求解时谐涡流场离散系统分裂迭代法的参数改进

魏江超,马昌凤
(福建师范大学 数学与信息学院,福建 福州 350117)

摘　　要:针对时谐涡流场的离散鞍点系统,改进了其预处理分块交替分裂隐式(PBASI)迭代法,引入了新的参数,称为双参数的预处理分块交替分裂隐式(DPPBASI)迭代法.给出了新的迭代方法的收敛性分析,并且给出了简单拓扑与一般拓扑下一种分裂的具体计算格式.

关　键　词:时谐涡流问题;双参数;简单拓扑;一般拓扑;收敛性分析

中图分类号:O241.82　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1673 - 1670(2020)05 - 0001 - 07

0　引言

考虑如下的时谐涡流问题的耦合模型:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{curl}(\sigma^{-1}\mathrm{curl}H_C)+\mathrm{i}\omega\mu H_C=\mathrm{curl}(\sigma^{-1}J_e,c) && \text{in } \Omega_C;\\
&\mathrm{curl}(\mu^{-1}\mathrm{curl}E_I)=\mathrm{i}\omega J_{e,I} && \text{in } \Omega_I;\\
&\mathrm{div}(\varepsilon E_I)=0 && \text{in } \Omega_I;\\
&\mu^{-1}\mathrm{curl}E_I\times n=0 && \text{on } \partial\Omega;\\
&\varepsilon E_I\cdot n=0 && \text{on } \partial\Omega;\\
&\mathrm{curl}E_C\times n=(-\mathrm{i}\omega\mu)^{-1}\mathrm{curl}E_I\times n && \text{on } \Gamma;\\
&\mathrm{curl}E_I\times n=\sigma^{-1}(\mathrm{curl}E_C-J_{e,C})\times n && \text{on } \Gamma.
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中,E,H,J_e 分别是电场强度、磁场强度与涡流电流密度,Ω 是$\mathbb{R}^3$ 上的单连通的有界多边体, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界,Ω_C 与 Ω_I 分别为 Ω 的导体区域与非导体区域,Γ 为 Ω_C 与 Ω_I 闭区域的交集,n 为 Ω 与 Γ 上指向 Ω_I 的单位外法向量方向,介质的磁导率、介电常数、电导率和角频率分别用 $\mu,\varepsilon,\sigma,\omega$ 表示,更详细的说明可见文献[1 - 2].

当非导电区域 Ω_I 的第一贝蒂数为 0 时,利用有限元方法离散耦合模型(1),可以得到简单拓扑情况下的离散系统,当非导电区域 Ω_I 的第一贝蒂数大于 0 时,我们也可以得到一般拓扑情况下的系统, 具体可见文献[3]. 一般情况下,我们会对简单拓扑等式两边左乘矩阵£ $=\mathrm{Diag}(-\mathrm{i}I,-\mathrm{i}I,-I,-I)$,则得到

$$\begin{pmatrix} A_1 & -\mathrm{i}D^* & B_C^* & 0\\ -\mathrm{i}D & A_2 & 0 & B_I^*\\ B_C & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_I & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_C\\ \widetilde{E}_I\\ \widetilde{Q}\\ \widetilde{\Phi}_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathrm{i}F_C\\ -\mathrm{i}G_I\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\tag{2}$$

其中,$A_1=M_C-\mathrm{i}S_C,A_2=S_I+\tau B^*B_I$, 并且 M_C 为对称正定矩阵,S_C 与 S_I 为对称半正定矩阵,B_C 与 B_I 为行满秩矩阵,D 为一个实矩阵,注意到实际上 A_2 是一个对称正定矩阵. 同样地,对于一般拓扑情况下的系统,

收稿日期:2020 - 06 - 18

基金项目:国家自然科学基金(11901098)

作者简介:魏江超(1995—　),男,福建省泉州市人,福建师范大学数学与信息学院硕士研究生,主要从事数值代数及其应用研究.

通信作者:马昌凤(1962—　), 男,湖南省邵阳市人,理学博士,福建师范大学数学与信息学院教授,博士生导师,主要从事数值代数与优化研究.

