带有变系数的二阶脉冲微分方程的正解

李海艳
(成都锦城学院 通识教育学院,四川 成都 611731)

摘　　要:研究了一类非线性项与一阶导数有关,且带有变系数 $h(t)$ 的二阶脉冲微分方程的边值问题,通过构造一个特殊的锥,利用锥上的不动点指数理论获得该问题正解的存在性定理.

关　键　词:正解;边值问题;不动点指数
中图分类号:O175.14　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-1670(2021)05-0001-08

0　引言

脉冲微分方程是数学领域的一个重要分支. 有关非线性脉冲微分方程边值问题解的问题,很多学者对其进行了研究[1],这些文献中涉及的方法很多,包括上下解方法、单调迭代技术、锥上的不动点定理、Leray-Schaudar 原理等. 此外,二阶脉冲微分方程的边值问题已经被广为研究[2],但在这些文章中,作者总是假设非线性项 f 与一阶导数 $x'(t)$ 无关,或者非线性方程中不含 $h(t)$.

笔者讨论了如下边值问题(BVP):

$$\left.\begin{aligned}&-x''=h(t)f(t,x(t),x'(t)),\qquad t\neq t_k;\\&\Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)),\qquad k=1,2,\cdots,m;\\&\Delta x'|_{t=t_k}=I_k^*(x'(t_k)),\qquad k=1,2,\cdots,m;\\&x(0)=0,x(1)=\alpha x(\eta).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中:$h\in L^1[0,1]$,$h(t)>0$;$f\in C(J\times R^+\times R^+,R^+)$;$\eta\in(0,1)$;$0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$;$I_k,I_k^*\in C[R^+,R^+]$. $J=[0,1]$,$J'=J\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$,$0<t_1<t_2<\cdots<t_m<1$. $\Delta x|_{t=t_k}=x(t_k^+)-x(t_k^-)$,$\Delta x'|_{t=t_k}=x'(t_k^+)-x'(t_k^-)$,$k=1,2,\cdots,m$. $x(t_k^+)$、$x(t_k^-)$ 分别表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限和左极限,$x'(t_k^+)$、$x'(t_k^-)$ 分别表示 $x'(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限和左极限.

笔者讨论了一类二阶脉冲微分方程的三点边值问题,利用不动点指数理论获得该问题正解的存在性定理,建立了一些该问题存在正解的充分条件.

1　预备知识

为了方便,笔者列出一些定义、注解和已知的结论.

令 $J_0=[t_0,t_1]$,$J_k=(t_k,t_{k+1}]$,$k=1,2,\cdots,m$,$t_0=0$,$t_{m+1}=1$. $PC[J,R]=\{x:J\to R\mid x(t)$,当 $t\neq t_k$ 时连续,$x(t_k^+)$,$x(t_k^-)$ 存在,且 $x(t_k^-)=x(t_k)$,$k=1,2,\cdots,m\}$,$PC^1[J,R]=\{x\in PC[J,R]\mid x'(t)$,当 $t\neq t_k$ 时连续,$x'(t_k^+)$,$x'(t_k^-)$ 存在,且 $x'(t_k^-)=x'(t_k)$,$k=1,2,\cdots,m\}$. 引入范数

$$\|x\|_{PC}=\sup_{t\in J}|x(t)|,\ \|x\|=\max\{\|x\|_{PC},\|x'\|_{PC}\}.$$

显然,$PC[J,R]$ 在 $\|\cdot\|_{PC}$ 下构成一个 Banach 空间,$PC^1[J,R]$ 在 $\|\cdot\|$ 下构成一个 banach 空间.

收稿日期:2021-07-26
作者简介:李海艳(1983—　),女,陕西省宝鸡市人,理学硕士,成都锦城学院通识教育学院副教授,主要从事非线性泛函分析研究.

记 $PW[J,R]=\{x\in PC[J,R]\mid x'(t)$ 在每个区间 J_k 的任意子集上绝对连续,$k=1,2,\cdots,m\}$.

定义 1 x 称为 BVP(1) 的一个正解,若 $x\in PW[J,R]$,$x(t)>0$,$t\in J$,且满足(1).

引理 1[3] $H\subset PC^1[J,R]$ 是相对紧集的充分必要条件为 H 中的诸函数 $x(t)$ 及其导函数 $x'(t)$ 都在 J 上一致有界且在每个 $J_k(k=1,2,\cdots,m)$ 上等度连续.

