

求解复对称线性方程组的两参数修正 HSS 方法

罗娅娟, 马昌凤

(福建师范大学 数学与统计学院, 福建 福州 350007)

摘 要: 基于修正的 HSS(MHSS) 迭代方法, 运用双参数加速技术去求解大型稀疏复对称线性方程组, 从两个方面证明了该方法的收敛性并且在理论中给出了最优的参数选择, 数值实验验证了该方法的有效性. 将两个例子与 MHSS 迭代方法进行比较, 表明该方法在收敛速度和稳定性上都优于 MHSS 方法, 对于提高计算效率和解决实际问题具有重要意义, 为求解大规模稀疏复对称线性方程组提供了一种新的思路.

关键词: 复对称线性方程组; TMHSS 迭代法; 收敛性分析; 数值实验

中图分类号: O241.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-1670(2023)05-0001-07

0 引言

考虑如下复对称线性方程组的迭代解:

$$Ax = b, A \in C^{n \times n}, x, b \in C^n. \quad (1)$$

其中 $A \in C^{n \times n}$ 是以下形式的复对称矩阵

$$A = W + iT. \quad (2)$$

$W, T \in R^{n \times n}$ 是实对称矩阵并且最少有一个是半正定矩阵, $i = \sqrt{-1}$ 表示虚单位, 有关这类问题的更多详细信息, 参考文献^{[1],[2]93-111,[3-4]}.

复对称矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 的 Hermitian 和反 Hermitian 的部分有

$$H = \frac{1}{2}(A + A^*) = W, \quad S = \frac{1}{2}(A - A^*) = iT. \quad (3)$$

因此, 当 W 是对称正定矩阵时, A 是一个非 Hermitian 的复矩阵, 并且是正定矩阵. 这里的 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置. 基于 Hermitian 和反 Hermitian 分裂(HSS)

$$A = H + S. \quad (4)$$

在复矩阵 A 中, 可以直接用 Bai 等^{[5]603-629} 引入的 HSS 迭代方法来计算复对称线性方程组(1)和(2)的近似解. 通过利用系数矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 的特殊结构, Bai 等在文献^{[2]95-99} 中提出了一种修正的 HSS(MHSS) 迭代方法, 该方法求解复对称线性方程组(1)和(2)比 HSS 迭代方法有效得多.

算法 1 (MHSS 迭代法)^{[2]98}

步骤 1 选取初始向量 $x^{(0)} \in C^n$.

步骤 2 对于 $k = 0, 1, 2, \dots$ 直到迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset C^n$ 收敛, 根据以下算法计算下一个迭代 $x^{(k+1)}$:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha I + W)x^{(k+\frac{1}{2})} &= (\alpha I - iT)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + T)x^{(k+1)} &= (\alpha I + iW)x^{(k+\frac{1}{2})} - ib. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 α 表示给定的正常数, I 表示单位矩阵.

收稿日期: 2023-04-11

基金项目: 国家自然科学基金(11901098); 福建省自然科学基金(2020J05034)

作者简介: 罗娅娟(1998—), 女, 江西省南昌市人, 福建师范大学数学与统计学院硕士研究生, 主要从事数值代数研究.

通信作者: 马昌凤(1962—), 男, 湖南省隆回县人, 理学博士, 福建师范大学数学与统计学院教授, 博士生导师, 主要从事数值代数及其应用研究.



由于 $W \in R^{n \times n}$ 是对称正定矩阵, $T \in R^{n \times n}$ 是对称半正定矩阵, $\alpha \in R$ 是正数, 矩阵 $\alpha I + W$ 和 $\alpha I + T$ 都是对称正定矩阵, 因此, MHSS 迭代法的每个步骤所涉及的两个线性子方程组都可以用多种实数计算的方法去有效地求解, 比如精确的 Cholesky 分解和非精确的 CG 方法或者多重网格方法. 这与 HSS 迭代方法不同, 在 HSS 迭代方法中, 每个迭代步骤都需要求解系数矩阵 $\alpha I + iT$ 的移位反 Hermitian 线性子方程组, 见文献^{[5]603-612, [6]413-440}. 如果使用稀疏的三角分解来求解每一步所涉及的线性子方程组, MHSS 迭代方法需要的储存空间可能比 HSS 迭代方法少得多, 因为只需要计算和储存 2 个三角因子, 而不是 3 个. 有关更多信息, 请参阅文献^{[2]93-111, [5]603-619, [6]423-429}. 文献^{[2]93-111}表明, 对于任何初始猜测点, MHSS 迭代方法收敛到复对称线性方程组 (1) (2) 的唯一解, 其渐进收敛率

