带有退化、拒绝和不可用区间的恒速机排序问题

富晓双[1],赵玉芳[1],田　野[2]
(1. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院,辽宁 沈阳 110034;2. 北京市第五中学通州校区,北京 101100)

摘　　要:考虑带有退化工件、拒绝和不可用区间的两台恒速机排序问题,其中第一台机器上有一个固定的不可用区间,每个工件的加工时间是它开始加工时间的简单的线性递增函数,一个工件可以通过支付惩罚而被拒绝. 目标是极小化接受工件的总完工时间与被拒绝工件的总惩罚之和. 对于这个 NP-难问题,提出了一个全多项式近似策略(FPTAS).

关　键　词:恒速机;退化;拒绝;不可用区间

中图分类号:O223;O224　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1673 - 1670(2021)05 - 0009 - 10

0　引言

在大多数经典的排序问题中,假设工件的加工时间是常数. 然而,在实际的生产过程中,当机器连续加工工件时,可能会出现退化现象,即工件在排序中的开始加工时间越晚,它的实际加工时间越长,例如钢铁生产、消防、资源分配等. Jatinder N. D. Gupta 和 Sushil K. Gupta[1],Browne 和 Yechiali[2]分别提出了退化工件的概念,工件 j 的实际加工时间为 a_j+b_jt,$b_j>0$,a_j 是工件 j 的基本加工时间,b_j 是退化率,t 是工件 j 的开始加工时间,对于最大完工时间的问题,他们证明了工件按 a_j/b_j 不减顺序排序可以得到最优解. Mosheiov[3]研究了带有简单线性退化的单机排序问题,工件 j 的实际加工时间为 $p_j=\alpha_jt$,α_j 是退化率,$t>0$ 是工件 j 的开始加工时间,目标函数分别为最大完工时间、流程时间、总延误、延误工件数等,证明了这些问题都是多项式时间可解的. Bachman 等[4]研究了带有退化工件的单机排序问题,目标为极小化总加权完工时间,证明了这个问题是 NP-难的. 王吉波等[5]研究了具有恶化效应和可控加工时间的单机排序问题,目标是确定工件的最优排序、最优资源分配和共同工期(松弛工期),使所有工件的排序费用(包括提前时间、延误时间、共同工期(松弛工期))和资源的消耗费用的线性加权和最小,证明了此问题可以在多项式时间内求解. Ji 和 Cheng[6]研究了带有退化工件的平行机排序问题,目标为极小化总完工时间,对于这个 NP-难问题,提出了一个 FPTAS. 此后,带有退化工件的问题受到了越来越广泛的关注.

在大多数的排序问题中,通常假设所有工件都必须在机器上加工,然而在实际的生产过程中,由于资源有限或考虑经济效益,决策者可能会选择这些工件中的一个子集来加工,而可能对未被加工的工件产生一些惩罚,即拒绝惩罚. Bartal 等[7]首先提出了带有拒绝的排序问题,目标为极小化接受工件的最大完工时间与拒绝工件的总惩罚之和. 对于 m 台平行机的情况,考虑离线问题:当 m 固定时,提出了一个 FPTAS;当 m 任意时,提出了一个多项式时间近似策略(PTAS). Zhang 等[8]研究了带有拒绝的平行机排序问题,目标为极小化总加权完工时间与拒绝工件总惩罚之和,给出了一个伪多项式时间的动态规划算法和一个 FPTAS. Li 和 Yuan[9]讨论了带有退化工件和拒绝的同速机排序问题,含 3 个目标函数,分别为接受工件的最大完工时间与拒绝工件的总拒绝惩罚之和,接受工件的总加权完工时间与拒绝工件的总拒绝惩罚之和,

收稿日期:2020 - 12 - 21
作者简介:富晓双(1995—　),女,满族,辽宁省辽阳市人,沈阳师范大学数学与系统科学学院硕士研究生,主要从事组合最优化和随机运筹学研究.

以及接受工件的总完工时间与拒绝工件的总拒绝惩罚之和. 对于前两个目标,当机器的数量固定时,分别提出两个 FPTAS. 对于后一个目标,当所有工件的退化率相同时,提出了时间复杂性为 $O(n^2)$ 的动态规划算法. Wu 和 Luo[10] 研究了带有退化工件和拒绝的恒速机排序问题,其中工件的加工时间是它开始加工时间的简单的线性函数,目标是极小化接受工件的总完工时间与拒绝工件的总惩罚之和,给出了一个 FPTAS.

在经典的排序问题中,经常假设机器一直可用. 然而在许多实际情况中,由于机器发生故障或者维护期间无法加工工件,即产生了机器的不可用区间. Ji 等[11] 考虑了带有简单线性退化工件和不可用区间的单机排序问题,目标分别是极小化最大完工时间和总完工时间,证明了这两个问题都是 NP-难的,并且分别提出伪多项式时间最优算法. 此外,对于最大完工时间问题,提出一个 FPTAS;对于总完工时间问题,提出了一种启发式算法. Zhao 和 Tang[12] 研究了带有退化工件和不可用区间的平行机排序问题,目标是极小化总加权完工时间,提出了一个动态规划算法,对于其中一台机器上有一个不可用区间的特殊情况,给出了一个 FPTAS. 闫力君[13] 研究了带有退化工件、拒绝和不可用区间的两台同速机排序问题,其中工件的加工时间为开始加工时间的简单的线性递增函数,目标为极小化接受工件的总加权完工时间与拒绝工件的总惩罚之和,对于这个 NP-难问题,提出了一个 FPTAS.