引理 2[4] 设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥,对 $\rho>0$,定义 $\Omega_\rho=\{x\in P\mid \|x\|<\rho\}$,假设 $T:\overline{\Omega_\rho}\to P$ 是全连续算子,且有 $x\neq Tx$,对 $\forall x\in\partial\Omega_\rho$.

1) 如果 $\|x\|\leqslant\|Tx\|$,对 $x\in\partial\Omega_\rho$,那么 $i(T,\Omega_\rho,P)=0$;

2) 如果 $\|x\|\geqslant\|Tx\|$,对 $x\in\partial\Omega_\rho$,那么 $i(T,\Omega_\rho,P)=1$.

引理 3 设 $x\in PW[J,R]$ 满足:

$$-x''=f(t,x(t),x'(t)),\quad t\in J';$$

$$x'(t)=x'(0)-\int_0^t f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}(x'(t_k^+)-x'(t_k)),\forall t\in J.$$

则

$$x(t)=x(0)+x'(0)t-\int_0^t(t-s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}(x(t_k^+)-x(t_k))+$$
$$\sum_{0<t_k<t}(t-t_k)(x'(t_k^+)-x'(t_k)),\forall t\in J.$$

引理 4 设 $x\in PW[J,R]$ 是 BVP(1) 的解,当且仅当 $x\in PC^1[J,R]$ 是下面脉冲积分方程的解.

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s+\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k))+(\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))]+$$
$$\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k))+(t-t_k)I_k^*(x'(t_k))]-\frac{t}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^m[I_k(x(t_k))+(1-t_k)I_k^*(x'(t_k))],\forall t\in J.$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{s}{1-\alpha\eta}(1-t-\alpha\eta+\alpha t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,s\leqslant\eta;\\ \dfrac{t}{1-\alpha\eta}(1-s-\alpha\eta+\alpha s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{1-\alpha\eta}(s-st+\alpha\eta t-\alpha\eta s), & 0\leqslant\eta\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ \dfrac{t}{1-\alpha\eta}(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\eta\leqslant s.\end{cases}$$

经计算可得:

$$0\leqslant G(t,s)\leqslant a_1 s(1-s),0\leqslant G'_t(t,s)\leqslant\frac{1-s}{1-\alpha\eta},(t,s)\in[0,1]\times[0,1];$$

$$a_2 s(1-s)\leqslant G(t,s),(t,s)\in[\eta,1]\times[0,1].$$

其中 $a_1=\dfrac{\max\{1,\alpha\}}{1-\alpha\eta}>0,a_2=\dfrac{\min\{1-\eta,\eta\}\cdot\min\{1,\alpha\}}{1-\alpha\eta}>0$.

引理 5[5] 令 $0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$,如果 $f\in C(J\times R^+\times R^+)$,$t\in J$,那么 BVP(1) 的唯一解 x 满足 $\min\limits_{t\in[\eta,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|$,$\min\limits_{t\in[\eta,1]}x'(t)\geqslant\gamma\|x'\|$,其中 $\gamma=\min\left\{\alpha\eta,\dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta},\eta\right\}$.

由于 $x:J\to R^+$,$x''(t)=-h(t)f(t,x(t),x'(t))\leqslant 0$,可知 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的. 令 $K=\{x\in P\mid x$ 是凹的且 $\min\limits_{t\in[\eta,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|$,$\min\limits_{t\in[\eta,1]}x'(t)\geqslant\gamma\|x'\|\}$,其中 γ 如上所给. 显然 P 是 E 上的一个锥,K 是 P

的一个子集. 令 $K_r = \{x \in PC^1[J,R] \mid \|x\| < r\}, r > 0$.

定义算子 $T: P \to K$,

$$(Tx)(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k)) + (t - t_k)I_k^*(x'(t_k))] - \frac{t}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1 - t_k)I_k^*(x'(t_k))].$$

笔者给出下面的假设:

(H_1) 假设对任意的 $r, r' > 0$,存在 $\phi(t) \in L^\infty[0,1]$,使得 $f(\cdot, x_1, x_2) \leqslant l\phi(t)$,其中 $(x_1, x_2) \in [0,r] \times [0,r']$, $l = \max\{r, r'\}$, $t \in [0,1]$.