$$\sigma(\alpha) = \max_{\lambda_j \in sp(W)} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_j^2}}{\alpha + \lambda_j} \cdot \max_{\mu_j \in sp(T)} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2}}{\alpha + \mu_j} \leq \max_{\lambda_j \in sp(W)} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_j^2}}{\alpha + \lambda_j} < 1, \alpha > 0. \tag{6}$$

式中 $sp(W)$ 和 $sp(T)$ 表示矩阵 W 和 T 的谱. 注意, 这个边界仅取决于对称正定矩阵 W 和对称正定矩阵 T 的特征值. 特别当 $\alpha_* = \sqrt{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}$ 时 (其中 γ_{\min} 和 γ_{\max} 是矩阵 W 和 T 的最小和最大特征值), 有

$$\sigma(\alpha_*) \leq \frac{\sqrt{\kappa_2(W) + 1}}{\sqrt{\kappa_2(W) - 1}}. \tag{7}$$

这里的 $\kappa_2(\cdot)$ 用于表示相应矩阵的谱条件数.

然而, 使用上述迭代方法直接求解线性方程组 (1), 涉及了复杂的计算, 并增加了计算量. 为了更好地提高数值性能, 线性方程组 (1) 可以重新表达. 设 $x = y + iz, b = p + iq$, 其中向量 $y, z, p, q \in R^N$. 然后, 复线性方程组 (1) 可以等价地表达为以下二乘二块结构:

$$Ax = \begin{bmatrix} W & -T \\ T & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = b. \tag{8}$$

线性方程组 (8) 也可以表达为广义鞍点问题的特定情况. 目前, 已经有许多迭代方法用于处理块二乘二块线性方程组^[7], 该方法包括类 SOR 的迭代方法^[8-10]、类 HSS 方法^[11-13]、预处理的 Krylov 子空间方法^[14-15]、C 到 R 迭代方法^[16-17]等. 有关更多的迭代方法详情, 请参阅文献^[18].

1 TMHSS 迭代方法

在本节中, 将建立 MHSS 实值迭代方法的新版本. 通过在 MHSS 上应用双参数加速技术, 推导一种新的迭代方法. 新方法被定义为双参数 MHSS (TMHSS) 实值迭代方法, 或缩写为 TMHSS 迭代方法. 设 $\alpha, \beta > 0$, 线性方程组 (8) 可以作为两个等式方程组呈现:

$$\begin{bmatrix} \alpha I + W & 0 \\ 0 & \alpha I + W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha I & T \\ -T & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \tag{9}$$

和

$$\begin{bmatrix} \beta I + T & 0 \\ 0 & \beta I + T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta I & -W \\ W & \beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ -q \end{bmatrix}. \tag{10}$$

显然, 如果选择 $\alpha = \beta$, TMHSS 迭代方法会简化成 MHSS 迭代方法. 此外, 可以选择适当的参数 α 和 β , 以实现比 MHSS 迭代方法更高的计算效率, 两个数值实验也验证了新方法的性能. 通过上述拆分方程组, 可以推导出 TMHSS 迭代方法来解决线性方程组 (8). 接下来, 将介绍 TMHSS 实值迭代方法:

算法 2 (TMHSS 实值迭代方法)

步骤 1 选择初始向量 $\{y^{(0)T}, z^{(0)T}\}^T \in R^N$.

步骤 2 对 $k = 0, 1, 2 \dots$ 直到迭代矩阵 $\{y^{(0)T}, z^{(0)T}\}_{k=0}^{\infty} \subset R^{2N}$ 收敛.

