  是控制點， $w_i$  是權重，而  $N_{i,p}(t)$  是被定義在如下所示之非週期及非一致節點向量  $T$  (nonperiodic and nonuniform knot vector  $T$ ) 下的正規化 B-spline 基底函數(basis function)

$$T = \left\{ \underbrace{t_0 = \dots = t_p}_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_n, \underbrace{t_{n+1} = \dots = t_{n+p+1}}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

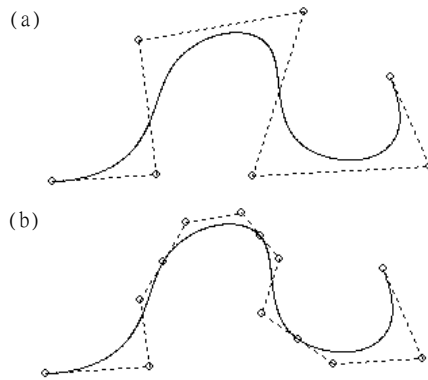
若使用齊次座標系統，則可得到一等值的表示式如下：

$$\mathbf{C}^w(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i^w \quad (3)$$

其中  $\mathbf{P}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$  是被加權的控制點，而  $\mathbf{C}^w(t)$  是在齊次空間的 B-spline 曲線。

一般而言，以幾何方式求取 NURBS 曲線線性近似的的第一步，是使用節點插入法(knot insertion)將使用者給定的曲線分解成其成份的 Bézier 曲線段[13]，如圖一所示。這樣做的好處

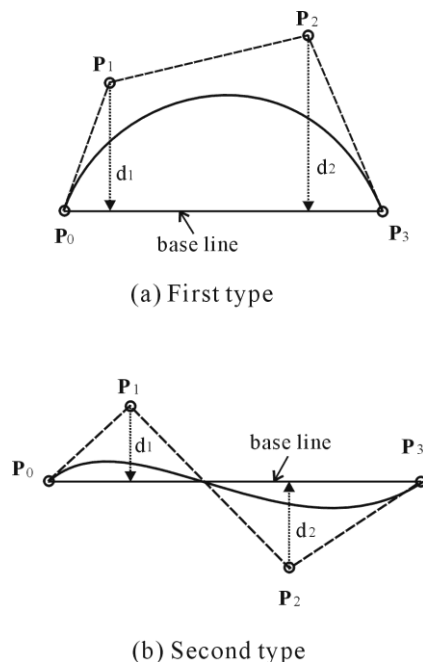
是因為 Bézier 曲線比較簡單，而且它的分割操作比較容易；此外，更重要的是，這樣做，一個完全可信賴的線性近似誤差，才可以被求出[9]。由於此時，NURBS 曲線已被分解成 Bézier 曲線段，因此，只要求出 Bézier 成份元素之線性近似，則計算 NURBS 曲線線性近似的工作，便能輕易完成。



圖一 (a)給定的三次 NURBS 曲線、(b)分解成分段的 Bézier 圖元

## 2.1 傳統的誤差控制法

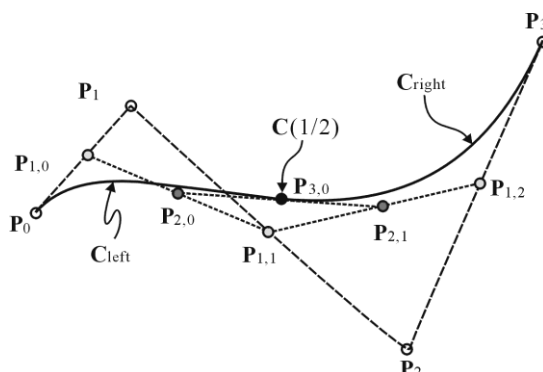
傳統上，我們是基於 Bézier 曲線的凸殼性質(convex hull property)，來檢查一 Bézier 曲線是否可以在給定的公差內以直線段來近似。如圖二所示，對此二典型的 Bézier 曲線而言，假如其所有位在內部的控制點(即 P1 及 P2)離基線(首尾兩控制點的連線，亦即連接 P0 及 P3 的線)的距離是小於或等於指定的公差，則我們便可以宣告，曲線能在此公差範圍內，用控制多邊形或基線，來近似它。而實務上，為了精簡資料輸出的目的，一般都會傾向採用基線 P0P3 來接近 Bézier 曲線。



