

最小费用最大流新方法及 Lingo 实现

刘 淋

(福建船政交通职业学院 公共教学部, 福建 福州 350007)

摘 要:给出了利用矩阵的表示法来求解网络最小费用最大流的新方法. 从先选取最小费用的第一条初始流, 后面根据费用最小的原理, 不断地增加初始点到终点有向流, 直到无法增加为止, 所得到的流即为最小费用最大流. 通过举例介绍方法的应用, 简单易懂. 同时, 给出 Lingo 代码进行验证其正确性. 该方法对研究网络最小费用最大流有一定的推动作用.

关 键 词:最小费用最大流; Lingo; 单位运费; 容量

中图分类号: O224

文献标识码: A

文章编号: 1673-1670(2012)05-0029-03

最小费用最大流问题在许多实际问题中是十分重要的, 它在工程规划、地理信息系统、通信和交通运输等领域有着十分广泛的应用^[1]. 例如: 由于输油管道的长短不一或地质等原因, 使各管道运输费用也不相同^[2]. 这就需要考虑最小费用最大流的现实问题. 以往的此类问题, 主要采取两种解决的思路: 1) 先选择最大流, 然后根据边费用, 检查是否有可能在流量平衡的前提下通过调整边流量, 使总费用得以减少. 2) 先选择费用小的流, 然后寻找一条源点至汇点的增流链, 但要求这条增流链必须是所有增流链中费用最小的一条^[3]. 两种思路不停迭代, 直到选出最优的可行解. 笔者主要以矩阵的形式对最小费用最大流问题进行求解, 最后给出 Lingo 的程序结果加以对照. 该解法简单易懂, 对运筹学及管理学的学生理解此类问题提供一种较好的方案.

1 数学表示

最小费用最大流中, 一般用有向图 $G = \{v\}$, $n = |V| - 1$ 表示最小费用最大流的网络. 设 f_{ij} 为弧 (i, j) 上的流量, c_{ij} 为弧 (i, j) 上的单位运费, u_{ij} 为弧 (i, j) 上的容量. 初始点记为 v_0 , 终点记为 v_n . 用矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$. ($0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n$) 表示网络中所有的单位运费. 若 (i, j) 无连接, 则 $c_{ij} = \infty$. 用矩阵 $U = (u_{ij})_{n \times n}$. ($0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n$) 表示网络中所有的容量. 若 (i, j) 无连接, 则 $u_{ij} = 0$.

2 方法提出

- 1) 把网络中的初始费用和容量记为 C_0 和 U_0 .
- 2) 在 C_0 中选择总费用最小的作为第一条流. 在 U_0 中选取被 C_0 选取的对应的点, 找出其最小值 f_1 . 然后在 U_0 中相应的位置中减去该值 f_1 得到新的 U_1 .
- 3) 若 U_1 中有新增加的元素 0, 则回到 C_0 , 把 C_0 中 U_1 位置中新变为 0 的相同位置的元素改为 ∞ . (当网络弧容量变为 0 的时候, 说明无法再从该弧通过任何流量, 所以其上的单位运费也不再具备任何选择条件, 可示为此路不通, 单价记为 ∞).
- 4) 在 C 中继续选择最小费用的一条流, 在 U_1 中选取被 C_1 选取的对应的点, 找出其最小值 f_2 . 然后在 U_1 中相应的位置中减去该值 f_2 得到新的 U_2 . 以此重复步骤 2) 和 3), 直到 U_i 中再也找不到增加的流.
- 5) 若 C_i 中, 同一行有相同的值, 则对比此时 U_i 中已被选取的点, 数值接近的 c_{ij} 具有优先权. (例如: C_i 中已经能够 c_{01} , 而 $c_{12} = c_{13}$, 对比此时 U_i 中, u_{12}, u_{13} 哪个与 u_{01} 接近, 则选取该个 c_{ij}).

3 举例说明

图 1 给出带运费的网络, 第 1 个数字是网络的容量, 第 2 个数字是网络的单位运费.



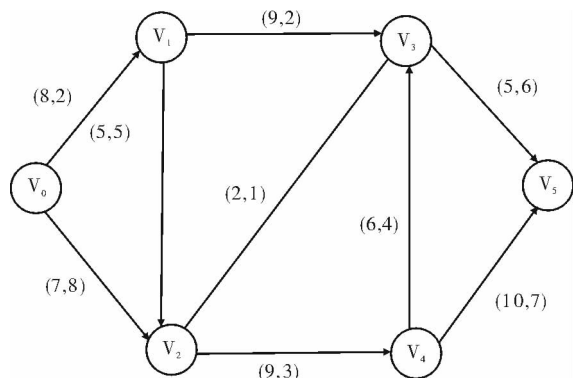


图1 带运费的网络

解 按照方法可知:

$$C_0 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{2} & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \underline{2} & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \underline{6} \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

注:此处第4行, c_{32} 比 c_{35} 要小,为什么没有选择小的. 这里我们要遵循方法的第2)步骤,总费用最小的作为第一条流,如果选择 c_{32} ,则总费用还要加上 c_{24} 和 c_{45} ,则 $1+3+7>6$. 故第一条流为 $v_0v_1v_3v_5$.