设 α 和 β 是两个给定的正常数,



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k+\frac{1}{2})} \\ z^{(k+\frac{1}{2})} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} & \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} & \alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k+\frac{1}{2})} \\ z^{(k+\frac{1}{2})} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ -q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

通过简单的推导, 迭代方法可以等价于以下形式:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{W})y^{(k+\frac{1}{2})} &= \alpha y^{(k)} + \mathbf{T}z^{(k)} + p, \\ (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{W})z^{(k+\frac{1}{2})} &= -\mathbf{T}y^{(k)} + \alpha z^{(k)} + q, \\ (\beta\mathbf{I} + \mathbf{T})y^{(k+1)} &= \beta y^{(k+\frac{1}{2})} - \mathbf{W}z^{(k+\frac{1}{2})} + q, \\ (\beta\mathbf{I} + \mathbf{T})z^{(k+1)} &= \mathbf{W}y^{(k+\frac{1}{2})} + \beta z^{(k+\frac{1}{2})} - p. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

通过消除中间变量 $(y^{(k+\frac{1}{2})}, z^{(k+\frac{1}{2})})^T$, 它可以表示为以下整个迭代过程:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \mathbf{M}(\alpha, \beta)x^{(k)} + \mathbf{N}(\alpha, \beta)g, \\ \mathbf{M}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} & \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} & \alpha\mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{I} + \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & 0 \\ 0 & -\beta\mathbf{I} + \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1}, \\ x^{(k)} &= \begin{bmatrix} y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

下面给出 TMHSS 迭代法的收敛性分析. 以下定理是 TMHSS 方法收敛的充分条件.

定理 1 给定正参数 $\alpha, \beta > 0$, 且 μ_j 为 \mathbf{T} 的特征值, λ_j 为 \mathbf{W} 的特征值, 如果 $0 < \alpha \leq \beta, \beta^2 - \alpha^2 \leq 2\alpha\lambda_{\min}$, 则迭代矩阵的谱半径 $\rho(\mathbf{M}(\alpha, \beta)) \leq \sigma_2(\alpha, \beta)$, λ_{\min} 是 \mathbf{W} 的最小特征值.

$$\sigma_2(\alpha, \beta) = \max_{\mu_j \in sp(\mathbf{T})} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2}}{\beta + \mu_j}, \rho(\mathbf{M}(\alpha, \beta)) \leq \sigma_2(\alpha, \beta) < 1, \quad (14)$$

则 TMHSS 迭代法收敛.

证明 由式(13)可知, TMHSS 迭代方法的迭代矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} + \mathbf{T} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{W} & \beta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{I} + \mathbf{W} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} & \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} & \alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \alpha\beta\mathbf{GH} + \mathbf{GWHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \\ \alpha\mathbf{GWH} - \beta\mathbf{GHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{G} = (\beta\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1}$, $\mathbf{H} = (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{W})^{-1}$. 易知迭代矩阵的谱半径

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{M}(\alpha, \beta)) &\leq \left\| \begin{bmatrix} \alpha\beta\mathbf{GH} + \mathbf{GWHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \\ \alpha\mathbf{GWH} - \beta\mathbf{GHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \end{bmatrix} \right\|_2 = \\ & \sqrt{\lambda_{\max} \left(\begin{bmatrix} \alpha\beta\mathbf{GH} + \mathbf{GWHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \\ \alpha\mathbf{GWH} - \beta\mathbf{GHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha\beta\mathbf{GH} + \mathbf{GWHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \\ \alpha\mathbf{GWH} - \beta\mathbf{GHT} & \beta\mathbf{GHT} - \alpha\mathbf{GWH} \end{bmatrix} \right)} = \\ & \max_{\lambda_j \in sp(\mathbf{W}), \mu_j \in sp(\mathbf{T})} \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2 + \lambda^2\mu^2 + \alpha^2\lambda_j^2 + \beta^2\mu_j^2}{(\beta\mathbf{I} + \mu_j)^2 (\alpha\mathbf{I} + \lambda_j)^2}} = \max_{\lambda_j \in sp(\mathbf{W}), \mu_j \in sp(\mathbf{T})} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2} \sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}}{(\beta + \mu_j)(\alpha + \lambda_j)} = \\ & \max_{\lambda_j \in sp(\mathbf{W})} \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}}{\alpha + \lambda_j^2} \max_{\mu_j \in sp(\mathbf{T})} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2}}{\beta + \mu_j^2} = \sigma_1\sigma_2. \end{aligned}$$