笔者考虑带有退化工件、拒绝及第一台机器带有一个固定的不可用区间的两台恒速机排序问题,目标是极小化接受工件的总完工时间与拒绝工件的总拒绝惩罚之和. 对于这个 NP-难问题,给出了一个 FPTAS.

1 问题描述

有 n 个独立的工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 和两台恒速机,其中第 1 台机器上有一个固定的不可用区间 $[T_1,T_2]$,所有的工件在 t_0 时刻可以加工,这里假设 $t_0>0$,因为当 $t_0=0$ 时,每个工件的完工时间都为 0. 机器在同一时刻至多加工 1 个工件,1 个工件在同一时刻只能在一台机器上加工,且不允许中断. 工件 J_j 的实际加工时间为 $p_j=b_jt$,b_j 和 t 分别为工件 J_j 的退化率和开始加工时间. 每个工件或者被接受或者被拒绝,被接受的工件或者在第一台机器上加工(此时工件或者在 T_1 之前加工,或者在 T_2 之后加工),或者在第 2 台机器上加工,被拒绝的工件需要支付拒绝惩罚 e_j. 令 S 和 $\tilde{S}$ 分别表示接受工件集和拒绝工件集,M_i 表示第 i 台机器,s_i 为机器 M_i 的加工速度,不失一般性,设 $s_1=1$,$s_2=s$. 用三参数表示法表示为:

$$\mathrm{Q1},h_1/p_j=b_jt,r_j=t_0,\mathrm{rej}\Big|\sum\nolimits_S C_j+\sum\nolimits_{\tilde{S}} e_j.$$

2 修改目标函数

在排序 π 中,对于工件 J_j,在机器 M_1 上,令 $p^1_{[1,j]}$ 表示在 T_1 之前的加工时间,$C^1_{[1,j]}$ 是其对应的完工时间;$p^2_{[1,j]}$ 表示 T_2 之后的加工时间,$C^2_{[1,j]}$ 是其对应的完工时间;在机器 M_2 上,令 $p_{[2,j]}$ 表示工件 J_j 的加工时间,$C_{[2,j]}$ 表示其对应的完工时间. 则 $C^1_{[1,j]}$、$C^2_{[1,j]}$ 和 $C_{[2,j]}$ 可以表示如下:

1) 在机器 M_1 上不可用区间 T_1 之前工件的完工时间为:

$$C^1_{[1,1]}=t_0+p^1_{[1,1]}=t_0+b^1_{[1,1]}t_0=t_0(1+b^1_{[1,1]}),$$

$$C^1_{[1,2]}=C^1_{[1,1]}+p^1_{[1,2]}=t_0(1+b^1_{[1,1]})+b^1_{[1,2]}t_0(1+b^1_{[1,1]})=t_0\prod\nolimits_{h=1}^{2}(1+b^1_{[1,h]}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$C^1_{[1,j]}=C^1_{[1,j-1]}+p^1_{[1,j]}=C^1_{[1,j-1]}+b^1_{[1,j]}C^1_{[1,j-1]}=(1+b^1_{[1,j]})C^1_{[1,j-1]}=t_0\prod\nolimits_{h=1}^{j}(1+b^1_{[1,h]}),$$

$$\cdots\cdots$$

$C^1_{[1,I]} = t_0\prod_{h=1}^{I}(1+b^1_{[1,h]})$.

所以，$\sum_{j=1}^{I} C^1_{[1,j]} = \sum_{j=1}^{I} t_0\prod_{h=1}^{j}(1+b^1_{[1,h]})$.

2）在机器 M_1 上不可用区间 T_2 之后工件的完工时间为：

$C^2_{[1,1]} = T_2 + p^2_{[1,1]} = T_2 + b^2_{[1,1]}T_2 = T_2(1+b^2_{[1,1]})$,

$C^2_{[1,2]} = C^2_{[1,1]} + p^2_{[1,2]} = T_2(1+b^2_{[1,1]}) + b^2_{[1,2]}T_2(1+b^2_{[1,1]}) = T_2\prod_{h=1}^{2}(1+b^2_{[1,h]})$,

……

$C^2_{[1,j]} = C^2_{[1,j-1]} + p^2_{[1,j]} = C^2_{[1,j-1]} + b^2_{[1,j]}C^2_{[1,j-1]} = (1+b^2_{[1,j]})C^2_{[1,j-1]} = T_2\prod_{h=1}^{j}(1+b^2_{[1,h]})$,

……

$C^2_{[1,I]} = T_2\prod_{h=1}^{I}(1+b^2_{[1,h]})$.

故 $\sum_{j=1}^{I} C^2_{[1,j]} = \sum_{j=1}^{I} T_2\prod_{h=1}^{j}(1+b^2_{[1,h]})$.