$$U_0 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{8} & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \underline{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

选取下划线最小的值5作为 $f_1=5$. 第一条流费用为 $5 \times (2+2+6)=50$,把 U_0 中划下划线的元素都减去 f_1 ,得到下面 U_1

$$U_1 = \begin{pmatrix} \underline{3} & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \underline{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{9} & 0 \\ 0 & \underline{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \underline{10} \end{pmatrix},$$

U_1 中 u_{35} 变为0,则 C_1 中的 c_{35} 变为 ∞ ,

$$C_1 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{2} & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \underline{2} & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \underline{3} & \infty \\ \infty & \underline{1} & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \underline{7} \end{pmatrix} \end{matrix},$$

按照上述方法在 C_1 中选取最小费用流 $v_0v_1v_3v_4v_5, f_2=2$,第二条流费用为 $2 \times (2+2+3+1+7)=30$. 同理,按照上述步骤得到下面新的 U_2 和 C_2 .

$$U_2 = \begin{pmatrix} \underline{1} & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{5} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \underline{8} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{2} & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \underline{5} & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \underline{3} & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \underline{7} \end{pmatrix} \end{matrix},$$

按照上述方法在 C_2 中选取最小费用流 $v_0v_1v_2v_4v_5, f_3=1$,第二条流费用为 $1 \times (2+5+7)=14$. 同理,按照上述步骤得到下面新的 U_3 和 C_3 .

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \underline{7} \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & \underline{8} & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \underline{3} & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \underline{7} \end{pmatrix} \end{matrix},$$

C_3 中选取最小费用流 $v_0v_2v_4v_5, f_4=6$,第二条流费用为 $6 \times (8+3+7)=108$. 同理,按照上述步骤得到下面新的 U_4 和 C_4 .

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 7 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

C_4 中选取 v_0v_2 再也没有可选择的点到终点.



总费用为 $50 + 30 + 17 + 108 = 205$.

4 Lingo 软件解题

```
model:
sets: points/ v0, v1, v2, v3, v4, v5/; edge
(points,points) / v0,v1 v0,v2 v1,v2 v1,v3 v2,v4
v3,v2 v3,v5 v4,v3 v4, v5/:c,u,f;
endsets data: c =2 8 5 2 3 1 6 4 7; u =8 7 5 9
9 2 5 6 10; vf =14; enddata
min = @ sum( edge(i,j):c(i,j) * f(i,j) );
```

```
@ for( points(i) | i#ne#@ index(v0) #and# i#ne
#@ index(v5): @ sum( edge(i,j):f(i,j) ) - @ sum
( edge(j,i):f(j,i) ) =0; );
@ sum( edge(i,j) | i#eq#@ index(v0):f(i,j) )
= vf;
@ sum( edge(j,i) | i#eq#@ index(v5):f(j,i) )
= vf;
@ for( edge(i,j):@ bnd(0,f(i,j),u(i,j)) );
end
```

运行结果如下^[2]:

Global optimal solution found.		
Objective value:	205.0000	
Total solver iterations:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
VF	14.000 00	0.000 000
C(V0, V1)	2.000 000	0.000 000
C(V0, V2)	8.000 000	0.000 000
C(V1, V2)	5.000 000	0.000 000

5 结论

笔者对最小费用最大流提出了简明易懂的矩阵解题方法,并举了实例进行演示和说明. 文中还给出相应的 Lingo 源代码来解例题的数据. 值得说明的是,在数学越来越多地嵌入各行各业的今天,对各类现实问题我们要学会用多种方法进行分析和解决. 让复杂繁琐的实际问题转化为简单易懂的数学问题,用数学知识解决它,使结果更快更好地服务于社会.

参考文献:

[1]刘 磊,刘三阳,孙小军. 最小费用路算法的改进及其应用[J]. 西安文理学院学报:自然科学版,2007,10(1):37 -40.

[2]谢金星,薛 毅. 优化建模与 Lingo/Lingo 软件[M]. 北京:清华大学出版社,2005:295 -301.

[3]滕传琳. 管理运筹学[M]. 北京:中国铁道出版社,1986.

A New Method of Minimum Cost Maximum Flow Realized by Lingo

LIU Lin

(Fujian Chuanzhen Communication Vocational College Fujian, Fuzhou 350007, China)

Abstract: This paper gives a new method to solve network minimum cost maximum flow with Matrix. First, the smallest chain of unit cost as the first initial stream is chosen. Then , according to the principle of minimum cost, the chain from the starting point to the ending point is constantly in creased. It is the resulting flow of mini-
mum cost maximum flow until the flow cannot be increased. It introduces the application of the method through
examples, which is easy to understand. At the same time, it gives a Lingo code to verify its accuracy. The study
of this paper plays a promoting role in network achieving the macimum flow with minimum cost.

Key words: maximum flow with minimum cost; Lingo; unit cost; capacity