其中



$$\sigma_1 = \max_{\lambda_j \in sp(W)} \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}}{\alpha + \lambda_j}, \sigma_2 = \max_{\mu_j \in sp(T)} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2}}{\beta + \mu_j}. \tag{16}$$

若 $\beta^2 - \alpha^2 \leq 2\alpha\lambda_{\min}$, 则 $\beta^2 + \lambda_j^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\lambda_{\min} + \lambda_j^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\lambda_j + \lambda_j^2 = (\alpha + \lambda_j)^2$, 可知 $\sigma_1 < 1$. 注意, 当 $\alpha \leq \beta$ 时, $\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2} \leq \sqrt{\beta^2 + \mu_j^2} \leq \beta + \mu_j (1 \leq j \leq n)$, $\sigma_2 < 1$, 则有 $\rho < 1$, 故 TMHSS 迭代方法收敛, 证毕.

下面再给出一个定理去证明 TMHSS 的收敛性.

定理 2 给定正参数 $\alpha, \beta > 0$, 且 μ_j 为 T 的特征值, λ_j 为 W 的特征值, 如果 $0 < \beta \leq \alpha, \alpha^2 - \beta^2 \leq 2\beta\mu_{\min}$, 则迭代矩阵的谱半径 $\rho(M(\alpha, \beta)) \leq \sigma_1(\alpha, \beta)$, μ_{\min} 是 T 的最小特征值.

$$\sigma_1 = \max_{\lambda_j \in sp(W)} \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}}{\alpha + \lambda_j}, \rho(M(\alpha, \beta)) \leq \sigma_1(\alpha, \beta) < 1, \tag{17}$$

则 TMHSS 迭代方法收敛.

由定理 1 的证明, $\rho(M(\alpha, \beta)) \leq \sigma_1\sigma_2$, 其中 σ_1, σ_2 表达在式 (17). 若 $\alpha^2 - \beta^2 \leq 2\beta\mu_{\min}$, 则 $\alpha^2 + \mu_j^2 \leq \beta^2 + 2\beta\mu_{\min} + \mu_j^2 \leq \beta^2 + 2\beta\mu_j + \mu_j^2 = (\beta + \mu_j)^2$, 可知 $\sigma_2 < 1$. 当 $\beta \leq \alpha$ 时, 有 $\sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \lambda_j^2} \leq \alpha + \lambda_j (1 \leq j \leq n)$, 可推出 $\sigma_1 < 1$, 则 $\rho < 1$, TMHSS 迭代方法收敛, 证毕.

正如 TMHSS 迭代方法依赖于两个参数 α, β , 因此, 确定参数 α 和 β 是有意义的, 下面推导了最优参数 α, β 的表达式.

定理 3 假设定理 1、2 是有效的, 那么, 将谱半径 $\rho(M(\alpha, \beta))$ 的上界 $\sigma(\alpha)\sigma(\beta)$ 最小化的准参数 α^* 和 β^* 是

$$\alpha^* = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j}, \beta^* = \frac{\lambda_j^2}{\mu_j}. \tag{18}$$

其中 $\lambda_{\min} \leq \lambda_j \leq \lambda_{\max}$ 是 W 的特征值, $\mu_{\min} \leq \mu_j \leq \mu_{\max}$ 是 T 的特征值.