3）在机器 M_2 上工件的完工时间为：

$C_{[2,1]} = t_0 + p_{[2,1]} = t_0 + b_{[2,1]}t_0/s = t_0(1+b_{[2,1]}/s)$,

$C_{[2,2]} = C_{[2,1]} + p_{[2,2]} = t_0(1+b_{[2,1]}/s) + b_{[2,2]}t_0(1+b_{[2,1]}/s)/s = t_0\prod_{h=1}^{2}(1+b_{[2,h]}/s)$,

……

$C_{[2,j]} = C_{[2,j-1]} + p_{[2,j]} = C_{[2,j-1]} + b_{[2,j]}C_{[2,j-1]} = (1+b_{[2,j]})C_{[2,j-1]} = t_0\prod_{h=1}^{j}(1+b_{[2,h]}/s)$,

……

$C_{[2,j]} = t_0\prod_{h=1}^{I}(1+b_{[2,h]}/s)$.

则 $\sum_{j=1}^{I} C_{[2,j]} = \sum_{j=1}^{I} t_0\prod_{h=1}^{j}(1+b_{[2,h]}/s)$.

由于过程划分需要使用非负整数函数，故首先修改目标函数，类似于文献[14]的方法，对于 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$，假设 t_0, T_2, b_j 为整数，而 $1+b_j/s$ 都是有限小数，存在整数 $k \in N^+$，使得 $10^k(1+b_j/s) \in N^+$ 及 $10^k e_j \in N^+$. 故 $10^{nk}\sum_{j=1}^{I} C^1_{[1,j]}$，$10^{nk}\sum_{j=1}^{I} C^2_{[1,j]}$，$10^{nk}\sum_{j=1}^{I} C_{[2,j]}$ 和 $10^{nk}e_j$ 可以被证明是整数. 定义 $K = 10^{nk}$，目标函数可以表示为 $K(\sum_S C_j + \sum_{\bar{S}} e_j)$. 现在考虑的问题可以表示为：

$$Q2, h_1/p_j = b_j t, r_j = t_0, \mathrm{rej} \left| K(\sum_S C_j + \sum_{\bar{S}} e_j)\right. . \tag{1}$$

3　FPTAS

Ji 和 Cheng[6] 说明了 $Pm \mid p_j = \alpha_j s_j, r_j = t_0 \left| \sum C_j \right.$ 是 NP-难的，因此问题(1)至少是 NP-难的. 当不考虑拒绝时，对于 $Pm \mid p_j = \alpha_j s_j, r_j = t_0 \left| \sum C_j \right.$，每台机器上的工件按 $\{\alpha_j\}$ 不减顺序排序是最优的. 因此有以下引理：

引理 1　对于问题 $Q2, h_1 \mid p_j = b_j t, r_j = t_0, \mathrm{rej} \left| K(\sum_S C_j + \sum_{\bar{S}} e_j)\right.$，存在一个最优排序，即在不可用区间前、后，及第 2 台机器上，分别按 b_j 不减的顺序排序.

下面介绍变量 $x_j(j = 1,2,\cdots,n)$，如果工件 J_j 在机器 M_1 的 T_1 之前加工，令 $x_j = 1$；如果工件 J_j 在机器 M_1 的 T_2 之后加工，令 $x_j = 2$；如果工件 J_j 在机器 M_2 上加工，令 $x_j = 3$；如果工件 J_j 被拒绝，令 $x_j = 0$. 令 X

为所有向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合,其中 $x_j\in\{0,1,2,3\}$,$j=1,2,\cdots,n$,下面定义 X 上的初始和递归函数:

$$C_0^1(x)=t_0,C_0^2(x)=T_2,C_0^3(x)=t_0,g_0(x)=0,f_0(x)=0.$$

如果 $C_j^1(x)\leqslant T_1$,则工件 J_j 可以排在机器 M_1 的 T_1 之前加工,可以排在机器 M_1 的 T_2 之后加工,也可以排在机器 M_2 上加工. 因此有:

$$\begin{aligned}
&C_j^i(x)=(1+b_j)C_{j-1}^i(x), && x_j=i,i=1,2;\\
&C_j^I(x)=C_{j-1}^I(x), && x_j=I,I\neq i;\\
&C_j^3(x)=(1+b_j/s)C_{j-1}^3(x), && x_j=3;\\
&C_j^3(x)=C_{j-1}^3(x), && x_j\neq 3;\\
&f_j(x)=10^k f_{j-1}(x)+10^{jk}C_j^i(x), && x_j=i,i=1,2,3;\\
&f_j(x)=10^k f_{j-1}(x), && x_j=I,I\neq i.
\end{aligned}$$

如果 $C_j^1(x)>T_1$,则工件 J_j 只可以排在机器 M_1 的 T_2 之后加工,或排在机器 M_2 上加工. 所以有:

$$\begin{aligned}
&C_j^2(x)=(1+b_j)C_{j-1}^2(x), && x_j=2;\\
&C_j^2(x)=C_{j-1}^2(x), && x_j\neq 2;\\
&C_j^3(x)=(1+b_j/s)C_{j-1}^3(x), && x_j=3;\\
&C_j^3(x)=C_{j-1}^3(x), && x_j\neq 3;\\
&f_j(x)=10^k f_{j-1}(x)+10^{jk}C_j^i(x), && x_j=i,i=2,3;\\
&f_j(x)=10^k f_{j-1}(x), && x_j=I,I\neq i.
\end{aligned}$$