两边乘以$\pounds = \mathrm{Diag}(-\mathrm{i}I, -I, -I)$，可以得到

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_C^* & -\mathrm{i}D^* \\ B_C & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}D & 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_C \\ \widetilde{Q} \\ \widetilde{E}_I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}F_C \\ 0 \\ -\mathrm{i}G_I \end{bmatrix}. \tag{3}$$

在生活中,时谐涡流模型常常运用于模拟低频交流电的电磁现象.众多学者为了解决时谐涡流模型的离散模型提出了许多算法,如修正超松弛迭代算法与 Uzawa－like 算法[4],交替半正定分裂(APSS)迭代算法[5],正定与半正定分裂(PS)迭代方法[6],以及 Bai 等人提出了一类块交替分裂隐式(BASI)迭代算法[3].同时,为了高效地求解,也提出了许多预处理子,如维分裂预处理子[6]等.笔者在预处理分块交替分裂隐式(PBASI)迭代法[7]上做了进一步的改进,引入了新的参数β,同时研究了新的迭代算法的收敛性,给出了一种分裂情况下具体的计算步骤.

1　预处理分块交替分裂隐式迭代法

首先，文中所考虑的广义鞍点矩阵如下：

$$\mathscr{A}x \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \equiv b\ . \tag{4}$$

其中,$A \in R^{m\times m}$为正定矩阵,$C \in R^{n\times n}$为 Hermitian 半正定矩阵,$B \in R^{m\times n}$,$(m>n)$.在文献[3]中首先给出了一种分裂如下:

$$\mathscr{A} = (\alpha I + \mathscr{P}) - (\alpha I - \mathscr{S}) = (\alpha I + \mathscr{S}) - (\alpha I - \mathscr{P}) = \mathscr{P} + \mathscr{S}, \tag{5}$$

式中,

$$\mathscr{P}:=\begin{pmatrix} P & B_1 \\ -B_1^* & C \end{pmatrix}, \mathscr{S}:=\begin{pmatrix} S & B_2 \\ -B_2^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中,$\mathscr{A} = \mathscr{P} + \mathscr{S}$且$\mathscr{P}$为一个正定矩阵,$\mathscr{S}$为反 Hermitian 矩阵,$B = B_1 + B_2$ 为矩阵 B 的一个分裂.从而进一步得到交替分裂隐式(BASI)迭代方法来求解鞍点问题(4)如下:

$$\begin{cases} (\alpha I + \mathscr{P})x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = (\alpha I - \mathscr{S})x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + \mathscr{S})x^{(k+1)} = (\alpha I - \mathscr{P})x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b\ , \end{cases}$$

式中,$\alpha > 0$,$x^{(k)} = \begin{pmatrix} y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{pmatrix}$为第 k 步迭代,$b = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.基于上述迭代法,在文献[8]中,进一步提出了预处理分块交替分裂隐式(PBASI)迭代法,迭代格式如下:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha\mathscr{V} + \mathscr{P})x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = (\alpha\mathscr{V} - \mathscr{S})x^{(k)} + b, \\ (\alpha\mathscr{V} + \mathscr{S})x^{(k+1)} = (\alpha\mathscr{V} - \mathscr{P})x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + b\ . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中,$\mathscr{V} \doteq \mathrm{Diag}(V_1, V_2)$为块对角矩阵,$V_1, V_2$ 为对称正定矩阵.并且给出了收敛分析如下:

定理 1　假设广义鞍点问题(4)的系数矩阵 $\mathscr{A}$ 有(5)－(6)的分裂.$\mathscr{V}$是对称正定的分块对角矩阵.当 B 的分裂 B_1 和 B_2 满足

$$\mathrm{Re}(<B_1 v, V_1^{-1} B_2 v>) \leqslant 0, \forall v \in \ker(C)$$

时,对于任意的 $\alpha > 0$,给定任意初始值 $x^{(0)} \in C^{m\times n}$,根据迭代格式(7),算法均收敛到问题(4)的精确解.

2　双参数的预处理分块交替分裂隐式(DPPBASI)迭代法

在本节中，我们在原先的预处理分块交替分裂隐式迭代格式上进行了新的改进，引入了第 2 个参数β,进行了新的迭代格式的收敛性分析,并且给出了在实际计算中的计算方式.