由定理 1 的证明,

$$\rho(M(\alpha, \beta)) \leq \max_{\lambda_j \in sp(W), \mu_j \in sp(T)} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2} \sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}}{(\beta + \mu_j)(\alpha + \lambda_j)} = \sigma_1\sigma_2 = \sigma, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}(\alpha\lambda_j^2 - \mu_j^2)}{(\alpha + \lambda_j)^2(\beta + \mu_j)\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2}}, \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \mu_j^2}(\beta\mu_j^2 - \lambda_j^2)}{(\alpha + \lambda_j)(\beta + \mu_j)^2\sqrt{\beta^2 + \lambda_j^2}},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha^2} = \frac{\lambda_j^5 \mu_j \sqrt{1 + \mu_j^2}}{(\mu_j^2 + \lambda_j^4)(\lambda_j^2 + \mu_j^4)}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \beta^2} = \frac{\mu_j^5 \lambda_j \sqrt{1 + \lambda_j^2}}{(\lambda_j^2 + \mu_j^4)(\lambda_j^4 + \mu_j^2)}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \beta \partial \alpha} = 0, \tag{20}$$

所以 σ 的 Hessian 阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_j^5 \mu_j \sqrt{1 + \mu_j^2}}{(\mu_j^2 + \lambda_j^4)(\lambda_j^2 + \mu_j^4)} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_j^5 \lambda_j \sqrt{1 + \lambda_j^2}}{(\lambda_j^2 + \mu_j^4)(\lambda_j^4 + \mu_j^2)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

为正定矩阵, σ 在 $\alpha^* = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j}, \beta^* = \frac{\lambda_j^2}{\mu_j}$ 取得最小值, 证毕.

2 数值实验

在本节中, 执行两个数值实例来说明理论结果. 迭代次数表示为 n_{IT} , 计算时间以 s 为单位, 表示为 t_{CPU} , 以 $RES = \|b - Ax^{(k)}\|_2$ 为残差. 在实际计算中, 迭代初始点从零向量开始, 如果当前迭代满足 $ERR \leq 10^{-6}$ 或超过规定的迭代步骤 $k = 500$ 的次数, 则迭代终止, 其中 $ERR = \frac{\|b - Ax^{(k)}\|_2}{\|b\|_2}$. 所有实验都在 MATLAB



(版本 9.0.0.341360(R2016a))中进行,机器精度为 10^{-16} ,所有实验都在 3.20 GHz 中央处理器(AMD Ryzen 7 5800H)、16.0 G 内存和 Win10 操作系统的个人电脑中进行.

2.1 例子 1^{[2]107}

将线性方程组(2)写成以下形式:

$$[(-w^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) + i(w\mathbf{C}_V + \mathbf{C}_H)]x = b.$$

式中 \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 是惯性和刚度矩阵, \mathbf{C}_V 和 \mathbf{C}_H 分别是黏性和滞后阻尼矩阵, w 是驱动圆周率. 取 $\mathbf{C}_H = \mu\mathbf{K}$, 其中 μ 是阻尼系数, $\mathbf{M} = \mathbf{I}, \mathbf{C}_V = 10\mathbf{I}, \mathbf{K}$ 是逼近具有齐次狄利克雷边界条件的负拉普拉斯算子的五点中心差分矩阵. 在单位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的均匀网格上, 网格大小 $h = \frac{1}{m+1}$, 矩阵 $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 具有张量积形式, $\mathbf{K} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_m \otimes \mathbf{I}$, 其中 $\mathbf{B}_m = h^{-2} \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbf{R}^{m \times m}$. \mathbf{K} 是一个 $n \times n$ 块对角矩阵, $n = m^2$. 此外, 令 $w = \pi, \mu = 0.02$, 右侧向量 $b = (1 + i)\mathbf{A}\mathbf{I}$, 其中 \mathbf{I} 是元素都为 1 的向量. 将两边乘 h^2 来规范化方程组. 事实上, 这种复杂的林耳方程组系统出现在 n 自由度 (n -DOF) 线性方程组的直接频域分析中.

表 1 中, α, β 值均是在定理 3 的基础上实验迭代取得的最优参数. 此表说明了 $m = 16, m = 32, m = 64, m = 128$ 时, TMHSS 实值迭代方法相对于 α, β 的收敛行为. 显然, 从图 1 中看出, TMHSS 实值法的迭代次数总是低于 MHSS 方法, 这证实了 TMHSS 方法具有更快的收敛速度.