圖二 Bézier 曲線線性近似之誤差(upper bound error = Max (d1, d2))



而若不幸地，所求的誤差無法滿足裕度的限制，則可以進一步利用 de Casteljau 演算法，重複地在曲線定義的參數中點，對曲線執行分割操作，來達到目的[1]。舉例來說，如圖三所示，一個三次的父 Bézier 曲線原先由控制點  $P_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  所定義，一次分割後，會分裂成兩個子 Bézier 曲線段( $C_{left}$  及  $C_{right}$ )，而它們的控制點，分別是  $P_0$ 、 $P_{1,0}$ 、 $P_{2,0}$ 、 $P_{3,0}$  及  $P_{3,0}$ 、 $P_{2,1}$ 、 $P_{1,2}$ 、 $P_3$ 。顯然地，凸殼 $\{P_0, P_{1,0}, P_{3,0}\}$ 及凸殼 $\{P_{3,0}, P_3, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ 要比原先的凸殼 $\{P_0, P_1, P_3, P_2\}$ 更接近原來的 Bézier 曲線。



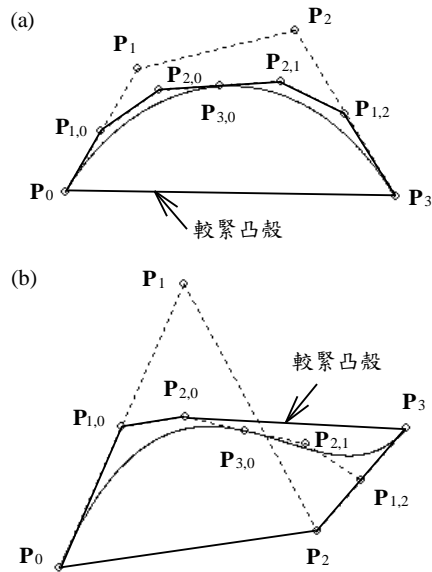
圖三 在  $t = 1/2$  處分割 Bézier 曲線

由上面的說明可知，使用 Bézier 曲線凸殼性質來估算線性近似誤差，並利用曲線分割技巧來縮減近似誤差，可以讓我們很快速的求得一 Bézier 曲線之線性近似。但，可惜的是，由於父 Bézier 曲線所構成之凸殼，一定會比分割後所形成之凸殼為大，因此根據父 Bézier 曲線凸殼大小而得到的近似誤差估算，可能流於高估，因而將會引起後續許多不必要的分割操作，進而導致過多的曲線近似線段產生。因此，如何在不嚴重影響計算效率的前提下，更精確、有效地去估算分割前的曲線線性近似誤差，是值得進一步探討的。

## 2.2 較緊凸殼之誤差控制法

延續上面的討論，以下我們將說明，如何對一個未滿足近似裕度之 Bézier 曲線，在執行分割操作的同時，順便利用分割後的兩個子 Bézier 控制多邊形，去建構一個「較緊凸殼」，來重新計算原先父 Bézier 曲線的線性近似誤差，並進一步利用它來重新檢驗這個分割的必要性，進而有效促成降低曲線線性近似資料量的目的。