(H_2) 假设存在 $M > 0$,使得 $\int_0^1 h(s)\phi(s)\mathrm{d}s \leqslant M$, I_k、$I_k^* \geqslant \theta$,我们有

$$\frac{2-\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1 - t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] \leqslant \beta_1\|x\|,$$

$$\frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (2 - \alpha\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] \leqslant \beta_2\|x\|.$$

其中, $\lambda > 0$ 为一常数,

$$\beta_1 = 1 - \frac{a_1}{4}\left(2\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + M\right) > 0, \beta_2 = 1 - \frac{1}{1-\alpha\eta}\left(2\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + M\right) > 0.$$

(H_3) 假设存在常数 l_0 和 b,其中

$$0 < b < \min\left\{\frac{2a_2\lambda\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s}{1-l_0}, \frac{2\lambda\int_0^1 G_t'(t,s)h(s)\mathrm{d}s}{1-l_0}\right\},$$

使得

$$\frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] + \sum_{0<t_k<t}I_k^*(x'(t_k)) -$$

$$\frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1 - t_k)I_k^*(x'(t_k))] \geqslant l_0\|x\|.$$

为了方便,记

$$\bar{f}(x,y) = \sup_J f(t,x,y), \underline{f}(x,y) = \inf_J f(t,x,y).$$

(H_4) $f^\infty = \max\left\{\limsup_{x\to+\infty}\left\{\sup_{y\in R^+}\frac{\bar{f}(x,y)}{\|x\| + \|y\|}\right\}, \limsup_{y\to+\infty}\left\{\sup_{x\in R^+}\frac{\bar{f}(x,y)}{\|x\| + \|y\|}\right\}\right\} < \lambda$.

(H_5) $f_{c,0} = \min\left\{\liminf_{x\to0^+}\left\{\inf_{y\in[0,c]}\frac{\underline{f}(x,y)}{\|x\| + \|y\|}\right\}, \liminf_{y\to0^+}\left\{\inf_{x\in[0,c]}\frac{\underline{f}(x,y)}{\|x\| + \|y\|}\right\}\right\} > \frac{\lambda}{b}$.

其中 $c > 0$, $J = [0,1]$.

引理 6　假设(H_1)、(H_2) 成立,那么 $T: P \to K$ 是全连续算子,且 T 在 P 中的不动点是 BVP(1) 的一个正解.

证明　很容易验证 $(Tx)''(t) \leqslant 0$,所以 Tx 是非负、凹的.

第一步,证明对任意的 $x \in P$, $Tx \in K$.

若 $0 < \alpha < 1$,根据引理 4 及 T 的定义,由 $(Tx)(\eta) = x(\eta)$, $\alpha x(\eta) = x(1)$,以及 $(Tx)(1) = x(1)$,

所以$(Tx)(\eta) \geqslant (Tx)(1)$.

令$(Tx)(\bar{t}) = (Tx)(1)$,若$\bar{t} \leqslant \eta < 1$,则$\min\limits_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(1)$,且

$$(Tx)(\bar{t}) \leqslant (Tx)(1) + \frac{(Tx)(1) - (Tx)(\eta)}{1-\eta}(0-1) = \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}(Tx)(1).$$

即$(Tx)(1) \geqslant \dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(Tx)(\bar{t})$. 所以

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) \geqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\|Tx\|. \tag{2}$$

若$\eta < \bar{t} < 1$,则$\min\limits_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(1)$. 由 Tx 的凹性,有

$$\frac{(Tx)(\eta)}{\eta} \geqslant \frac{(Tx)(\bar{t})}{\bar{t}}.$$

所以,由$\alpha(Tx)(\eta) = (Tx)(1)$,得

$$\frac{(Tx)(1)}{\alpha\eta} \geqslant \frac{(Tx)(\bar{t})}{\bar{t}} \geqslant (Tx)(\bar{t}) = \|Tx\|,$$

即

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) \geqslant \alpha\eta\|Tx\|. \tag{3}$$

若$1 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{\eta}$,易得$(Tx)(\eta) = \dfrac{1}{\alpha}x(1) \leqslant (Tx)(1)$. 所以,可选取$\eta \leqslant \bar{t} \leqslant 1$,使得$(Tx)(\bar{t}) = \|Tx\|$. 否则,若$\bar{t} \in [0,\eta]$,那么有

$$(Tx)(\eta) \leqslant \frac{(Tx)(1) - (Tx)(\eta)}{1-\eta}(\bar{t}-\eta) + (Tx)(t) = \frac{\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)(\bar{t}-\eta)}{1-\eta}(Tx)(1) + (Tx)(t).$$