图 1 表示了当 $m = 16$ 时, MHSS 和 TMHSS 实值迭代法相对于参数 α 的收敛行为. 把参数 β 选择为实验的最优参数 β_{exp} , 从图中可以看出, TMHSS 实值迭代法总是比 MHSS 迭代法收敛得快.

表 1 例子 1 MHSS 和 TMHSS 的 $n_{\text{IT}}, t_{\text{CPU}}$

$m \times m$	MHSS			TMHSS			
	α_{opt}	n_{IT}	t_{CPU}	α_{opt}	β_{opt}	n_{IT}	t_{CPU}
16 × 16	0.518	53	0.012	2.78	7.89	45	0.019
32 × 32	0.269	86	0.050	2.45	7.67	45	0.076
64 × 64	0.052	90	0.434	2.21	6.91	43	0.574
128 × 128	0.021	99	3.903	1.96	6.22	42	3.421

图 2 表示当 $m = 16$ 时, MHSS 和 TMHSS 实值迭代法相对于参数 β 的收敛行为. 把参数 α 选择为实验的最优参数 β_{exp} , 从图中可以看出, TMHSS 实值迭代法总是比 MHSS 迭代法收敛得快.

图 3 中, 针对例子描述了 TMHSS 实值迭代法当 $m = 16$ 时的 n_{IT} 相对于 α, β 的三维关系图, 可以看出 α 在 2.5 ~ 3, β 在 6 ~ 8 变化较大, α, β 趋于 1 时迭代次数较少. 实验表明, TMHSS 在选择适当参数时是优于 MHSS 迭代法的.