如果工件 J_j 被拒绝,则有:

$$\begin{aligned}
&g_j(x)=10^{jk}g_{j-1}(x)+10^{jk}e_j,x_j=0;\\
&g_j(x)=10^k g_{j-1}(x),x_j\neq 0.
\end{aligned}$$

故目标函数可表示为 $F(x)=g_n(x)+f_n(x)$. 其中 $C_j^1(x)$ 和 $C_j^2(x)$ 分别表示 $J_1,J_2,\cdots,J_j$ 中在机器 M_1 上排在 T_1 之前和 T_2 之后加工的工件的完工时间,$C_j^3(x)$ 表示 $J_1,J_2,\cdots,J_j$ 中排在机器 M_2 上加工的工件的完工时间,$f_j(x)$ 表示 $J_1,J_2,\cdots,J_j$ 中接受工件的总完工时间,$g_j(x)$ 表示 $J_1,J_2,\cdots,J_j$ 中被拒绝工件的总惩罚. 因此,问题(1) 可以写成

$$\min\{F(x)\mid x\in X\}.$$

下面介绍由 Kovalyov 和 Kubiak[15] 给出的过程划分(A,h,δ),$A\subseteq X$,$h(x)$ 是 X 上的一个非负整数函数,且 $0<\delta\leqslant 1$,下面的描述给出划分(A,h,δ) 的细节.

过程划分(A,h,δ):

按 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(|A|)}$ 顺序排列 A 中的工件满足 $0\leqslant h(x^{(1)})\leqslant h(x^{(2)})\leqslant\cdots\leqslant h(x^{(|A|)})$,分配向量 $x^{(1)}$, $x^{(2)},\cdots,x^{(i_1)}$ 到集合 A_1^h 中,直到某一 i_1 被发现满足 $h(x^{(i_1)})\leqslant(1+\delta)h(x^{(1)})$,$h(x^{(i_1+1)})>(1+\delta)h(x^{(1)})$,如果这样的 i_1 不存在,那么令 $A_1^h=A$ 且停止. 分配向量 $x^{(i_1+1)},x^{(i_1+2)},\cdots,x^{(i_2)}$ 到集合 A_2^h 中,直到某一 i_2 被发现满足 $h(x^{(i_2)})\leqslant(1+\delta)h(x^{(i_1+1)})$,$h(x^{(i_2+1)})>(1+\delta)h(x^{(i_1+1)})$,如果这样的 i_2 不存在,那么令 $A_2^h=A\backslash A_1^h$ 且停止. 继续以上构造,直到存在某一 k_h,使得 $x^{(|A|)}$ 包含在 $A_{k_h}^h$ 内.

以上过程划分(A,h,δ) 需要 $O(|A|\log|A|)$时间,下面的过程划分(A,h,δ) 的主要性质将在 FPTAS 中使用.

引理 2[15]　$|h(x)-h(x')| \leqslant \delta \min\{h(x), h(x')\}$，对于任意 $x, x' \in A_j^h, j=1,2,\cdots,k_h$.

引理 3[15]　$k_h \leqslant \log h(x^{|A|})/\delta + 2$，这里 $h(x^{|A|}) \geqslant 1, 0 < \delta \leqslant 1$.

引理 4　$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant 1+2x$，对于任意 $0 < x \leqslant 1, n \in Z^+$.

对于问题(1)的 FPTAS 的正式描述在下面给出.

算法 A_ε：

步骤一(初始化)　按$\{b_j\}$不减的顺序排序工件，令 $Y_0=\{(0,0,\cdots,0)\}, C_0^i=0, f_0=0, g_0=0, i=1,2,3, j=1$.

步骤二(产生集合 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$)　对集合 Y_{j-1} 中的每个向量的第 j 个分量添加 $k(k=0,1,2,3)$，产生新的 4 个向量，来组成新的向量集 Y_j'，对于每个 $x \in Y_j'$，计算如下：

如果 $C_j^1(x) \leqslant T_1$，则：

$$
\begin{aligned}
C_j^i(x) &= (1+b_j)C_{j-1}^i(x), & x_j &= i, i=1,2;\\
C_j^I(x) &= C_{j-1}^I(x), & x_j &= I, I \neq i;\\
C_j^3(x) &= (1+b_j/s)C_{j-1}^3(x), & x_j &= 3;\\
C_j^3(x) &= C_{j-1}^3(x), & x_j &\neq 3;\\
f_j(x) &= 10^k f_{j-1}(x) + 10^{jk} C_j^i(x), & x_j &= i, i=1,2,3;\\
f_j(x) &= 10^k f_{j-1}(x), & x_j &= I, I \neq i.
\end{aligned}
$$

如果 $C_j^1(x) > T_1$，则：

$$
\begin{aligned}
C_j^2(x) &= (1+b_j)C_{j-1}^2(x), & x_j &= 2;\\
C_j^2(x) &= C_{j-1}^2(x), & x_j &\neq 2;\\
C_j^3(x) &= (1+b_j/s)C_{j-1}^3(x), & x_j &= 3;\\
C_j^3(x) &= C_{j-1}^3(x), & x_j &\neq 3;\\
f_j(x) &= 10^k f_{j-1}(x) + 10^{jk} C_j^i(x), & x_j &= i, i=2,3;\\
f_j(x) &= 10^k f_{j-1}(x), & x_j &= I, I \neq i;\\
g_j(x) &= 10^k g_{j-1}(x) + 10^{jk} e_j, & x_j &= 0;\\
g_j(x) &= 10^k g_{j-1}(x), & x_j &\neq 0;\\
F(x) &= g_n(x) + f_n(x).
\end{aligned}
$$

如果 $j=n$，那么令 $Y_n=Y_n'$，并且转到步骤三.