如圖四(a)、(b)所示，由控制點  $P_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  所定義之父 Bézier 曲線，經分割後，會分裂成兩個子 Bézier 曲線段，而它們的控制點，分別是  $P_0$ 、 $P_{1,0}$ 、 $P_{2,0}$ 、 $P_{3,0}$  及  $P_{3,0}$ 、 $P_{2,1}$ 、 $P_{1,2}$ 、 $P_3$ 。仔細地觀察圖四，我們可以清楚的看出，由於父 Bézier 曲線，也會完全地被兩個子曲線的凸殼所包覆，因此，此二子曲線凸殼所形成的聯集(union)，當然亦會將父曲線完全包覆，並形成一個較父曲線凸殼為小的較緊凸殼。如圖四(a)之凸殼 $\{P_0, P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{2,1}, P_{1,2}, P_3\}$ 及圖四(b)之凸殼 $\{P_0, P_{1,0}, P_{2,0}, P_3, P_2\}$ ，均會較由控制點  $P_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  所形成的凸殼為小。



圖四 Bézier 曲線較緊凸殼之形成

### 3. NURBS 曲線之線性近似

建立了 Bézier 曲線之誤差控制機制後，現在，可以將 NURBS 曲線線性近似演算法之主要步驟，描述如下：

1. 輸入一NURBS曲線及使用者指定的線性近似公差 $\varepsilon$ 。
2. 將NURBS曲線分解成Bézier曲線段，並存入(push)一空的堆疊(stack)裡。
3. 若堆疊不是空的，則執行以下動作：
  - 3-1. 取出(pop)一Bézier曲線段，然後使用傳統的誤差控制機制，去檢查它是否滿足所指定的線性近似誤差。
    - 3-1-1. 若結果為「是」，則輸出線段 $P_0P_n$ (即基線)。
    - 3-1-2. 若結果為「否」，則在參數的中點( $t = 1/2$ )，將Bézier曲線分割成兩子曲線，然後進入步驟3-2。
  - 3-2. 同樣使用傳統的誤差控制機制(如圖二所示)，對分割後所形成之「較緊凸殼」，重新檢查父Bézier曲線是否滿足所指定的線性近似誤差。
    - 3-2-1. 若結果為「是」，則輸出線段 $POP_n$ (即父Bézier曲線之基線)。
    - 3-2-2. 若結果為「否」，則將分割後之兩Bézier子曲線，加入堆疊裡，然後回到步驟3-1。

檢視這個新演算法，可以發現，在求 NURBS 曲線線性近似的整個過程裡，因為新增加了以「較緊凸殼」來重新檢驗父 Bézier 曲線是否滿足所指定線性近似誤差這道程序，因此，將可有效地避免掉一些不必要的分割，進而達到降低 NURBS 曲線線性近似資料量的目的。此外，由於此「較緊凸殼」的是由原先預定要執行的分割操作所產生，因此，並無額外計算程序的加入需要，且「較緊凸殼」所增加的端點數目並不多，故新演算法所可能增加的計算負擔，是極





