求解一类非线性矩阵方程组的迭代法

陈　亮,马昌凤
(福建师范大学 数学与统计学院,福建 福州 350117)

摘　　要:研究了一类非线性矩阵方程组,讨论其正定解的存在性问题.进一步,提出了一种迭代法求其正定解,并对数值算法进行了收敛性分析和误差估计.数值实验表明新算法有效.

关　键　词:非线性矩阵方程组;迭代法;收敛性分析;误差估计;数值实验

中图分类号:O224.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-1670(2022)02-0005-06

0　引言

考虑如下的非线性矩阵方程组:

$$\left.\begin{aligned} X+A^{*}Y^{-1}A+D^{*}Z^{-1}D=I,\\ Y+B^{*}Z^{-1}B+E^{*}X^{-1}E=I,\\ Z+C^{*}X^{-1}C+F^{*}Y^{-1}F=I.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中,A, B, C, D, E, $F\in\mathbb{C}^{n\times n}$为已知的非奇异矩阵,$X$, Y, $Z\in\mathbb{C}^{n\times n}$为未知矩阵.令

$$M=\begin{bmatrix}0&0&C\\A&0&0\\0&B&0\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}0&E&0\\0&0&F\\D&0&0\end{bmatrix},T=\mathrm{diag}(X,Y,Z),\tag{2}$$

则方程组(1)等价于方程

$$T+M^{*}T^{-1}M+N^{*}T^{-1}N=I.\tag{3}$$

方程组(1)可视为如下方程组的特殊形式,其中 P, Q, R 为已知的 n 阶 Hermite 正定矩阵:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{X}+\tilde{A}^{*}\tilde{Y}^{-1}\tilde{A}+\tilde{D}^{*}\tilde{Z}^{-1}\tilde{D}=P,\\ \tilde{Y}+\tilde{B}^{*}\tilde{Z}^{-1}\tilde{B}+\tilde{E}^{*}\tilde{X}^{-1}\tilde{E}=Q,\\ \tilde{Z}+\tilde{C}^{*}\tilde{X}^{-1}\tilde{C}+\tilde{F}^{*}\tilde{Y}^{-1}\tilde{F}=R.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

事实上,对 P,Q,R 分别作 Cholesky 分解:$P=\tilde{P}^{*}\tilde{P},Q=\tilde{Q}^{*}\tilde{Q},R=\tilde{R}^{*}\tilde{R}$,并令

$$\begin{gathered}A=\tilde{Q}^{-*}\tilde{A}\tilde{P}^{-1},B=\tilde{R}^{-*}\tilde{B}\tilde{Q}^{-1},C=\tilde{P}^{-*}\tilde{C}\tilde{R}^{-1},D=\tilde{R}^{-*}\tilde{D}\tilde{P}^{-1},E=\tilde{P}^{-*}\tilde{E}\tilde{Q}^{-1},\\ F=\tilde{Q}^{-*}\tilde{F}\tilde{R}^{-1},X=\tilde{P}^{-*}\tilde{X}\tilde{P}^{-1},Y=\tilde{Q}^{-*}\tilde{Y}\tilde{Q}^{-1},Z=\tilde{R}^{-*}\tilde{Z}\tilde{R}^{-1}.\end{gathered}\tag{5}$$

就得到了形如(1)的方程组.

近年来,形如(3)的方程(组)解的存在性及高效数值算法得到了广泛的研究.例如,邢婷等[1]研究了非线性矩阵方程 $X+A^{\mathrm{T}}X^{-1}A=Q$,给出了该方程有正定解的条件.程可欣等[2]提出了非线性矩阵方程 $X-A^{\mathrm{T}}X^{-1}A=Q$ 的一种牛顿迭代法.Erfanifar 等[3]研究了非线性矩阵方程 $X+A^{*}X^{-1}A=Q$,并给出了一种新式无逆迭代法.Huang 和 Ma[4]研究了求解矩阵方程组