2.1　DPPBASI 迭代算法与收敛分析

对于问题(4),我们对第 1 节中的预处理分块交替隐式迭代法进行改进,引入第 2 个参数β,进而可以

得到如下算法:

算法 1　对于广义鞍点问题(4)的系数矩阵 $\mathscr{A}$ 做(5)-(6)的分裂,给定任意的初始值 $x^{(0)} \in C^{m \times n}$,对于 $k=1,2,3,\cdots$,使用下面迭代格式得到迭代序列 $\{(x^{(k)})\}$ 直至满足终止准则:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\mathscr{V}+\mathscr{P})x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} &= (\alpha\mathscr{V}-\mathscr{S})x^{(k)}+b,\\ (\beta\mathscr{V}+\mathscr{S})x^{(k+1)} &= (\beta\mathscr{V}-\mathscr{P})x^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+b\ .\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,\mathscr{V}\doteq \mathrm{Diag}(V_1,V_2)$ 为对称正定的分块对角矩阵,V_1,V_2 为对称正定矩阵.

可以简单地看出,当 $\alpha=\beta$ 时,TPPBASI 迭代算法退化为 PBASI 迭代算法, 并且当 $\alpha=\beta=1$ 时,DPPBASI 迭代算法退化为文献[3]提出的 APSS 迭代算法. 下面我们给出算法的收敛性分析, 首先给出一个有用的引理.

引理 1　假设矩阵 $\mathscr{A}$ 可分解为 $\mathscr{A}=\mathscr{P}+\mathscr{S}$, 其中矩阵 $\mathscr{P}$ 与矩阵 $\mathscr{S}$ 分别是 Hermitian 半正定矩阵与反 Hermitian 矩阵,若对给定的 $\alpha>0$ 有

$$\frac{\alpha\lambda_{\max}}{2\alpha+\lambda_{\max}}<\beta\leqslant\alpha+2\lambda_{\min}, \tag{9}$$

则有 $\rho((\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})^{-1}(\alpha I-\mathscr{S}))<1$, 其中 $\lambda_{\min}$ 与 $\lambda_{\max}$ 分别是 P 的最小与最大特征值, $\rho(Q)$ 是矩阵 Q 的谱半径.

证明　这里采用与文献[9]定理 2 类似的证明方式, 这里给出简单的过程如下:

$$\begin{gathered}\rho((\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})(\alpha I-\mathscr{S}))\leqslant\\ \|(\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})(\alpha I-\mathscr{S})\|_2\leqslant\\ \|(\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\alpha I-\mathscr{S})\|_2\|(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})^{-1}\|_2=\\ \max_{\gamma_i\in\sigma(S)}\frac{\sqrt{\alpha^2+\gamma_i^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma_i^2}}\max_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\frac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|.\end{gathered} \tag{10}$$

其中 $\sigma(Q)$ 是矩阵 Q 的谱集. 因为 $\alpha>0,\beta>0,\lambda\geqslant0$,我们知道函数 $f(\lambda)=\dfrac{\beta-\lambda}{\alpha+\lambda}$ 关于 λ 单调, 所以有下面等式成立:

$$\max_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\frac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|=\max\left\{\frac{\beta-\lambda_{\max}}{\alpha+\lambda_{\max}},\frac{\beta-\lambda_{\min}}{\alpha+\lambda_{\min}}\right\}.$$

进一步,存在 α,β^*,其中 $\lambda_{\min}\leqslant\beta^*\leqslant\lambda_{\max}$,事实上 β^* 是关于 $\lambda_{\min}\lambda_{\max},\alpha$ 函数,使得下列等式成立:

$$\max_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\frac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|=\begin{cases}\dfrac{\lambda_{\max}-\beta}{\lambda_{\max}+\alpha} & \beta\leqslant\beta^*,\\[2ex] \dfrac{\beta-\lambda_{\min}}{\alpha+\lambda_{\min}} & \beta\geqslant\beta^*.\end{cases} \tag{11}$$

下面分 3 种情况讨论:

情况 1　当 $\beta>\alpha$ 时,我们可以得到 $\max\limits_{\gamma_i\in\sigma(S)}\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\gamma_i^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma_i^2}}<1$,因此只需考虑 $\max\limits_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\dfrac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|\leqslant1$ 即可. 若 $\beta\leqslant\beta^*$ 成立,则 $\max\limits_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\dfrac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|=\dfrac{\lambda_{\max}-\beta}{\lambda_{\max}+\alpha}\leqslant1$ 自然成立. 若 $\beta\geqslant\beta^*$ 成立,令 $\max\limits_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\dfrac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|=\dfrac{\beta-\lambda_{\min}}{\alpha+\lambda_{\min}}\leqslant1$,则有 $\beta\leqslant 2\alpha\lambda_{\min}$,综上所述则有 $\alpha<\beta\leqslant\alpha\lambda_{\min}$.