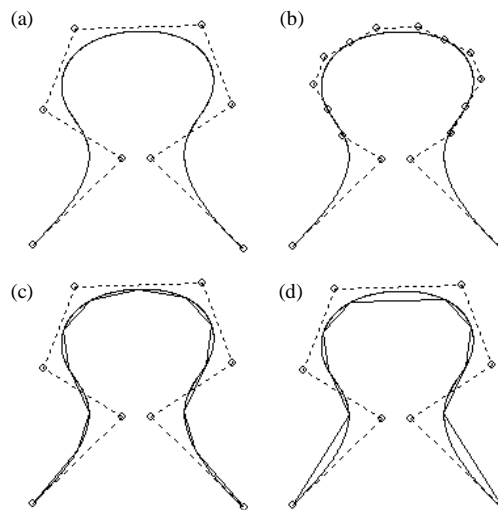
其有限的。

#### 4. 實作與例子

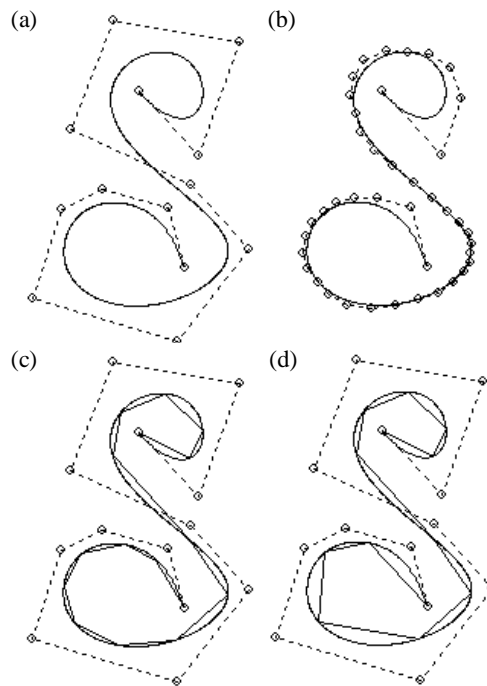
針對上述的演算法，我們實作了各種 NURBS 曲線的線性近似計算。圖五(a)所展示的是一個由 8 個控制點(全部控制點之權重皆為 1.0)所定義之三次 NURBS 曲線；而圖五(b)顯示它的 Bézier 成份圖元，共有 5 段；至於圖五(c)、(d)則是分別展示以傳統方法及本方法在指定公差為 10 的條件下所求得之線性近似，它們的線段數分別是 12 跟 9。圖六是另一個試驗的例子，在這個例子裡，輸入曲線是一條由 13 個控制點所定義的五次 NURBS 曲線(除中間那個控制點之權重為 2.0 外，其餘皆為 1.0)，圖中顯示它的 Bézier 成份圖元共有 8 個，而以傳統方法及本方法在指定公差為 10 的條件下，所求得之線性近似線段數分別是 15 與 12。

為了進一步比較傳統方法與本演算法在不同線性近似公差下之性能，我們另外在裕度為  $10^0$ 、 $10^{-1}$ 、 $10^{-2}$ 、及  $10^{-3}$  的條件下，對圖五及圖六之輸入曲線，進行了實驗，其相關的結果，摘錄如表一所示。

綜合以上兩個實驗所獲致的結果，我們不難發現，本研究所提出的曲線線性近似演算法，確實能有效地降低 NURBS 曲線之線性近似資料量；此外，更難能可貴的是，因這個新方法的整個運算過程，仍保有線性幾何計算特性，因此，它是強健且有效率的。



圖五 (a)給定的三次 NURBS 曲線；(b)分解成 Bézier 曲線段；(c)傳統的線性近似(tolerance = 10)；(d)使用較緊凸殼之線性近似(tolerance = 10)



圖六 (a)給定的五次 NURBS 曲線；(b)分解成 Bézier 曲線段；(c)傳統的線性近似(tolerance = 10)；(d)使用較緊凸殼之線性近似(tolerance = 10)

表一 不同公差下之線性近似線段數

tolerance	$10^1$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
Fig. 5					
traditional method	12	31	102	352	956
tighter CH method	9	26	98	278	807
Fig. 6					
traditional method	15	45	147	460	1391
tighter CH method	12	39	131	413	1260

## 5. 結論與未來展望

本文提出一個新的演算法來計算 NURBS 曲線之線性近似。這個方法，成功地利用 Bézier 曲線分割時，所形成之「較緊凸殼」，來重新檢驗原分割之必要性，進而達成降低輸出資料量的目的。由於本方法僅使用線性的幾何運算，且構成較緊凸殼所增加的頂點數目十分有限，因此，這個方法是十分強健及有效率的；且非常適合如曲線顯示、曲線圓弧近似、及曲線偏置計算等需求緊密線性近似輸出之工程應用。

在本研究中，有關 Bézier 曲線的分割操作，是採用中點分割法，但此一模式，並非是最佳的選擇。一般來說，若能在曲線的中點，而非參數的中點，去分割曲線，更能有效地加速分割