收稿日期:2022-01-06
基金项目:国家自然科学基金项目(11901098);福建省自然科学基金项目(2020J05034)
作者简介:陈　亮(1994—　),男,天津市人,福建师范大学数学与统计学院硕士研究生,主要从事数值代数及其应用研究.
通信作者:马昌凤(1962—　),男,湖南省邵阳市人,理学博士,福建师范大学数学与统计学院教授,博士生导师,主要从事数值代数及其应用研究.

$$\left.\begin{aligned} X+A^{*}Y^{-1}A=I_n,\\ Y+B^{*}X^{-1}B=I_n \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

正定解的一种保结构加倍算法. Dong、Yu 和 Meng[5] 给出了非线性矩阵方程组

$$\left.\begin{aligned} X+A^{\mathrm{T}}Y^{-\alpha}A=I_m,\\ Y+B^{\mathrm{T}}X^{-\beta}B=I_n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

的一种动态参数化无逆迭代法. Liu 等[6] 研究了非线性矩阵方程 $X^s+A^*X^{-t}A=Q$ 有 Hermite 正定解的条件. Al-Dubiban[7] 给出了求解非线性矩阵方程组

$$\left.\begin{aligned} X-A^{*}Y^{-n}A=I,\\ Y-B^{*}X^{-m}B=I \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

的一种迭代法. Ramadan 等[8] 研究了非线性矩阵方程 $X\pm A^{\mathrm{T}}X^{-2}A=I$ 的迭代正定解. Wang 和 Li[9] 研究了非线性矩阵方程 $X+A^*X^{-\alpha}A=Q$ 有正定解的充分必要条件. Zhang[10] 提出了求解方程 $X+A^{\mathrm{T}}X^{-n}A=I$ 的一种拟梯度无逆迭代法. 李涛等[11] 研究了非线性矩阵方程 $X+\sum_{i=1}^{m}A_i^{\mathrm{T}}X^{-n_i}A_i=Q$,给出了一种求解该方程的无求逆迭代法.

纵观上述文献及成果,都是一个或两个方程, 很少有人研究三个以上方程的情形. 笔者将讨论含有三个方程的方程组(1)及其等价形式(3).

符号说明:$\mathbb{C}^{n\times n}$表示全体 n 阶复方阵的集合. I_n 表示 n 阶单位矩阵, 在不需要指明阶数时简写为 I. 0_n 表示 n 阶零矩阵($n=1$ 时即为数字 0), 在 $n=1$ 或不需要指明阶数时简写为 0. A^* 表示矩阵 A 的共轭转置. $\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹, 即矩阵 A 的对角元之和. $\|A\|$ 表示矩阵 A 的 Frobenius 范数, 即 $\|A\|=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$,其中 $|a_{ij}|$ 表示复数 a_{ij} 的模. $A>B$ 和 $A\geqslant B$ 分别表示 $A-B$ 是正定或半正定矩阵,特别地,$A>0$ 或 $A\geqslant 0$ 表示 A 为正定或半正定矩阵. $\mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_n)$ 表示以 $D_1,\cdots,D_n$ 为对角块的块对角矩阵.

1 算法及其收敛性

众所周知, 求一个矩阵的逆(尤其是大型矩阵)的计算代价往往是昂贵的. 为了避免这一点, 可以用一个矩阵多项式来近似逼近其逆矩阵. 受文献[11]的启发, 这里用矩阵多项式 $f(Y)=2Y-YXY$ 来近似矩阵 X^{-1}. 具体地, 设 $x=X^{-1},y=Y^{-1},z=Z^{-1}$, 则有

$$\left.\begin{aligned} x^{-1}=I-A^{*}yA-D^{*}zD:=U,\\ y^{-1}=I-B^{*}zB-E^{*}xE:=V,\\ z^{-1}=I-C^{*}xC-F^{*}yF:=W. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

等号两边分别左右同乘 x,y,z, 则有

$$\left.\begin{aligned} x=2x-xUx,\\ y=2y-yVy,\\ z=2z-zWz. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

从而得到了求解方程组(1)的数值算法.

算法 1 (求解方程组(1)的数值算法)

1) 输入矩阵 A,B,C,D,E,F,初始矩阵 $x_0=y_0=z_0=I$, 误差 $\epsilon\geqslant 0$,置 $k:=0$.