这与 Tx 的凹性矛盾. 所以由$(Tx)(\eta) \leqslant (Tx)(1)$ 及 Tx 的凹性知

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(\eta), \frac{(Tx)(\eta)}{\eta} \geqslant \frac{(Tx)(\bar{t})}{\bar{t}} \geqslant (Tx)(\bar{t}) = \|Tx\|.$$

这表明

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) \geqslant \eta\|Tx\|. \tag{4}$$

由式(2) ~ 式(4) 可知

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) \geqslant \gamma\|Tx\|, \gamma = \min\left\{\alpha\eta, \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}, \eta\right\}.$$

接下来证明

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)'(t) \geqslant \gamma\|Tx'\|.$$

因为

$$(Tx)'(t) = \int_0^1 G_t'(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\sum_{0<t_k<t}[I_k^*(x'(t_k)) - \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] \geqslant \gamma(Tx)'(1).$$

所以

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)'(t) \geqslant \gamma\|(Tx)'\|.$$

综上可知,$T: P \to K$. 显然,如果x是T在P中的不动点,则x满足 BVP(1) 且是 BVP(1) 的一个正解.

第二步,证明 T 是全连续算子.

先证明 T 一致有界,假设 S 是 D 中的绝对有界集,即对任意的 $x \in S$,

$$|(Tx)(t)| \leqslant \int_0^1 |G(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))|\,\mathrm{d}s + \left|\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] + \right.$$

$$\left.\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k)) + (t-t_k)I_k^*(x'(t_k))] - \frac{t}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))]\right| \leqslant$$

$$a_1 l\int_0^1 s(1-s)h(s)\phi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{2-\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] \leqslant \frac{a_1}{4}lM + \beta_1\|x\| =: C_1.$$

$$|(Tx)'(t)| \leqslant \int_0^1 |G_t'(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))|\,\mathrm{d}s + \left|\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + \right.$$

$$\left.(\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] + \sum_{0<t_k<t}I_k^*(x'(t_k)) - \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))]\right| \leqslant$$

$$\frac{l}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)\phi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (2-\alpha\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] \leqslant \frac{Ml}{1-\alpha\eta} + \beta_2\|x\| =: C_2.$$

所以,$T(S)$ 中的诸函数及其导函数均在 J 上一致有界.

第三步,证明 T 在每个 $J_k(k = 0,1,2,\cdots,m)$ 上等度连续.

$\forall\varepsilon > 0$,令 t'、$t'' \in J_k, k = 0,1,2,\cdots,m, t' \leqslant t''$,且 $|t'' - t'| < \dfrac{\varepsilon}{2\beta_2 l}$,$(x,y) \in [0,r]\times[0,r']$,由于 $G(t,s)$ 在 J 上一致连续,所以恒有

$$|G(t'',s) - G(t',s)| < \frac{\varepsilon}{2Ml}.$$

于是有

$$|(Tx)(t'') - (Tx)(t')| \leqslant \int_0^1 |G(t'',s) - G(t',s)|\cdot|h(s)f(s,x(s),x'(s))|\,\mathrm{d}s +$$

$$|t'' - t'|\cdot\left|\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta - t_k)I_k^*(x'(t_k))] + \right.$$

$$\left.\sum_{0<t_k<t}I_k^*(x'(t_k)) - \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))]\right| \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{2M}\int_0^1 h(s)f(s,x(s),x'(s))\,\mathrm{d}s + |t'' - t'|\beta_2 l < \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2\beta_2 l}\beta_2 l = \varepsilon.$$

所以 Tx 在每个 $J_k(k = 0,1,2,\cdots,m)$ 上等度连续.

由引理 1,$T(S)$ 是相对紧集,又结合(H_1)、(H_2),易知 Tx 连续,故 $T: P \to K$ 是全连续算子.

综上可知,T 在 P 中的不动点是 BVP(1) 的一个正解. 证毕.

因此,由引理 6 的证明可知,$T(K) \subset K$.

