稳定映射芽的分类

张晓雪
（吉林师范大学 数学与计算机学院，吉林 长春 130000）

摘　　要：关于光滑映射芽稳定性的讨论一直是奇点理论的重要部分. 着重讨论稳定映射芽，描述了稳定映射芽的定义，系统总结了稳定映射芽的特征，通过稳定芽的基本分类定理，用一定的实代数对其进行分类. 应用稳定芽分类的基本理论和映射芽的 Boardman 符号，给出了几个关于稳定芽分类的具体例子，并讨论了几种在稳定映射下可能出现的奇点类型.

关 键 词：稳定映射芽；奇点理论；接触等价；通用开折

中图分类号：O177.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673 - 1670(2023)05 - 0008 - 07

0　引言

奇点理论在分析学科中是一个新的分支学科. 20 世纪 30 年代，莫尔斯发表了临界点理论；20 世纪 40 年代，惠特尼(H. Whitney)发表了微分流形嵌入、浸入的奇点有关的研究等. 奇点理论的研究目前已有大量的成果，光滑函数芽是奇点理论需要研究的重要问题，Whitney 已经证明：R^n 中的任意闭子集都可以为 C^∞ 函数 $R^n \to R$ 的零点集. 如果 R^n 映入 R^p 的 C^∞ 的映射等价，则微分同胚的奇点集一定是存在的. 根据前面提到的 Whitney 定理证明 R^n 中的任意闭子集都可以是某种 C^∞ 映射的奇点集，因此 C^∞ 映射的分类比起所有闭集的分类范围更广. 显然这样的分类难以解决，所以研究中重要的是稳定的映射以及稳定的映射芽. 近年来，已经有许多数学工作者对其进行了深入的研究，如玛瑟在稳定性方面的研究，阿诺尔德在奇点分类方面的研究. 李养成[1]313、梁琼初等[2]、刘海明等[3]和孙伟志等[4]对稳定映射芽的分类和相对映射芽的通用形变做了一定的探讨和总结. 郭瑞芝等[5-6]对相对稳定映射芽的性质做了一定的研究，讨论了映射芽开折相对稳定的各种定义和结论. 石昌梅等[7-8]论述了映射芽开折相对无穷小稳定性相关的概念，得到了开折与相对无穷小稳定的若干等价条件. 何伟[9]和岳大川[10]对相对映射芽的有限决定性和稳定性做了简单研究. 张国滨、余建明[11]和甘文良[12]对光滑函数芽开折和高余维光滑函数芽的稳定性进行分类，探讨了稳定性和无穷小稳定之间的重要联系. 这说明映射芽的稳定性尤其重要，因此，以下主要针对稳定映射芽的分类问题进行研究.

1　预备知识

定义 1　设有两个 C^∞ 映射芽 $f,g:(R^n,0)\to(R^p,0)$. 如果存在微分同胚芽 $\phi:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 和 $\varphi:(R^n,0)\to(R^p,0)$，使得 $g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$，则说 f 与 g 是左右等价的，或依 Mather 的说法，f 与 g 是 A - 等价的，记为 $f\tilde{A}g$.

定义 2　设 $\phi\in K, f\in\varepsilon^0(n,p)$，则 $\phi\cdot f\in\varepsilon^0(n,p)$，依下列公式给出：

$$(1,\phi\cdot f)=\varphi\circ(1,f)\circ h^{-1}. \tag{1}$$

其中，$1:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 为恒同映射芽，则有

$$\phi(\mathrm{graph}\, f)=\mathrm{graph}\, f(\phi\cdot f). \tag{2}$$

若 $\phi(x,y)=(h(x),\varphi(x,y))$，并且令 $g=\phi\cdot f$，则由(1)可得

$$g\circ h(x)=\Psi(x,f(x)). \tag{3}$$

式(1) ~ (3)描述了群 K 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用，式(3)说明集 $\{f\in 0\}\subset R^n$ 经微分同胚 h 变换为集 $\{g\in 0\}\subset R^n$，因此 graph f 与 graph h 同 $R^n\times\{0\}$ 有相同的接触. 不仅如此，式(2)说明 ϕ 将 $R^n\times R^p$ 的 n 维子流形 graph f 变换为另一子流形，该子流形是令 $g=\phi\cdot f$ 的图. 所以，把群 K 叫做接触等价群，$K\cdot f$ 叫做 $\varepsilon^0(n,p)$ 中经过 f 的接触轨道

收稿日期：2023 - 06 - 06
作者简介：张晓雪(1998—　)，女，吉林省辽源市人，吉林师范大学数学与计算机学院基础数学专业硕士研究生，主要从事奇点理论研究.