2) 迭代计算

$$\begin{gathered} U_k=I-A^{*}y_kA-D^{*}z_kD,V_k=I-B^{*}z_kB-E^{*}x_kE,W_k=I-C^{*}x_kC-F^{*}y_kF.\\ x_{k+1}=2x_k-x_kU_kx_k,y_{k+1}=2y_k-y_kV_ky_k,z_{k+1}=2z_k-z_kW_kz_k. \end{gathered} \tag{11}$$

3)若 $\sqrt{\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|y_{k+1}-y_k\|^2+\|z_{k+1}-z_k\|^2}\leqslant\epsilon$,停止, 此时方程组(1)的近似解为 $X=x_{k+1}^{-1},Y=$

y_{k+1}^{-1},$Z=z_{k+1}^{-1}$;否则,令 $k:=k+1$,转步骤 2).

为便于理论分析, 下面给出方程(3)的数值算法, 作为辅助算法.

算法 2 （求解方程（3)的数值算法）

1）输入矩阵 A,B,C,D,E,F, 给定初始矩阵 $x_0=y_0=z_0=I$,记 $M=\begin{bmatrix}0&0&C\\A&0&0\\0&B&0\end{bmatrix}$,$N=\begin{bmatrix}0&E&0\\0&0&F\\D&0&0\end{bmatrix}$,
$T_0=\mathrm{diag}(x_0,y_0,z_0)$,误差 $\epsilon\geqslant 0$. 置 $k:=0$.

2）迭代计算

$$S_k=I-M^*T_kM-N^*T_kN,T_{k+1}=2T_k-T_kS_kT_k. \tag{12}$$

3)若 $\|T_{k+1}-T_k\|\leqslant\epsilon$,停止,此时方程(3)的近似解为 $T=T_{k+1}^{-1}$. 否则,令 $k:=k+1$,转步骤 2).

容易看出, 在算法 1 中,令 $S_k=\mathrm{diag}(U_k,V_k,W_k)$, 就得到了算法 2.

引理 1 在算法 2 的迭代过程中, 矩阵 T_k 和 S_k 始终保持形如 $T_k=\mathrm{diag}(x_k,y_k,z_k)$ 和 $S_k=\mathrm{diag}(U_k,V_k,W_k)$的块对角形式.

证明 当 $k=0$ 时,$T_0=I_{3n}$显然成立. $S_0=I-M^*T_0M-N^*T_0N=I-M^*M-N^*N=\mathrm{diag}(I-A^*A-D^*D,I-B^*B-E^*E,I-C^*C-F^*F)$也满足分块对角形式. 假设结论对任何 $k\leqslant m$ 的整数都成立,即 $T_m=\mathrm{diag}(x_m,y_m,z_m)$,$S_m=\mathrm{diag}(U_m,V_m,W_m)$, 则有

$$\begin{aligned}T_{m+1}=2T_m-T_mS_mT_m=2\mathrm{diag}(x_m,y_m,z_m)-\mathrm{diag}(x_m,y_m,z_m)\mathrm{diag}(U_m,V_m,W_m)\mathrm{diag}(x_m,y_m,z_m)=\\ \mathrm{diag}(2x_m-x_mU_mx_m,2y_m-y_mV_my_m,2z_m-z_mW_mz_m)=\mathrm{diag}(x_{m+1},y_{m+1},z_{m+1}).\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}S_{m+1}=I-M^*T_{m+1}M-N^*T_{m+1}N=\mathrm{diag}(I-A^*y_{m+1}A-D^*z_{m+1}D,I-B^*z_{m+1}B-E^*x_{m+1}E,\\ I-C^*x_{m+1}C-F^*y_{m+1}F)=\mathrm{diag}(U_{m+1},V_{m+1},W_{m+1}),\end{aligned} \tag{14}$$

即 $k=m+1$ 时也成立. 由归纳法, 对任何整数 k 结论都成立.

由于

$$\|T_{k+1}-T_k\|^2=\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|y_{k+1}-y_k\|^2+\|z_{k+1}-z_k\|^2, \tag{15}$$

可得如下结论.