如果 $j<n$，令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}$.

将集合 Y_j' 分割成不相交的子集 $Y_1^{Ci}, Y_2^{Ci}, \cdots, Y_{k_{Ci}}^{Ci}$，记为划分$(Y_j', C_j^i, \delta)$，$i=1,2,3$，将集合 Y_j' 分割成不相交的子集 $Y_1^f, Y_2^f, \cdots, Y_{k_f}^f$，记为划分$(Y'_j, f_j, \delta)$，将集合 Y'_j 分割成不相交的子集 $Y_1^g, Y_2^g, \cdots, Y_{k_g}^g$，记为划分$(Y'_j, g_j, \delta)$，将 Y'_j 分割成不相交的子集：

$$Y_{c_1,c_2,c_3,d,e} = Y_{c_1}^{c^1} \cap Y_{c_2}^{c^2} \cap Y_{c_3}^{c^3} \cap Y_d^f \cap Y_e^g.$$

其中：$c_1=1,2,\cdots,k_{C^1}$；$c_2=1,2,\cdots,k_{C^2}$；$c_3=1,2,\cdots,k_{C^3}$；$d=1,2,\cdots,k_f$；$e=1,2,\cdots,k_g$. 选择向量 $x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)} \in Y_{c_1,c_2,c_3,d,e} \neq \varnothing$ 满足 $g_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}) = \min\{g_j(x) \mid x \in Y_{c_1,c_2,c_3,d,e}\}$，令 $Y_j=\{x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)} \mid Y_{c_1}^{c^1} \cap Y_{c_2}^{c^2} \cap Y_{c_3}^{c^3} \cap Y_d^f \cap Y_e^g \neq \varnothing, c_1=1,\cdots,k_{c^i}, d=1,\cdots,k_f, e=1,\cdots,k_g, i=1,2,3\}$，并且令 $j=j+1$，重复步骤二.

步骤三(求解)　选择向量 $x^0 \in Y_n$,满足

$$F(x^0) = \min\{F(x) \mid x \in Y_n\} = \min\{g_n(x) + f_n(x) \mid x \in Y_n\}.$$

令 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 为问题(1)的最优解,令 $x^*[j] = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_j^*, 0, \cdots, 0)$, $1 \leqslant j \leqslant n$,对于 $i \in \{1,2\}$ 和 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$,定义 $e_{\max} = \max\{e_j\}$, $B_{\max} = \max\{1 + b_j, 1 + b_j/s\}$, $L = \log B_{\max} + \log e_{\max} + k \log 10$. 有:

定理 1　对于问题(1),算法 A_ε 在 $O(n^9 L^6/\varepsilon^5)$ 时间内找到一个解 $x^0 \in X$,使得 $F(x^0) \leqslant (1+\varepsilon)F(x^*)$.

证明　假设 $x^*[j] = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_j^*, 0, \cdots, 0) \in Y_{c_1,c_2,c_3,d,e} \subseteq Y_j'$,对于 j 和 c_1, c_2, c_3, d, e. 通过 A_ε 的定义,这样的 j 总存在,例如 $j = 1$. 算法 A_ε 可能不会选择 $x^*[j]$ 进行进一步构造,然而存在 $x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}$ 被选择替代它. 由引理 2,有:

$$|C_j^i(x^*[j]) - C_j^i(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant \delta C_j^i(x^*[j]), \quad i = 1,2,3,$$

$$|f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant \delta f_j(x^*[j]),$$

且 $|g_j(x^*[j]) - g_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant \delta g_j(x^*[j])$ 成立.

令 $\delta_1 = \delta$,考虑

$$x^*[j+1] = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_j^*, x_{j+1}^*, 0, \cdots, 0),$$

$$x^{-(c_1,c_2,c_3,d,e)} = (x_1^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}, x_2^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}, \cdots, x_j^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}, x_{j+1}^*, 0, \cdots, 0).$$

如果 $C_j^1(x) \leqslant T_1$,则:

1) $x_j = i, i = 1,2$ 时, $f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x) + 10^{jk} C_j^i(x)$, $C_j^i(x) = (1 + b_j) C_{j-1}^i(x)$; $x_j = I, I \neq i$ 时, $f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x)$,

$$\begin{gathered}
|C_{j+1}^i(x^*[j+1]) - C_{j+1}^i(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = \\
|(1 + b_{j+1}) C_j^i(x^*[j]) - (1 + b_{j+1}) C_j^i(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = \\
|(1 + b_{j+1})(C_j^i(x^*[j]) - C_j^i(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant \\
(1 + b_{j+1}) \cdot \delta \cdot C_j^i(x^*[j]) = \delta_1 C_{j+1}^i(x^*[j+1]), \\
|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = \\
|10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^i(x^*[j+1]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}) - 10^{(j+1)k} C_{j+1}^i(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant \\
10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| + 10^{(j+1)k} |(C_{j+1}^i(x^*[j+1]) - C_{j+1}^i(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant \\
10^k \cdot \delta_1 \cdot f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} \cdot \delta_1 \cdot C_{j+1}^i(x^*[j+1]) = \\
\delta_1 (10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^i(x^*[j+1])) = \delta_1 f_{j+1}(x^*[j+1]), \\
|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = |10^k f_j(x^*[j]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = \\
10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant 10^k \cdot \delta \cdot f_j(x^*[j]) = \delta_1 \cdot f_{j+1}(x^*[j+1]).
\end{gathered}$$