或K-轨道. 属于同一K轨道的二映射芽称为K-等价的.

定义3[1]287　C^∞ 映射芽$f:(R^n,0)\to(R^p,0)$是稳定的,则它是无穷小稳定的,反之也成立,即$T_\varepsilon A(f)=\varepsilon^0(n,p)$,其中$T_\varepsilon A(f)$表示$\varepsilon^0(n,p)$在群$A$作用下于$f$处的切空间.

定义4[1]281　设C^∞ 映射芽$f:(R^n,0)\to(R^p,0)$属于$\sum^{n=r}$,$0<r<\min(n,p)$,则存在A-等价于G的C^∞ 映射芽$F:(R^n,0)\to(R^p,0)$,使F是某一秩为0的芽$f_0:(R^{n-r},0)\to(R^{p-r},0)$的$r$-参数开折.

定义5　设$f:(R^n,0)\to(R^p,0)$为C^∞ 映射芽,则轨道$A\cdot f$在f处的切空间$TA(f)$为$TA(f)=\{Df\cdot X+Y\circ f\mid X\in\mu_n\cdot V(R^n),Y\in\mu_p\cdot V(R^p)\}$.

定义6　若$f\in\varepsilon^0(n,p)$,$TA(f)=\varepsilon^0(n,p)$,则f为无穷小稳定芽.

定义7　设$f,g:R^n\to R^p$为两个C^∞ 映射. 若有微分同胚$h:R^n\to R^p$和$k:R^n\to R^p$,使得$g=k\circ f\circ h^{-1}$,即使得下列图表可换,则说f与g是A-等价的.

$$\begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{f} & R^p \\ h\downarrow & & \downarrow k \\ R^n & \xrightarrow{g} & R^p \end{array}$$

定义8　设$f:(R^n,0)\to(R^p,0)$为C^∞ 映射芽. f的符号Boardman定义为理想$I(f)$的Boardman符号,其中f的分量$f_1,\cdots,f_p$生成ε_n的理想$I(f)$.

定义9　如果二映射芽是K-等价的,则它们具有相同的Boardman符号.

定理1　无穷小稳定映射芽一定是稳定芽.

证明　设$f\in\varepsilon^0(n,p)$为无穷小稳定芽,则$T_tA(f_0)=\varepsilon(n,p)$. 所以$f$是它自身的万有开折,因此$f$的任意开折必$A$-同构于$f$的常值开折,$f$是$A$-稳定的.

2　稳定函数芽的分类

奇点理论的一个基本问题就是光滑函数的稳定性,基本分类定理在稳定映射芽的分类研究中是一个很重要的理论基础,通常是利用映射芽的稳定开折来论述,所以,稳定映射芽的分类在各种研究中起到非常重要的作用.

2.1　稳定映射芽的几何特征

定理2　设稳定映射芽$f:(R^n,0)\to(R^p,0)$在点$0\in R^n$的秩为r,则映射$j_0^1f:(R^n,0)\to j^{1,0}_{n,p}$,$x\mapsto j_0^1f(x)=Df(x)$在点0横截于子流形$\sum^{n-r}\subset j^{1,0}_{n,p}$. 设$f\in\varepsilon^0(n,p)$为稳定芽,其秩为$r$,则$(n-r)(p-r)\leqslant n$.

证明　由定理2,$Co\ \dim\sum^{n-r}\leqslant n$,即$(n-r)(p-r)\leqslant n$.

例1　若稳定芽$f\in\varepsilon^0(n,p)$的秩$r=0$,则由上式不等式知,$p=1$. 此时f必为Morse芽.

例2　上式不等式对稳定芽f的秩r给出了较强的限制,如:

1) 若$n=p=2$,则$r\geqslant n$.

2) 若$n=p=3$或$n=p=4$,则$r\geqslant 2$.

3) 若$n=2,p=3$则$r\geqslant 1$.