引理 2 若算法 2 在若干次迭代后有$\|T_{k+1}-T_k\|\leqslant\epsilon$, 则算法 1 必有

$$\sqrt{\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|y_{k+1}-y_k\|^2+\|z_{k+1}-z_k\|^2}\leqslant\epsilon\ . \tag{16}$$

这个引理保证了两个算法的等价性. 下面讨论算法 2 的收敛性.

定理 1[11] 假设方程(3)存在正定解 T,矩阵序列$\{T_k\}$由算法 2 生成,给定初值 $T_0=I$, 则 T 是适定的,且$\{T_k\}$单增收敛于 T^{-1}.

定理 2 设方程(3)的精确解为 T,则有

$$\|T_{k+1}-T^{-1}\|\leqslant(1+\|T\|\ \|T^{-1}\|+\|T^{-1}\|(\|M\|^2+\|N^2\|))\|T_k-T^{-1}\|. \tag{17}$$

$$\|S_{k+1}-T\|\leqslant(\|M\|^2+\|N\|^2)(1+\|T\|\ \|T^{-1}\|+\|T^{-1}\|(\|M\|^2+\|N\|^2))\|T_k-T^{-1}\|. \tag{18}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}T_{k+1}-T^{-1}=2T_k-T_kS_kT_k-T^{-1}=2T_k-T_k(I-M^*T_kM-N^*T_kN)T_k-T^{-1}=\\ 2T_k-T_k^2+T_kM^*T_kMT_k+T_kN^*T_kNT_k-T^{-1}=\\ 2T_k-T_k^2+T_kM^*(T_k-T^{-1}+T^{-1})MT_k+T_kN^*(T_k-T^{-1}+T^{-1})NT_k-T^{-1}=\\ 2T_k-T_k^2+T_kM^*(T_k-T^{-1})MT_k+T_kN^*(T_k-T^{-1})NT_k+T_kM^*T^{-1}MT_k+T_kN^*T^{-1}NT_k=\\ T_kM^*(T_k-T^{-1})MT_k+T_kN^*(T_k-T^{-1})NT_k+2T_k-T_kTT_k-T^{-1}=\\ T_kM^*(T_k-T^{-1})MT_k+T_kN^*(T_k-T^{-1})NT_k-T_kT(T_k-T^{-1})+(T_k-T^{-1})\ .\end{aligned} \tag{19}$$

式(19)两边取范数,并注意到$\lim\limits_{k\to\infty}T_k=T^{-1}$,得到

$$\| T_{k+1} - T^{-1} \| \leqslant (1 + \| T \| \ \| T^{-1} \| + \| T^{-1} \| (\| M \|^2 + \| N \|^2) + \tau) \| T_k - T^{-1} \|. \tag{20}$$

由 τ 的任意性,第一个不等式得证. 注意到

$$S_{k+1} - T = (I - M^* T_{k+1} M - N^* T_{k+1} N) - (I - M^* T^{-1} M - N^* T^{-1} N) =$$

$$- M^* (T_{k+1} - T^{-1}) M - N^* (T_{k+1} - T^{-1}) N, \tag{21}$$

两边取范数,并结合第一个不等式,就得到了第二个不等式.

由定理 2 可推出:

$$\| T_{k+1} - T^{-1} \| \leqslant (1 + \| T \| \ \| T^{-1} \| + \| T^{-1} \| (\| M \|^2 + \| N \|^2))^k \| T_0 - T^{-1} \|. \tag{22}$$

$$\| S_{k+1} - T \| \leqslant ((\| M \|^2 + \| N \|^2)(1 + \| T \| \ \| T^{-1} \| +$$

$$\| T^{-1} \| (\| M \|^2 + \| N \|^2)))^k \| T_0 - T^{-1} \| . \tag{23}$$

两边开 k 次方, 并令 $k \to \infty$,就得到了推论 1.

推论 1 若算法 2 收敛, 则有

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\| T_{k+1} - T^{-1} \|} \leqslant 1 + \| T \| \ \| T^{-1} \| + \| T^{-1} \| (\| M \|^2 + \| N \|^2). \tag{24}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\| S_{k+1} - T \|} \leqslant$$

$$(\| M \|^2 + \| N \|^2)(1 + \| T \| \ \| T^{-1} \| + \| T^{-1} \| (\| M \|^2 + \| N \|^2)). \tag{25}$$

由于两个算法的等价性, 以及正定矩阵的性质, 不难推出对于算法 1 也有类似的结论.