2) $x_j = 3$ 时, $f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x) + 10^{jk} C_j^3(x)$, $C_j^3(x) = (1 + b_j/s) C_{j-1}^3(x)$; $x_j = i, i \neq 3$ 时, $f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x)$,

$$\begin{gathered}
|C_{j+1}^3(x^*[j+1]) - C_{j+1}^3(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = \\
|(1 + b_{j+1}/s) C_j^3(x^*[j]) - (1 + b_{j+1}/s) C_j^3(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = \\
|(1 + b_{j+1}/s) C_j^3(x^*[j]) - C_j^3(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant \\
(1 + b_{j+1}/s) \cdot \delta \cdot C_j^3(x^*[j]) = \delta_1 C_{j+1}^3(x^*[j+1]),
\end{gathered}$$

$$|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^3(x^*[j+1]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}) - 10^{(j+1)k} C_{j+1}^3(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant$$
$$10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| + 10^{(j+1)k} |(C_{j+1}^3(x^*[j+1]) - C_{j+1}^3(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant$$
$$10^k \cdot \delta_1 \cdot f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} \cdot \delta_1 \cdot C_{j+1}^3(x^*[j+1]) =$$
$$\delta_1(10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^3(x^*[j+1])) = \delta_1 f_{j+1}(x^*[j+1]),$$
$$|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = |10^k f_j(x^*[j]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant 10^k \cdot \delta \cdot f_j(x^*[j]) = \delta_1 \cdot f_{j+1}(x^*[j+1]).$$

如果 $C_j^1(x) > T_1$,则:

1)$x_i = 2$ 时,$f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x) + 10^{jk} C_j^2(x)$,$C_j^2(x) = (1 + b_j) C_{j-1}^2(x)$;$x_j = i, i \neq 2$ 时,$f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x)$,

$$|C_{j+1}^2(x^*[j+1]) - C_{j+1}^2(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|(1 + b_{j+1}) C_j^2(x^*[j]) - (1 + b_{j+1}) C_j^2(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|(1 + b_{j+1})C_j^2(x^*[j]) - C_j^2(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant$$
$$(1 + b_{j+1}) \cdot \delta \cdot C_j^2(x^*[j]) = \delta_1 C_{j+1}^2(x^*[j+1]),$$
$$|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^2(x^*[j+1]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}) - 10^{(j+1)k} C_{j+1}^2(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant$$
$$10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| + 10^{(j+1)k} |(C_{j+1}^2(x^*[j+1]) - C_{j+1}^2(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant$$
$$10^k \cdot \delta_1 \cdot f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} \cdot \delta_1 \cdot C_{j+1}^2(x^*[j+1]) =$$
$$\delta_1(10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^2(x^*[j+1])) = \delta_1 f_{j+1}(x^*[j+1]),$$
$$|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = |10^k f_j(x^*[j]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant 10^k \cdot \delta \cdot f_j(x^*[j]) = \delta_1 \cdot f_{j+1}(x^*[j+1]).$$

2)$x_j = 3$ 时,$f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x) + 10^{jk} C_j^3(x)$,$C_j^3(x) = (1 + b_j/s) C_{j-1}^3(x)$;$x_j = i, i \neq 3$ 时,$f_j(x) = 10^k f_{j-1}(x)$,

$$|C_{j+1}^3(x^*[j+1]) - C_{j+1}^3(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|(1 + b_{j+1}/s) C_j^3(x^*[j]) - (1 + b_{j+1}/s) C_j^3(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|(1 + b_{j+1}/s)C_j^3(x^*[j]) - C_j^3(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant$$
$$(1 + b_{j+1}/s) \cdot \delta \cdot C_j^3(x^*[j]) = \delta_1 C_{j+1}^3(x^*[j+1]),$$
$$|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$|10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^3(x^*[j+1]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}) - 10^{(j+1)k} C_{j+1}^3(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant$$
$$10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| + 10^{(j+1)k} |(C_{j+1}^3(x^*[j+1]) - C_{j+1}^3(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}))| \leqslant$$
$$10^k \cdot \delta_1 \cdot f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} \cdot \delta_1 \cdot C_{j+1}^3(x^*[j+1]) =$$
$$\delta_1(10^k f_j(x^*[j]) + 10^{(j+1)k} C_{j+1}^3(x^*[j+1])) = \delta_1 f_{j+1}(x^*[j+1]),$$
$$|f_{j+1}(x^*[j+1]) - f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| = |10^k f_j(x^*[j]) - 10^k f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| =$$
$$10^k |f_j(x^*[j]) - f_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})| \leqslant 10^k \cdot \delta \cdot f_j(x^*[j]) = \delta_1 \cdot f_{j+1}(x^*[j+1]).$$