的收斂性。因此，如何透過簡單的幾何運算，來求出曲線最佳的分割點，是未來一個值得研究的方向。在 CG 及 CAD/CAM 的應用領域裡，計算自由曲線之線性近似是一項非常重要且基本的幾何操作，期望一個更精確、簡單、有效率、且具有更少輸出的方法，能在不久的將來，被完全地實現。

## 6. 參考文獻

1. Farin, Curves and surfaces for computer aided geometry design, a practical guide, Academic Press, Third Edition, 1993.
2. L. Piegl and W. Tiller, The NURBS book, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
3. J. M. Lane and R. F. Riesenfeld, "A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-2, No.1, pp.35-46, 1980.
4. K. Kim and J. Jeong, "Tool path generation for machining free-form pockets with islands," Computers and Industrial Engineering, Vol. 28, No. 2, pp. 399-407, 1995.
5. S. H. Chuang and W. S. Lin, "Tool-path generation for pockets with freeform curves using Bezier convex hulls," International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 13, pp.109-115, 1997.
6. S. H. Chuang and C. Z. Kao, "One-sided arc approximation of B-spline curves for interference-free offsetting," Compute-Aided Design, Vol. 31, No. 2, pp.111-118, 1999.
7. D. Marsh, Applied geometry for computer graphics and CAD, Springer-Verlag, London, 1999.
8. L. Piegl and W. Tiller, "Computing offsets of NURBS curves and surfaces," Compute-Aided Design, Vol. 3, pp.147-156, 1999.
9. L. Piegl and W. Tiller, "Biarc approximation of NURBS curves," Computer-Aided Design, Vol. 34, pp.807-814, 2002.
10. S. H. Chuang and J. L. Shih, "A novel approach for computing C2-continuous offset of NURBS curves," International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 29, No. 1-2, pp. 151-158, 2006.
11. J. L. Shih, and S. H. Chuang, "NURBS output based tool path generation for freeform pockets," International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol.29, No. 7-8, pp.714-721, 2006.
12. N. Anantkrishnan and L. Piegl, "Integer subdivision algorithm for rendering NURBS curves," The Visual Computer, Vol. 8, pp.149-161, 1992.
13. W. Boehm and H. Prautzsch, "The insertion algorithm," Computer-Aided Design, Vol. 17, No. 2, pp.58-59.



## Linear Approximation of NURBS Curves with Effective Data Reduction

Jiunn-Long Shih<sup>1</sup>, Ming-Hsun Wu<sup>2</sup>, Chang-Mao Yeh<sup>3</sup>, and Min-Chih Lee<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Associate Professor,

Department of Mechanical and Automatic Engineering,  
Chung-Chou University of Science and Technology

<sup>2</sup> Associate Professor,

Department of Mechanical and Automatic Engineering,  
Chung-Chou University of Science and Technology

<sup>3</sup> Assistant Professor,

Department of Mechanical and Automatic Engineering,  
Chung-Chou University of Science and Technology

<sup>4</sup> Assistant Professor,

Department of Early Childhood Educare,  
Chung-Chou University of Science and Technology

### Abstract

Computing linear approximation of freeform curves is a very important and fundamental geometric operation in areas of CG and CAD/CAM. In this paper, a new algorithm for computing linear approximation of NURBS curves with fewer straight line segments is presented. The main advantage of the method is that a tighter convex hull of a Bézier curve, which does not satisfy a prescribed tolerance of linear approximation, can be constructed while the curve is subdivided. In effect, the tighter convex hull is formed by a union of the two newly generated sub-Bézier control polygons, and then it can be used in reexamining the linear approximation error of the progenitor Bézier curve to check if the initial subdivision is necessary or not. Since the estimation of linear approximation error with tighter convex hull is more accurate, unnecessary subdivisions can be avoided effectively. As a result, the output data of the linear approximation operation can be further reduced. In addition, since all of the geometric computations involved are linear, the proposed method is very robust and efficient.

**Keywords:** NURBS curves; Linear approximation; Bézier curves; Convex hull