定理 3 若方程组(1)存在正定解 X,Y,Z, $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\}$ 是算法 1 生成的矩阵序列, 初值 $x_0 = y_0 = z_0 = I$,则 X,Y,Z 是适定的,且 $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\}$ 单增收敛于 X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}.

定理 4 设方程组(1)的精确解为 X,Y,Z,则有:

$$\sqrt{\| x_{k+1} - X^{-1} \|^2 + \| y_{k+1} - Y^{-1} \|^2 + \| z_{k+1} - Z^{-1} \|^2} \leqslant$$

$$((1 + \sqrt{(\| X^{-1} \|^2 + \| Y^{-1} \|^2 + \| Z^{-1} \|^2)(\| X \|^2 + \| Y \|^2 + \| Z \|^2)} +$$

$$\| X^{-1} \|^2 + \| Y^{-1} \|^2 + \| Z^{-1} \|^2)\Omega) \sqrt{\| x_k - X^{-1} \|^2 + \| y_k - Y^{-1} \|^2 + \| z_k - Z^{-1} \|^2}. \tag{26}$$

$$\sqrt{\| U_{k+1} - X \|^2 + \| V_{k+1} - Y \|^2 + \| W_{k+1} - Z \|^2} \leqslant$$

$$(\Omega(1 + \sqrt{(\| X^{-1} \|^2 + \| Y^{-1} \|^2 + \| Z^{-1} \|^2)(\| X \|^2 + \| Y \|^2 + \| Z \|^2)} +$$

$$\| X^{-1} \|^2 + \| Y^{-1} \|^2 + \| Z^{-1} \|^2)\Omega) \sqrt{\| x_k - X^{-1} \|^2 + \| y_k - Y^{-1} \|^2 + \| z_k - Z^{-1} \|^2}. \tag{27}$$

其中,$\Omega = \| A \|^2 + \| B \|^2 + \| C \|^2 + \| D \|^2 + \| E \|^2 + \| F \|^2$.

2 数值实验

下面通过一些数值实验来验证算法的有效性. 以下数据均通过 MATLAB R2020a, Win10, Intel Core i5-6500 的 PC 获得. 用 Iter, CPU, Res 分别表示迭代次数、CPU 时间和终止时的残差范数, 即 $\mathrm{Res} = \sqrt{\| x_{k+1} - x_k \|^2 + \| y_{k+1} - y_k \|^2 + \| z_{k+1} - z_k \|^2}$, 实验中均取 $\epsilon = 10^{-8}$,最大迭代次数为 10^5.

由于算法 2 将小矩阵合并为大矩阵,势必增加计算量,且算法 2 的系数矩阵十分稀疏,算法 2 的效果明显不如算法 1, 故我们只需考虑算法 1 即可.

例 1 令

$$A = F = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.01 \\ 0.02 & 0.04 \end{bmatrix}, B = D = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.07 \\ 0.03 & 0.20 \end{bmatrix}, C = E = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.05 \\ 0.06 & 0.22 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

则方程组(1)的解为

$$X = \begin{bmatrix} 0.9795 & -0.0181 \\ -0.0181 & 0.9497 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.9317 & -0.0424 \\ -0.0424 & 0.8976 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0.9492 & -0.0269 \\ -0.0269 & 0.9441 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

算法 1 的数值结果为 Iter = 8, CPU = 0.153 4, Res = 5.066 5e - 09. 残差下降如图 1 所示.