对于 $x_{j+1}^* = 0$,有

$$|g_{j+1}(x^*[j+1])-g_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|=$$
$$|10^k g_j(x^*[j])+10^{(j+1)k}e_{j+1}-10^k g_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})-10^{(j+1)k}e_{j+1}|=$$
$$|10^k g_j(x^*[j])-10^k g_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|\leqslant \delta 10^k g_j(x^*[j])\leqslant$$
$$\delta_1(10^k g_j(x^*[j])+10^{(j+1)k}e_{j+1})=\delta_1 g_{j+1}(x^*[j+1]);$$

对于 $x_{j+1}^*\neq 0$,有

$$|g_{j+1}(x^*[j+1])-g_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|=$$
$$|10^k g_j(x^*[j])-10^k g_j(x^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|\leqslant$$
$$\delta 10^k g_j(x^*[j])=\delta_1 g_{j+1}(x^*[j+1]).$$

因此,有:

$$|f_{j+1}(x^*[j+1])-f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|\leqslant \delta_1 f_{j+1}(x^*[j+1]), \tag{2}$$
$$|g_{j+1}(x^*[j+1])-g_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|\leqslant \delta_1 g_{j+1}(x^*[j+1]). \tag{3}$$

也就是:

$$f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})\leqslant(1+\delta_1)f_{j+1}(x^*[j+1]), \tag{4}$$
$$g_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})\leqslant(1+\delta_1)g_{j+1}(x^*[j+1]). \tag{5}$$

假设 $\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}\in Y_{a_1,a_2,a_3,b,c}\subseteq Y'_{j+1}$,且算法 A_ε 在第 $j+1$ 次迭代中选出向量 $x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)}\in Y_{a_1,a_2,a_3,b,c}$ 替代 $\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)}$,那么通过式(4)、式(5),有:

$$|f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})-f_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant \delta f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})\leqslant \delta(1+\delta_1)f_{j+1}(x^*[j+1]), \tag{6}$$
$$|g_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})-g_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant \delta g_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})\leqslant \delta(1+\delta_1)g_{j+1}(x^*[j+1]). \tag{7}$$

通过式(2)和式(6),有:

$$|f_{j+1}(x^*[j+1])-f_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant$$
$$|f_{j+1}(x^*[j+1])-f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})|+|f_{j+1}(\tilde{x}^{(c_1,c_2,c_3,d,e)})-f_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant$$
$$\delta_1 f_{j+1}(x^*[j+1])+\delta(1+\delta_1)f_{j+1}(x^*[j+1])=$$
$$(\delta+\delta_1(1+\delta))f_{j+1}(x^*[j+1]).$$

类似地,有:

$$|g_{j+1}(x^*[j+1])-g_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant(\delta+\delta_1(1+\delta))g_{j+1}(x^*[j+1]).$$

令 $\delta_k=\delta+\delta_{k-1}(1+\delta)$,$k=2,3,\cdots,n-j+1$,有:

$$|f_{j+1}(x^*[j+1])-f_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant \delta_2 f_{j+1}(x^*[j+1]),$$
$$|g_{j+1}(x^*[j+1])-g_{j+1}(x^{(a_1,a_2,a_3,b,c)})|\leqslant \delta_2 g_{j+1}(x^*[j+1]).$$

对 $j+2,j+3,\cdots,n$ 重复论证,有 $x'\in Y_n$,使得:

$$|f_n(x')-f_n(x^*)|\leqslant \delta_{n-j+1}f_n(x^*),$$
$$|g_n(x')-g_n(x^*)|\leqslant \delta_{n-j+1}g_n(x^*).$$

又通过引理4,有

$$\delta_{n-j+1}\leqslant \delta\sum_{j=1}^{n-1}(1+\delta)^j=(1+\delta)^n-1\leqslant(1+\delta)^{n+1}-1=$$
$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2(n+1)}\right)^{n+1}-1\leqslant\left(1+2\times\frac{\varepsilon}{2}\right)-1=\varepsilon.$$

因此,可以得到:

$$f_n(x') \leqslant (1+\delta_{n-j+1})f_n(x^*) \leqslant (1+\varepsilon)f_n(x^*),$$

$$g_n(x') \leqslant (1+\delta_{n-j+1})g_n(x^*) \leqslant (1+\varepsilon)g_n(x^*).$$

综上所述,有

$$F(x') = g_n(x') + f_n(x') \leqslant (1+\varepsilon)F(x^*).$$

因此,在算法 A_ε 的第三步中,向量 x^0 被选择满足 $F(x^0) \leqslant (x') \leqslant (1+\varepsilon)F(x^*)$.