2　主要结果

命题 1　假设(H_2)、(H_4) 成立,则存在 $r_0 > 0$,使得

$$i(T, K_r \cap K, K) = 1, \forall r > r_0.$$

证明　由(H_4) 可知,存在 $r_0 > 0$,满足 $f(t,x,y) \leqslant \lambda(\|x\| + \|y\|)$,$x > r_0$ 或 $y > r_0$,$t \in J$.

又由(H_2) 知,对 $r_0 > 0$,存在 $\phi(t) \in L^\infty[0,1]$,使得

$$f(t,x,y) \leqslant l\phi(t), x,y \in [0,r_0], t \in J.$$

因此对所有的 x、$y \in R^+$, $t \in J$,

$$f(t,x,y) \leqslant \lambda(\|x\| + \|y\|) + l\phi(t).$$

所以,令 $x \in K_r$,使 $\|x\| = r > r_0$,

$$(Tx)(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{2-\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] \leqslant \frac{a_1}{4}\left[2\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\|x\| + l\int_0^1 h(s)\phi(s)\mathrm{d}s\right] + \beta_1\|x\| =$$

$$\left(\frac{\lambda a_1}{2}\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + \frac{a_1 M}{4} + \beta_1\right)\|x\| \leqslant \|x\|.$$

$$|(Tx)'(t)| \leqslant \int_0^1 |G_t'(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))|\mathrm{d}s + \left|\frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) +\right.$$

$$\left.(2-\alpha\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] + \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))]\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha\eta}\left[2\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\|x\| + l\int_0^1 h(s)\phi(s)\mathrm{d}s\right] + \beta_2\|x\| =$$

$$\left[\frac{1}{1-\alpha\eta}(2\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + M) + \beta_2\right]\|x\| \leqslant \|x\|.$$

所以

$$\|Tx\| \leqslant \|x\|, \forall x \in \partial K_r \cap K.$$

由引理 2 中的 2), $i(T,K_r \cap K,K) = 1$. 证毕.

命题 2 假设存在 $c > 0$,有(H_3)、(H_5)成立,那么存在 $0 < r_1 \leqslant c$,使得对 $\rho \in (0,r_1]$,如果 $x \neq Tx$, $x \in \partial K_\rho \cap K$,则 $i(T,K_\rho \cap K,K) = 0$.

证明 由(H_5)知,存在 $0 < r_1 \leqslant c$ 使得

$$f(t,x,y) \geqslant \frac{\lambda}{b}(\|x\| + \|y\|), x,y \in [0,r_1], t \in J.$$

取 $x \in K_\rho$,使得 $\|x\| = \rho$,所以 $x \in \partial K_\rho \cap K$.

由 $(Tx)''(t) \leqslant 0$, $\forall t \in J$,有两种情形:

1) $\min\limits_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(1)$, $0 < \alpha < 1$;

2) $\min\limits_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(\eta)$, $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$.

对第一种情形,

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(1) =$$

$$\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] - \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] \geqslant$$

$$2a_2\frac{\lambda}{b}\rho\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s + l_0\|x\| \geqslant (1-l_0)\rho + l_0\|x\| = \|x\|,$$

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)'(t) = (Tx)'(1) =$$

$$\int_0^1 G_t'(t,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\sum_{0<t_k<t}I_k^*(x'(t_k)) - \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^{m}[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] \geqslant$$

$$2\frac{\lambda}{b}\rho\int_0^1 G_t'(t,s)h(s)\mathrm{d}s + l_0\|x\| \geqslant (1-l_0)\rho + l_0\|x\| = \|x\|.$$

对第二种情形,

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)(t) = (Tx)(\eta) =$$

$$\int_0^1 G(\eta,s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] - \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^m[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] \geqslant$$

$$2\frac{a_2}{b}\lambda\rho\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s + l_0\|x\| \geqslant (1-l_0)\rho + l_0\|x\| = \|x\|,$$

$$\min_{t\in[\eta,1]}(Tx)'(t) = (Tx)'(\eta) =$$

$$\int_0^1 G_t'(t,s)\mid_{t=\eta}h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\sum_{0<t_k<\eta}[I_k(x(t_k)) + (\eta-t_k)I_k^*(x'(t_k))] +$$

$$\sum_{0<t_k<t}I_k^*(x'(t_k)) - \frac{1}{1-\alpha\eta}\sum_{k=1}^m[I_k(x(t_k)) + (1-t_k)I_k^*(x'(t_k))] \geqslant$$

$$2\frac{\lambda}{b}\rho\int_0^1 G_t'(t,s)h(s)\mathrm{d}s + l_0\|x\| \geqslant (1-l_0)\rho + l_0\|x\| = \|x\|.$$

所以

$$\|Tx\| \geqslant \|x\|, \forall x \in \partial K_\rho \cap K.$$

由引理 2 中的 1),$i(T,K_\rho\cap K,K) = 0$. 证毕.