例 2　令

$$A=F=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1+\mathrm{i} & 0.1+0.3\mathrm{i}\\ 0.5+0.2\mathrm{i} & 2-\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

$$B=D=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2+\mathrm{i} & 0.6\mathrm{i}\\ 0.2 & 1+3\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

$$C=E=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3-\mathrm{i} & -0.4\\ 0.5\mathrm{i} & 2-2\mathrm{i}\end{bmatrix},\qquad(30)$$

则方程组(1)的解为

$$X=\begin{bmatrix}0.914\,0-0.000\,0\mathrm{i} & -0.025\,6-0.010\,2\mathrm{i}\\ -0.025\,6-0.010\,2\mathrm{i} & 0.811\,0-0.000\,0\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix}0.829\,7-0.000\,0\mathrm{i} & 0.011\,5-0.001\,9\mathrm{i}\\ 0.011\,5-0.001\,9\mathrm{i} & 0.811\,0-0.000\,0\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

$$Z=\begin{bmatrix}0.860\,5-0.000\,0\mathrm{i} & 0.007\,1+0.025\,6\mathrm{i}\\ 0.007\,1+0.025\,6\mathrm{i} & 0.834\,6-0.000\,0\mathrm{i}\end{bmatrix}.\qquad(31)$$

算法 1 的结果为 Iter = 14, CPU = 0.165 5, Res = 2.407 7e − 09. 残差下降如图 2 所示. 由此可见该算法对复矩阵也是有效的.

例 3　令

$$A=B=C=\begin{bmatrix}1.09 & 0.95 & 0.97\\ 0.27 & 1.96 & 0.95\\ 0.54 & 0.15 & 1.48\end{bmatrix},$$

$$D=E=F=\begin{bmatrix}1.80 & 0.91 & 0.65\\ 0.14 & 1.79 & 0.03\\ 0.42 & 0.95 & 1.84\end{bmatrix},\qquad(32)$$

则方程组(1)的解为

$$X=Y=Z=\begin{bmatrix}0.943\,7 & -0.050\,2 & -0.050\,0\\ -0.050\,2 & 0.880\,8 & -0.071\,1\\ -0.050\,0 & -0.071\,1 & 0.905\,6\end{bmatrix}.\qquad(33)$$

算法 1 的结果为 Iter = 14, CPU = 0.244 4, Res = 7.346 9e − 09. 残差下降如图 3 所示.

由例 3 可以猜想,若 $A=B=C, D=E=F$,并且方程组(1)有解,则必有满足 $X=Y=Z$ 的解.

3　结论

讨论了非线性矩阵方程组(1)的正定解问题,提出了求解其正定解的一种迭代法, 并通过将方程组合并为一个大型矩阵方程的方法, 对该迭代法作出了收敛性分析和误差估计. 此外,还通过一系列数值实验证实了该算法的有效性. 这个有效性说