情况 2　当 $\beta<\alpha$ 时,我们有 $\max\limits_{\gamma_i\in\sigma(S)}\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\gamma_i^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma_i^2}}<\dfrac{\alpha}{\beta}$,因此我们只需要证明 $\max\limits_{\lambda_i\in\sigma(P)}\left|\dfrac{\beta-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha}$. 同样地,若 $\beta\leqslant\beta^*$ 成立,令 $\dfrac{\lambda_{\max}-\beta}{\lambda_{\max}+\alpha}<\dfrac{\beta}{\alpha}$,则有 $\dfrac{\alpha\lambda_{\max}}{2\alpha+\lambda_{\max}}<\beta$ 成立. 若 $\beta\geqslant\beta^*$,则 $\dfrac{\beta-\lambda_{\min}}{\alpha+\lambda_{\min}}<\dfrac{\beta}{\alpha}$ 自然成立. 综上所述则有

$\frac{\alpha\lambda_{\max}}{2\alpha+\lambda_{\max}}<\beta<\alpha$.

情况 3 当 $\beta=\alpha$ 时,矩阵 $(\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})^{-1}(\alpha I-\mathscr{S})$ 相当于 BASI 方法的迭代矩阵，它是无条件收敛的，所以等式自然成立.

综合上述 3 种情况，容易得到定理结论.

下面我们给出算法的收敛性定理.

定理 2 假设广义鞍点问题(4)的系数矩阵 $\mathscr{A}$ 有(5)-(6)的分裂，其中矩阵 $\mathscr{P}$ 与矩阵 $\mathscr{S}$ 分别是 Hermitian 半正定矩阵与反 Hermitian 矩阵,$\mathscr{V}$ 是对称正定的分块对角矩阵. 对于任意 $\alpha>0$,若 β 满足

$$\frac{\alpha\lambda_{max}}{2\alpha+\lambda_{max}}<\beta\leqslant\alpha+2\lambda_{min},$$

其中,λ_{max},λ_{min} 分别为矩阵 $\boldsymbol{V}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{P}\mathscr{V}^{-\frac{1}{2}}$ 的最大与最小特征值,根据迭代格式(8),算法均收敛到问题(4)的精确解.

证明 由算法 1,可以得到 DPPBASI 方法的迭代矩阵 T 如下:

$$\begin{aligned}T&=(\beta\mathscr{V}+\mathscr{S})^{-1}(\beta\mathscr{V}-\mathscr{P})(\alpha\mathscr{V}+\mathscr{P})^{-1}(\alpha\mathscr{V}-\mathscr{S})=\\&\mathscr{V}^{-\frac{1}{2}}(\beta\mathscr{I}+\mathscr{S})^{-1}(\beta\mathscr{I}-\mathscr{P})\cdot\\&(\alpha\mathscr{I}+\mathscr{P})^{-1}(\alpha\mathscr{I}-\mathscr{S})V^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{12}$$

其中,$\mathscr{P}=\mathscr{V}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{P}\mathscr{V}^{-\frac{1}{2}}$,$\mathscr{S}=\mathscr{V}^{-\frac{1}{2}}SV^{-\frac{1}{2}}$. 因为矩阵 $\mathscr{P}$ 与矩阵 $\mathscr{S}$ 分别是 Hermitian 半正定矩阵与反 Hermitian 矩阵，且 V 是对称正定的分块对角矩阵,所以 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{S}$ 依然是 Hermitian 半正定矩阵与反 Hermitian 矩阵. 根据引理 1,我们容易得到:若 β 满足

$$\frac{\alpha\lambda_{\max}}{2\alpha+\lambda_{\max}}<\beta\leqslant\alpha+2\lambda_{\min},$$

其中,$\lambda_{\max}$,$\lambda_{\min}$ 分别为矩阵 P 的最大与最小特征值,则有 $\rho((\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})^{-1}(\alpha I-\mathscr{S}))<1$ 成立,又由等式(12)可知,迭代矩阵 T 与矩阵 $(\beta I+\mathscr{S})^{-1}(\beta I-\mathscr{P})(\alpha I+\mathscr{P})^{-1}(\alpha I-\mathscr{S})$ 相似. 则有 $\rho(T)<1$,则算法收敛.

2.2 时谐涡流问题中 TPPBASI 算法的求解

在这小节中,将结合离散的时谐涡流问题的代数形式，研究其简单拓扑和一般拓扑在 TPPBASI 算法下的具体实现.