算法 A_ε 的时间复杂性可以通过步骤二中的过程划分的第 j 次迭代来确定, 过程划分需要 $O(|Y'_j|\log|Y'_j|)$ 时间完成,为了估计 $|Y'_j|$,由 $|Y'_{j+1}| \leqslant 4|Y_j| \leqslant 4k_{C^1}k_{C^2}k_{C^3}k_fk_g$,通过引理 3,有:

$$k_{C^1} \leqslant 2(n+1)\log(T_1)/\varepsilon + 2 \leqslant 2nL/\varepsilon + 2,$$

$$k_{C^2} \leqslant 2(n+1)\log(T_2(B_{\max})^n)/\varepsilon + 2 \leqslant 2n^2L/\varepsilon + 2,$$

$$k_{C^3} \leqslant 2(n+1)\log(t_0(B_{\max})^n)/\varepsilon + 2 \leqslant 2n^2L/\varepsilon + 2,$$

$$k_f \leqslant 2(n+1)\log(10^{nk}t_0n(B_{\max})^n)/\varepsilon + 2 \leqslant 2n^2L/\varepsilon + 2,$$

$$k_g \leqslant 2(n+1)\log(10^{nk}ne_{\max})/\varepsilon + 2 \leqslant 2nL/\varepsilon + 2.$$

因此 $|Y'_j| = O(n^8L^5/\varepsilon^5)$, $O(|Y'_j|\log|Y'_j|) = O(n^8L^6/\varepsilon^5)$, 有至多 n 次迭代. 因此, 算法 A_ε 在 $O(n^9L^6/\varepsilon^5)$ 时间内运行. 证毕.

4　结论

笔者研究的是带有退化工件、拒绝和一个固定的不可用区间的两台恒速机排序问题. 目标是极小化接受工件的总完工时间与拒绝工件的总惩罚之和. 首先根据 Kovalyov 和 Kubiak[15] 提出的过程划分的要求,对目标函数进行了修改,然后说明该问题是 NP-难的,进而利用过程划分的方法给出了一个 FPTAS,最后确定了其时间复杂性为 $O(n^9L^6/\varepsilon^5)$. 由于机器带有不可用区间以及拒绝惩罚同时存在的现象很普遍,因此,进一步研究机器带有不可用区间以及拒绝惩罚的排序问题具有广泛的应用价值和实际意义. 对于具有其他退化效应的函数问题以及机器具有不可用区间的其他种类机器的排序问题,还有待进一步研究.

参考文献:

[1] GUPTA J N D, GUPTA S K. Single facility scheduling with nonlinear processing times[J]. Computer & Industrial Engineering, 1988, 14(4): 387 – 393.

[2] BROWNE S, YECHIALI U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor[J]. Operations Research, 1990, 38(3): 495 – 498.

[3] MOSHEIOV G. Scheduling jobs under simple linear deterioration[J]. Computers & Operations Research, 1994, 21(6): 653 – 659.

[4] BACHMAN A, JANIAK A, KOVALYOV M Y. Minimizing the total weighted completion time of deteriorating jobs[J]. Information Processing Letters, 2002, 81(2): 81 – 84.

[5] 王吉波,张博,刘巍巍. 具有恶化效应与可控加工时间的工期指派排序问题研究[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2019, 36(5): 94 – 100.

[6] JI M, CHENG T C E. Parallel-machine scheduling with simple linear deterioration to minimize total completion time[J]. Europe-

an Journal of Operational Research,2008,188(2):342 – 347.

[7] BARTAL Y,LEONARDI S,MARCHETTI-SPACCAMELA A,et al. Multiprocessor scheduling with rejection [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics,2006,13(1):64 – 78.

[8] ZHANG S X,CAO Z G,ZHANG Y Z. Scheduling with rejection to minimize the total weighted completion time[C]. Zhangjiajie: The Eighth International Symposium on Operations Research and Its Applications,2009:111 – 114.

[9] LI S S,YUAN J J. Parallel-machine scheduling with deteriorating jobs and rejection[J]. Theoretical Computer Science,2010, 411(40 – 42):3642 – 3650.

[10] WU D,LUO C X. An FPTAS for Uniform Machine Scheduling to Minimize The Total Completion Time and the Total Rejection Penalty[J]. Applied Mechanics and Materials,2013,433 – 435:2339 – 2342.

[11] JI M,HE Y,CHENG T C E. Scheduling linear deteriorating jobs with an availability constraint on a single machine[J]. Theoretical Computer Science,2006,362(1 – 3):115 – 126.

[12] ZHAO C L,TANG H Y. Parallel machines scheduling with deteriorating jobs and availability constraints[J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,2014,31(3):501 – 512.

[13] 闫力君. 带有不可用区间的可拒绝排序问题[D]. 沈阳:沈阳师范大学,2015.

[14] LIU M,ZHENG F F,CHU C B,et al. An FPTAS for uniform machine scheduling to minimize makespan with linear deterioration [J]. Journal of Combinatorial Optimization,2012,23:483 – 492.

[15] KOVALYOV M Y,KUBIAK W. A fully polynomial approximation scheme for minimizing makespan of deteriorating jobs [J]. Journal of Heuristics,1998,3:287 – 297.

(责任编辑:王彦江)

Uniform Machine Scheduling Problem with Deteriorating Jobs, Rejection and a Fixed Non-availability Interval

FU Xiaoshuang[1],ZHAO Yufang[1],TIAN Ye[2]

(1. School of Mathematics and Systems Science,Shenyang Normal University,Shenyang,Liaoning 110034,China; 2. Tongzhou Campus of Beijing No. 5 High School,Beijing 101100,China)

Abstract: This study discusses the scheduling problem of two uniform-machines with deteriorating jobs, rejection and a non-availability internal. With the fixed non-availability interval on the first machine, the processing time of a job is a simple linear increasing function of its starting time, and jobs can be rejected by paying penalty. For the NP hard problem, the study proposes a fully polynomial-time approximation scheme (FPTAS).

Key words: uniform machine;deteriorating jobs;rejection;non-availability interval