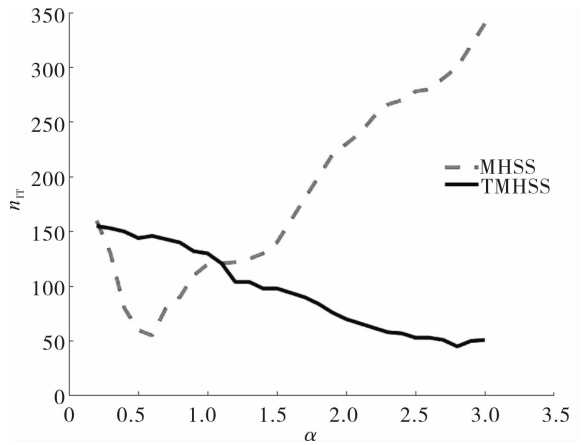


图 1 例子 1 中 MHSS, TMHSS 当 $m = 16$ 时的迭代次数

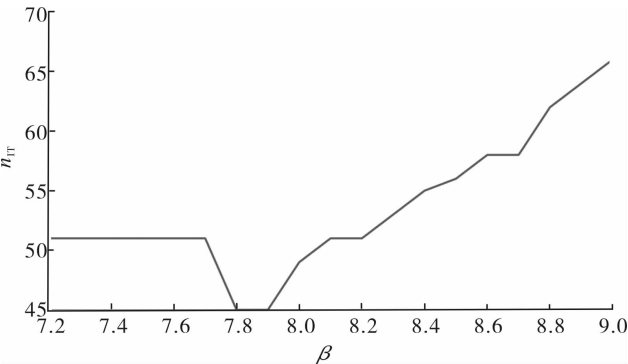


图 2 例子 1 中 TMHSS 当 $m = 16$ 时的迭代次数

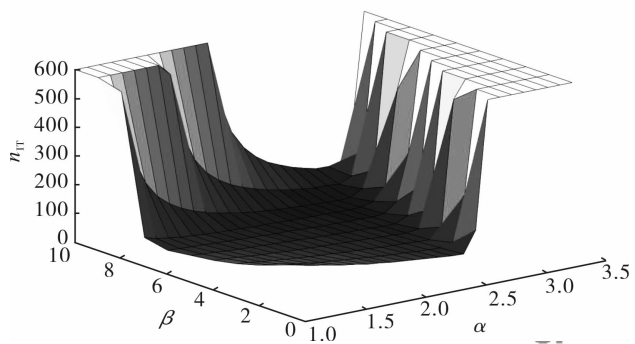


图 3 例子 1 中 TMHSS 当 $m = 16$ 时的迭代次数

2.2 例子 2^{[2]109}

考虑线性方程组 (2) 的形式为 $(W + iT)x = b$, 其中 $T = I \otimes V + V \otimes I, W = 10(I \otimes V_c + V_c \otimes I) + 9(e_1 e_m^T + e_m + e_1^T) \otimes I, V = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbf{R}^{m \times m}, V_c = V - e_1 e_m^T + e_m + e_1^T \in \mathbf{R}^{m \times m}, e_1, e_m$ 是 \mathbf{R}^m 中第一项与最后一项为 1 的单位向量. 取右边的向量 $b = (1 + i)AI$, 其中 I 是全 1 向量.

T 和 W 分别对应于单元正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的均匀网格上, 网格大小 $h = \frac{1}{m+1}$, 具有齐次 Dirichlet 边界条件和周期边界条件的近似负拉普拉斯算子的五点中心差分矩阵. 尽管这个例子是人为构建的, 但它对迭代求解者来说相当具有挑战性, 因此将其包含在测试中.

表 2 中 α, β 值均为在定理 3 的基础上实验迭代取得的最优参数. 此表说明了 $m = 16, m = 32, m = 64, m = 128$ 时, TMHSS 实值迭代方法相对于 α, β 的收敛行为. 显然, 从图 4 中看出, TMHSS 实值法的迭代次数总是低于 MHSS 方法, 这证实了 TMHSS 方法具有更快的收敛速度.

表 2 例子 2 MHSS 和 TMHSS 的 n_{IT}, t_{CPU}

$m \times m$	MHSS			TMHSS			
	α_{opt}	n_{IT}	t_{CPU}	α_{opt}	β_{opt}	n_{IT}	t_{CPU}
16 × 16	1.61	53	0.21	1.12	9.72	47	0.11
32 × 32	1.01	76	0.75	4.31	2.12	45	0.27
64 × 64	0.53	130	1.34	2.76	7.91	50	1.56
128 × 128	0.26	246	2.96	0.26	3.42	62	2.32

图 4 表示当 $m = 16$ 时, MHSS 和 TMHSS 实值迭代法相对于参数 α 的收敛行为. 把参数 β 选择为实验的最优参数 β_{exp} , 从图中可以看出, TMHSS 实值迭代法总是比 MHSS 迭代法收敛得快.

图 5 中, 针对例子描述了 TMHSS 实值迭代法当 $m = 16$ 时的 n_{IT} 相对于 α, β 的三维关系图, 可以看出 α 在 1 ~ 1.2, β 在 8 ~ 9 迭代次数较少. 实验表明, TMHSS 在选择适当参数时是优于 MHSS 迭代法的.

3 结论

提出了大型稀疏复对称线性方程组 $(W + iT)x = b$ 的双参数 MHSS 实值迭代方法, 其中 W 和 T 是实对称正定矩阵. 研究了它们的收敛性质及最优的参数选择, 通过 2 个数值实验将 TMHSS 实值迭代方法与 MHSS 迭代法比较, 证明在收敛性和稳定性上都优于 MHSS 实值迭代方法.