2.2.1 简单拓扑情况下的算法

结合等式(2),广义鞍点问题(4)可以改写成如下形式:

$$\mathscr{A}x\equiv\begin{pmatrix}A&B\\-B^{*}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\equiv b\ ,\tag{13}$$

其中,

$$A=\begin{pmatrix}A_{1}&-\mathrm{i}D^{*}\\-\mathrm{i}D^{*}&A_{2}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_{C}^{*}&0\\0&B_{I}^{*}\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}H_{C}\\\tilde{E}_{I}\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}\tilde{Q}\\\tilde{\Phi}_{I}\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}F_{C}\\-\mathrm{i}G_{I}\end{pmatrix}.$$

进一步,可以做出分裂如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=(\alpha\mathscr{V}+\mathscr{P})-(\alpha\mathscr{V}-\mathscr{S})=\\&(\alpha\mathscr{V}+\mathscr{S})-(\alpha\mathscr{V}-\mathscr{P})=\mathscr{P}+\mathscr{S}.\end{aligned}\tag{14}$$

其中 P,S 由式(6)规定,$\mathscr{V}\doteq\mathrm{Diag}(V_1,V_2,V_3,V_4)$,又 V_1,V_2,V_3,V_4 为对称正定矩阵且

$$P=\begin{pmatrix}M_{C}&0\\0&A_{2}\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}-S_{I}&-\mathrm{i}D^{*}\\-\mathrm{i}D&0\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}B_C^*&0\\0&B_I^*\end{pmatrix}.$$

容易验证$\mathscr{P}$为半正定 Hermitian 矩阵，$\mathscr{S}$为反 Hermitian 矩阵.

将上述分裂带入算法 1，我们知道每一步迭代都只需要求解两个线性方程组如下：

$$\begin{pmatrix}\alpha V_1+M_C&0&0&0\\0&\alpha V_2+A_2&0&0\\0&0&\alpha V_3&0\\0&0&0&\alpha V_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_C^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\\widetilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\\widetilde{\Phi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1^{(k)}\\u_2^{(k)}\\u_3^{(k)}\\u_4^{(k)}\end{pmatrix},\tag{15}$$

其中，

$$\begin{pmatrix}u_1^{(k)}\\u_2^{(k)}\\u_3^{(k)}\\u_4^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha V_1+\mathrm{i}S_C)H_C^{(k)}+\mathrm{i}D^*\widetilde{E}_I^{(k)}-B_C^*\widetilde{Q}^{(k)}-\mathrm{i}F_C\\\mathrm{i}DH_C^{(k)}+\alpha V_2\widetilde{E}_I^{(k)}-B_I^*\widetilde{\Phi}^{(k)}-\mathrm{i}G_I\\B_CH_C^{(k)}+\alpha V_3\widetilde{Q}^{(k)}\\B_I\widetilde{E}_I^{(k)}+\alpha V_4\widetilde{\Phi}^{(k)}\end{pmatrix},$$

与

$$\begin{pmatrix}\beta V_1-S_C&-\mathrm{i}D^*&B_C{}^*&0\\-\mathrm{i}D&\beta V_2&0&B_I^*\\-B_C&0&\beta V_3&0\\0&-B_I&0&\beta V_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_C^{(k+1)}\\\widetilde{E}_I^{(k+1)}\\\widetilde{Q}^{(k+1)}\\\widetilde{\Phi}^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\u_2^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\u_3^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\u_4^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix},\tag{16}$$

其中，

$$\begin{pmatrix}u_1^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\u_2^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\u_3^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\u_4^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\beta V_1-M_C)H_C^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-\mathrm{i}F_C\\(\beta V_2-A_2)\widetilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-\mathrm{i}G_I\\\beta V_3\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\\\beta V_4\widetilde{\Phi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix}.$$

经过简单的计算，我们可以得到该分裂迭代格式如下：

算法 2　考虑(15)分裂下的简单拓扑问题. 设 $L=\beta V_1-S_C+\frac{1}{\beta}B_C^*V_3^{-1}B_C$，给定初始值 $H_C^{(0)}$，$\widetilde{E}_I^{(0)}$，$\widetilde{Q}^{(0)}$，$\widetilde{\Phi}^{(0)}$，对于 $k=1,2,3,\cdots$，计算 $H_C^{(k+1)}$，$\widetilde{E}_I^{(k+1)}$，$\widetilde{Q}^{(k+1)}$，$\widetilde{\Phi}^{(k+1)}$的步骤如下：

1)通过求解对称正定方程：

$$\begin{cases}(\alpha V_1+M_C)H_C^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=u_1^{(k)},\\(\alpha V_2+A_2)\widetilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=u_2^{(k)},\end{cases}$$

得到 $H_C^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ 与 $\widetilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$.