下面的定理是本文的主要结果.

定理 1　假设存在 $c>0$,有$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_5)$成立,那么 BVP(1) 至少有一个正解.

证明　由(H_4)和命题 1 知,存在 $r>0$,使得 $i(T,K_r\cap K,K) = 1$. 由(H_5)和命题 2 知,存在 $0<\rho<\min\{r,c\}$,使得 $i(T,K_\rho\cap K,K) = 0$,所以

$$i(T,K_r\cap K\backslash(\overline{K_\rho}\cap K),K) = i(T,K_r\cap K,K) - i(T,K_\rho\cap K,K) = 1.$$

所以 BVP(1) 至少有一个正解. 证毕.

定理 2　假设$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$、$(\mathrm{H}_6)$成立,此外,假定存在 $\rho_2>0$,使得

$$f(t,x,y) \leqslant m_0\rho_2, x,y\in[0,\rho_2], t\in J.$$

其中

$$m_0 = \frac{2\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + M}{\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s}.$$

则 BVP(1) 至少有一个正解.

证明　对 $x\in\partial K_{\rho_2}$,使得 $\|x\|\in\rho_2$,由命题 1 的证明,

$$(Tx)(t) \leqslant a_1\int_0^1 s(1-s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \beta_1\|x\| \leqslant \frac{a_1m_0\rho_2}{4}\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + \beta_1\|x\| =$$

$$\left(\frac{m_0a_1}{4}\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + \beta_1\right)\|x\| = \|x\|,$$

$$(Tx)'(t) \leqslant \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)h(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s + \beta_2\|x\| \leqslant \frac{m_0\rho_2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s + \beta_2\|x\| \leqslant$$

$$\left(\frac{m_0}{1-\alpha\eta}\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s + \beta_2\right)\|x\| \leqslant \|x\|.$$

所以

$$\| Tx \| \leqslant \| x \| , \forall x \in \partial K_{\rho_2} \cap K .$$

由引理 2 中的 2) 可知, $i(T, K_{\rho_2} \cap K, K) = 1$.

再由(H_5)和命题2知,存在$0 < \rho < \min\{c, \rho_2\}$,使得$i(T, K_\rho \cap K, K) = 0$. 根据不动点指数的性质,有

$$i(T, K_{\rho_2} \cap K \backslash (\overline{K_\rho} \cap K), K) = 1 .$$

所以,T 在 $K_{\rho_2} \cap K \backslash (\overline{K_\rho} \cap K)$ 中至少有一个不动点,即 BVP(1)至少有一个正解. 证毕.

参考文献:

[1]张贵来,张玲. 非线性脉冲微分方程 Runge-Kutta 方法的渐近稳定性(英文)[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2018,35(4):424 – 432.

[2]阴少辉. 一类带 σ 边值条件的脉冲微分方程解的存在性[J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版),2018,36(5):39 – 44.

[3]郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南:山东科学技术出版社,2000.

[4]郭大钧,孙经先,刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 2 版. 济南:山东科学技术出版社,2005:6 – 10.

[5] JANKOWSKI T. Positive solutions of three-point boundary value problems for second order impulsive differential equations with advanced arguments[J]. Appl Math Comput,2008,197(1):179 – 189.

(责任编辑:王彦江)

Study on the Positive Solution of Second-order Impulsive Differential Equation with Variable Coefficients

LI Haiyan

(School of General Education, Chengdu Jincheng College, Chengdu, Sichuan 611731, China)

Abstract: This study explores the boundary value problem of second-order differential equations with variable coefficient $h(t)$, where the nonlinear term f is related to the first derivative. By constructing a special cone and applying the fixed point index theory on the cone, the study obtains the existence theorem of the positive solution of the problem.

Key words: positive solutions; boundary value problem; fixed point index