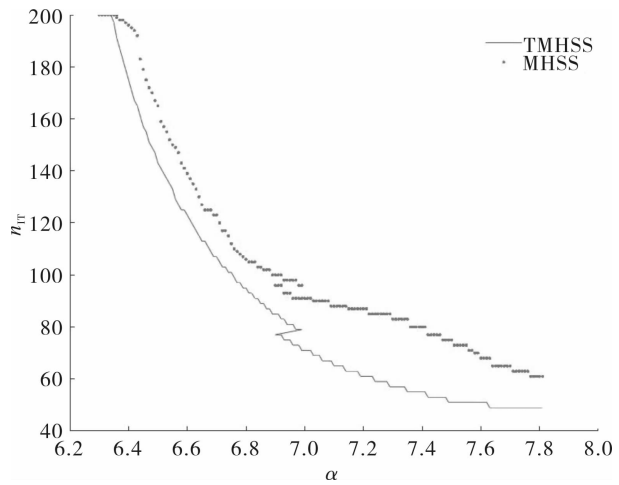


图 4 MHSS, TMHSS 当 $m = 16$ 时的迭代次数

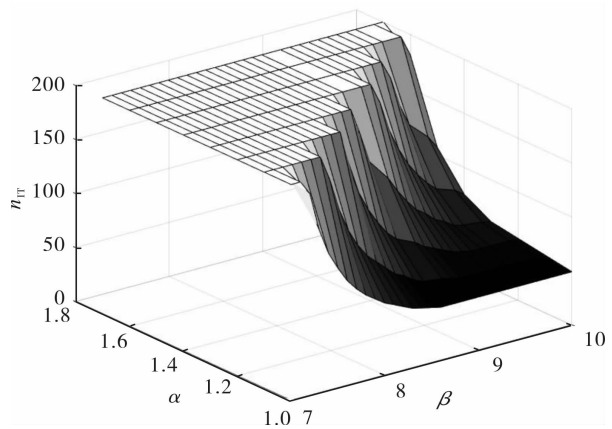


图 5 TMHSS 当 $m = 16$ 时的迭代次数

参考文献:

[1] AXELSSON O, KUCHEROV A. Real valued iterative methods for solving complex symmetric linear systems[J]. Numer Linear



- Algebra Appl,2000,7:197 – 218.
- [2] BAI Z Z, BENZI M, CHEN F. Modified HSS iteration methods for a class of complex symmetric linear systems[J]. Computing, 2010,87.
- [3] BENZI M, BERTACCINI D. Block preconditioning of real-valued iterative algorithms for complex linear systems[J]. IMA J Numer Anal,2008,28:598 – 618.
- [4] BERTACCINI D. Efficient solvers for sequences of complex symmetric linear systems[J]. Electron Trans Numer Anal,2004,18:49 – 64.
- [5] BAI Z Z, GOLUB G H, NG M K. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2003,24.
- [6] BAI Z Z, GOLUB G H, NG M K. On inexact Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems [J]. Linear Algebra and Its Applications,2008,428.
- [7] BAI Z Z, PARLETT B N, WANG Z Q. On generalized successive overrelaxation methods for augmented linear systems [J]. Numerische Mathematik,2005,102:1 – 38.
- [8] GOLUB G H, WU X, YUAN J Y. SOR-like methods for augmented systems [J]. BIT Numerical Mathematics,2001,41:71 – 85.
- [9] HEZARI D, EDALATPOUR V, SALKUYEK D K. Preconditioned GSOR iterative method for a class of complex symmetric system of linear equations [J]. Numerical Linear Algebra with Applications,2015,22:761 – 776.
- [10] BAI Z Z, BENZI M, CHEN F, et al. Preconditioned MHSS iteration methods for a class of block two-by-two linear systems with applications to distributed control problems [J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2013,33:343 – 369.
- [11] BAI Z Z. Rotated block triangular preconditioning based on PMHSS[J]. Science China Mathematics,2013,56:2523 – 2538.
- [12] BAI Z Z, CHEN F, WANG Z Q. Additive block diagonal preconditioning for block two-by-two linear systems of skew-Hamiltonian coefficient matrices[J]. Numerical Algorithms,2013,62:655 – 675.
- [13] SAAD Y. Iterative methods for sparse linear systems [M/OL]. <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898718003>.
- [14] GREENBAUM A. Iterative methods for solving linear systems [M/OL]. <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611970937>.
- [15] AXELSSON O, KUCHEROV A. Real valued iterative methods for solving complex symmetric linear systems[J]. Numerical Linear Algebra with Applications,2000,7:197 – 218.
- [16] AXELSSON O, NEYTICHEVA M, AHMAD B. A comparison of iterative methods to solve complex valued linear algebraic systems[J]. Numerical Algorithms,2014,66:811 – 841.
- [17] ZHANG J H, DAI H. A new block preconditioner for complex symmetric indefinite linear systems[J]. Numerical Algorithms, 2017,74:889 – 903.
- [18] ZHANG G F, ZHENG Z. A parameterized splitting iteration method for complex symmetric linear systems[J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,2014,31:265 – 278.

(责任编辑:王彦江)