2)通过下列等式计算 $\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$与 $\widetilde{\Phi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$：

$$\begin{cases}\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=\widetilde{Q}^{(k)}+\frac{1}{\alpha}V_3^{-1}B_CH_C^{(k)},\\\widetilde{\Phi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=\widetilde{\Phi}^{(k)}+\frac{1}{\alpha}V_4^{-1}B_I\widetilde{E}_I^{(k)}.\end{cases}$$

3)进而通过下列等式计算 $\widetilde{E}_I^{(k+1)}$ 与 $H_C^{(k+1)}$：

$$\begin{cases}(DL^{-1}D^{*}+\beta V_2+\frac{1}{\beta}B_I^{*}V_4^{-1}B_I)\tilde{E}_I^{(k+1)}=u_2^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-B_I^{*}\widetilde{\Phi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\mathrm{i}DL^{-1}(u_1^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-B_C^{*}\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}),\\ LH_C^{(k+1)}=u_1^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-B_C^{*}\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\mathrm{i}D^{*}\tilde{E}_I^{(k+1)}.\end{cases}$$

4）最后通过下列等式计算 $\widetilde{Q}^{(k+1)}$ 与 $\widetilde{\Phi}^{(k+1)}$：

$$\begin{cases}\widetilde{Q}^{(k+1)}=\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\beta}V_3^{-1}B_CH_C^{(k+1)},\\ \widetilde{\Phi}^{(k+1)}=\widetilde{\Phi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\beta}V_4^{-1}B_I\tilde{E}_I^{(k+1)}.\end{cases}$$

循环 1）~4）直至满足终止条件.我们可以发现算法的主要计算量集中在步骤 1）与步骤 3），其中可以发现步骤 1）求解的系数矩阵为正定 Hermitian 矩阵，而步骤 3）求解的系数矩阵为正定非 Hermitian 矩阵，因此在实际应用中可以考虑非精确求解方法.

2.2.2　一般拓扑情况下的算法

结合等式（3）与广义鞍点问题（4），可以有：

$$\mathscr{A}x\equiv\begin{pmatrix}A & B\\ -B^{*} & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}\equiv b\ ,\tag{17}$$

其中，

$$A=A_1,B=(B_C^{*}\quad -\mathrm{i}D^{*}),$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},y=H_C,z=\begin{pmatrix}\widetilde{Q}\\ \tilde{E}_I\end{pmatrix},f=-\mathrm{i}F_C,g=\begin{pmatrix}0\\ -\mathrm{i}\mathscr{G}_I\end{pmatrix}.$$

进而可以给出下面一种分裂：

$$\begin{aligned}A=(\alpha V+P)-(\alpha V-S)=\\ (\alpha V+S)-(\alpha V-P)=P+S\ .\end{aligned}\tag{18}$$

其中，P,S 由式（6）规定，$\mathscr{V}=\mathrm{Diag}(V_1,V_2,V_3)$，又 V_1,V_2,V_3 为对称正定矩阵且

$$P=M_C,S=-\mathrm{i}S_C,B_1=(0\quad 0),$$

$$B_2=(B_C^{*}\quad -\mathrm{i}D^{*}),C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

容易验证 $\mathscr{P}$ 为半正定 Hermitian 矩阵，$\mathscr{S}$ 为反 Hermitian 矩阵.

运用与简单拓扑情况下相似的做法，可以得出该分裂的迭代格式如下：

算法 3　考虑（18）分裂下的一般拓扑问题. 给定初始值 $H_C^{(0)},\tilde{E}_I^{(0)},\widetilde{Q}^{(0)}$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，计算 $H_C^{(k+1)},\tilde{E}_I^{(k+1)},\widetilde{Q}^{(k+1)}$ 的步骤如下：

1）通过求解对称正定方程：

$$\begin{cases}(\alpha V_1+M_C)H_C^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=(\alpha V_1+\mathrm{i}S_C)H_C^{(k)}+\mathrm{i}D^{*}\tilde{E}_I^{(k)}-B_C^{*}\widetilde{Q}^{(k)}-\mathrm{i}F_C,\\ (\alpha V_2+A_2)\tilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=\mathrm{i}DH_C^{(k)}+\alpha V_3\tilde{E}_I^{(k)}-\mathrm{i}G_I,\end{cases}$$

得到 $H_C^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ 与 $\tilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$.