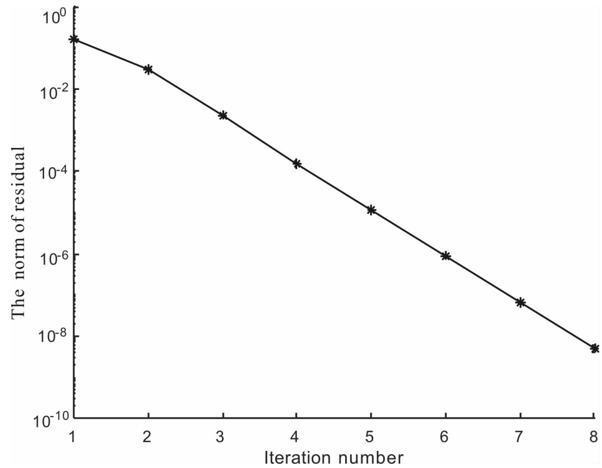

图 1　例 1 的残差下降图

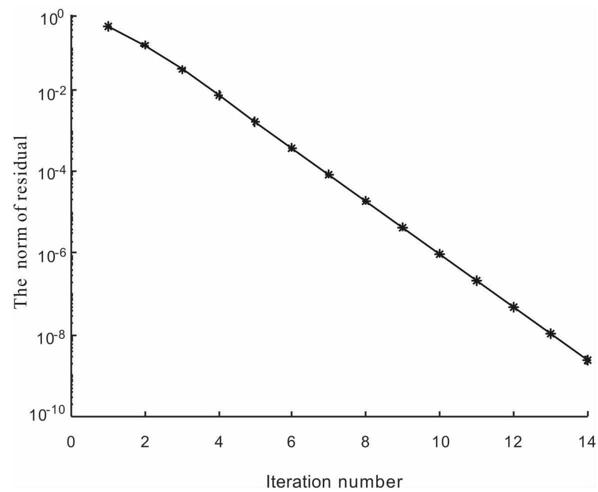

图 2　例 2 的残差下降图

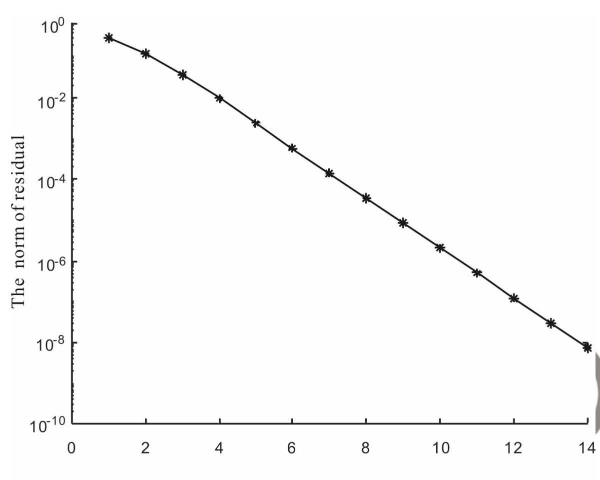

图 3　例 3 的残差下降图

明，这一类无逆迭代法很可能适用于更多个方程的方程组情形，这有待进一步讨论.

参考文献：

[1]邢婷，梁丽，霍金丹. 关于非线性矩阵方程 $X+A^{\mathrm{T}}X^{-1}A=Q$ 的正定解[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报，2015(3)：42－43.

[2]程可欣，彭振赟，杜丹丹，等. 矩阵方程 $X-A^{\mathrm{T}}X^{-1}A=Q$ 的牛顿迭代解法 [J]. 工程数学学报，2016(1)：63－72.

[3] ERFANIFAR R, SAYEVAND K, ESMAEILI H. A novel iterative method for the solution of a nonlinear matrix equation [J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 153:503－518.

[4]HUANG N, MA C F. The structure-preserving doubling algorithms for positive definite solution to a system of nonlinear matrix equations [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2018, 66(4):1329270.

[5] DONG N, YU B, MENG Z Y. A dynamically parameterized inversion-free iteration for a system of nonlinear matrix equation [J]. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 2020, 69(4): 311－322.

[6]LIU P P, ZHANG S G, LI Q C. Hermite positive definite solution of a class of matrix equation [J]. Procedia Engineering, 2011, 15:1884－1888.

[7]AL-DUBIBAN A M. Iterative algorithm for solving a system of nonlinear matrix equations [J]. Journal of Applied Mathematics, 2012, 2012:461407.

[8]RAMADAN M A, EL-DANAF T S, EL-SHAZLY N M. Iterative positive definite solutions of the two nonlinear matrix equations $X\pm A^{\mathrm{T}}X^{-2}A=I$[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 164(1):189－200.

[9]WANG X T, LI Y M. Necessary and sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of a nonlinear matrix equation [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2010, 87(11):2542－2551.

[10]ZHANG H M. Quasi gradient-based inversion-free iterative algorithm for solving a class of the nonlinear matrix equations [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 77(5):1233－1244.

[11]李涛，彭振赟，王杰. 求解非线性矩阵方程 $X+\sum_{i=1}^{m}A_i^{\mathrm{T}}X^{-n_i}A_i=Q$ 的无求逆迭代算法[J]. 桂林电子科技大学学报，2021(1)：50－54.

(责任编辑：王彦江)

An Iterative Method for Solving a Class of Nonlinear Matrix Equation

CHEN Liang, MA Changfeng

(School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350117, China)

Abstract: This paper makes a study of a class of nonlinear matrix equations to discuss the positive definite solution. Furthermore, it proposes an iterative method for it and the convergence analysis and error estimation are also made in numerical algorithm. Numerical experiments show that the new algorithm is effective.

Key words: nonlinear matrix equations; iterative method; convergent analysis; estimation for the error; numerical experiments