2）通过下列等式计算 $\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$：

$$\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=\widetilde{Q}^{(k)}+\frac{1}{\alpha}V_2^{-1}B_CH_C^{(k)}.$$

3）进而通过下列等式计算 $\tilde{E}_I^{(k+1)}$ 与 $H_C^{(k+1)}$：

$$\begin{cases}(DL^{-1}D^{*}+\beta V_3)\tilde{E}_I^{(k+1)}=(\beta V_3-A_2)\tilde{E}_I^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-\mathrm{i}G_I+\mathrm{i}DL^{-1}(q-B_C^{*}\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}),\\ LH_C^{(k+1)}=q-\mathrm{i}F_C-B_C^{*}\widetilde{Q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\mathrm{i}D^{*}\tilde{E}_I^{(k+1)},\end{cases}$$

其中

$$L=\beta V_1-S_C+\frac{1}{\beta}B_C^*V_2^{-1}B_C,$$

$$q=(\beta V_1-M_C)H_C^{(k+\frac{1}{2})}-\mathrm{i}F_C.$$

4)最后通过下列等式计算 $\widetilde{Q}^{(k+1)}$:

$$\widetilde{Q}^{(k+1)}=\widetilde{Q}^{(k+\frac{1}{2})}+\frac{1}{\beta}V_2^{-1}B_CH_C^{(k+1)}.$$

循环 1) ~4) 直至条件满足.

因此,可以发现算法的主要计算量集中在步骤 1) 与步骤 3);同时,也可以发现步骤 1) 求解的系数矩阵为正定 Hermitian 矩阵,而步骤 3) 求解的系数矩阵为正定非 Hermitian 矩阵,因此在实际应用中也可以考虑非精确求解方法.

参考文献:

[1] RODRÍGUEZ A A, HIPTMAIR R, VALLI A. A hybrid formulation of eddy current problems[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2005, 21(4):742 −763.

[2] RODRÍGUEZ A A, VALLI A. Eddy current approximation of Maxwell equations[M]. Milan:Springer, 2009.

[3] BAI Z Z. Block alternating splitting implicit iteration methods for saddle − point problems from time − harmonic eddy current models [J]. Numer Linear Algebra Appl, 2012, 19(6):914 −936.

[4] RODRÍGUEZ A A, HERNÁNDEZ R V. Iterative methods for the saddle − point problem arising from the HC/EI formulation of the eddy current problem [J]. SIAM J Sci Comput, 2009, 31(4):3155 −3178.

[5] REN Z R, CAO Y. An alternating positive-semidefinite splitting preconditioner for saddle point problems from time-harmonic eddy current models [J]. IMA J Numer Anal, 2016, 36(2):922 −946.

[6] 关新. 时谐涡旋电流问题中线性方程组的预处理方法[D]. 上海:华东师范大学,2013.

[7] KE Y F, MA C F. The dimensional splitting iteration methods for solving saddle point problems arising from time − harmonic eddy current models[J]. Appl Math Comput, 2017, 303(1):146 −164.

[8] 刘忠祥,王翠薇,王增琦. 求解时谐涡流模型鞍点问题的分块交替分裂隐式迭代算法的改进[J]. 计算数学,2018:40(3):271 −286.

[9] LI L, HUANG T Z, LIU X P. Asymmetric Hermitian and skew − Hermitian splitting methods for positive definite linear systems [J]. Comput Math Appl, 2007, 54(1):147 −159.

(责任编辑:王彦江)

An Improved Parametric Algorithm for Solving Time − Harmonic Eddy Current Problems

WEI Jiangchao, MA Changfeng

(School of Mathematics and Informatics, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350117, China)

Abstract: For time − harmonic eddy current problem, these authors improve the preconditioned block alternating splitting implicit (PBASI) iteration method, introducing a new parameter, called double parameters preconditioned block alternating splitting implicit (DPPBASI) iterative method, and the convergence analysis of the new iteration method is given, and gives the simple topology calculation format and the general topology calculation format.

Key words: time − harmonic eddy current problem, double parameters, simple topology, general topology, convergence analysis