定理3　设$F:(R^r\times R^n,0)\to(R^r\times R^p,0)$,$(u,x)\mapsto(u,f_u(x)=f(u,y))$是芽$f_0:(R^n,0)\to(R^p,0)$,$f(0,x)=f_0(x)$的$r$-参数开折,$f_0$在点$0\in R^n$的秩为0,并且$\dot F_i(0)=0(i=1,\cdots,r)$,对任意正整数$s$,定义$j_0^sf:(R^r\times R^n,0)\to J^{s,0}_{n,p}$为$j_0^sf(u,x)=(f_u,f_u(x))$的$s$阶Taylor多项式. 则$F$是稳定芽当且仅当$j_0^{r+1}f:(R^r\times R^n,0)\to J^{r+1,0}_{n,p}$在$R^r\times R^n$的原点横截于接触轨道$K^{r+1}\cdot j_0^{r+1}f_0\subset J^{r+1,0}_{n,p}$.

证明　由定理3知,F是稳定芽当且仅当

$$TK(f_0)+R\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot F_1,\cdots,\dot F_r\right\}+\mu_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)=\varepsilon^0(n,p).$$

$j_0^{r+1}f:(R^r\times R^n,0)\to J^{r+1,0}_{n,p}$在点$(0,0)\in R^r\times R^n$横截于$K^{r+1}\cdot j_0^{r+1}f_0$是指

$$Dj_0^{r+1}f(0,0)R^r\times R^n+T_{j^{r+1}f}(K^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0)=J^{r+1,0}_{n,p},$$

而

$$Dj_0^{r+1}f(0,0)R^r\times R^n=R\left\{\frac{\partial j_0^{r+1}}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial j_0^{r+1}}{\partial u_r},\frac{\partial j_0^{r+1}}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial j_0^{r+1}}{\partial x_n}\right\}.$$

其中括号内的所有导数均在点$(0,0)\in R^r\times R^n$取值,又因为

$$\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_i}(0,0)=j_0^{r+1}\dot F_i,(i=1,\cdots,r),$$

$$\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_j}(0,0)=j_0^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_j},(i=1,\cdots,r),$$

$$T_{j^{r+1}f_0}(K^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0)=j_0^{r+1}(TK(f_0)),$$

所以

$$j_0^{r+1}(TK(f_0))+$$

$$R\left\{j_0^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial u_1},\cdots,j_0^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial u_r},j_0^{r+1}\dot{F}_1,\cdots,j_0^{r+1}\dot{F}_r\right\}=J_{n,p}^{r+1,0},$$

即

$$j_0^{r+1}(TK(f_0)+R\left\{\frac{\partial f_0}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial u_r},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\})=$$

$$J^{r+1}(\varepsilon^0(n,p)),$$

结论得证.

2.2 稳定映射芽的判别

由定义 4 可知,秩为 r 的映射芽 $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 可看作是秩为 0 的映射芽 $f_0:(R^{n-r},0)\to(R^{p-r},0)$ 的 r - 参数开折,因此 F 的稳定性能用 f_0 以及 F 的初始速度具有的性质来进行描述和判别.

定理 4 设 $f_0:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,$F:(R^r\times R^n,0)\to(R^r\times R^p,0)$ 为 f_0 的 r - 参数开折,因而 $f(0,x)=f_0(x)$. 那么若 F 为 f_0 的通用开折,则 F 的初始速度 $\dot{F}_i(i=1,\cdots,r)$ 满足下列条件:

$$T_tA(f)+R\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^0(n,p),$$

其中 $\dot{F}_i(x)=\frac{\partial f}{\partial \mu_i}(0,x)(i=1,\cdots,r)$.

定理 5 设 $F:(R^r\times R^n,0)\to(R^r\times R^p,0)$,$(u,x)\mapsto(u,f(u,y))$ 是芽

$$f_0:(R^n,0)\to(R^p,0),f(0,x)=f_0(x)$$

的 r - 参数开折,若 F 为稳定芽,则满足

$$T_tA(f_0)+\varepsilon_p\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^0(n,p),$$

这里 $\dot{F}_i(x)=\frac{\partial f}{\partial \mu_i}(0,x)(i=1,\cdots,r)$ 表示 F 的初始速度$(i=1,\cdots,r)$.

证明 由定理 4 知

$$T_tA(F)=(\varepsilon_{u\cdot x})^{\times(r+p)}.$$

式中 $\varepsilon_{u\cdot x}$(及 $\varepsilon_{u\cdot v}$)表示$(R^r\times R^n,0)$(及$(R^r\times R^p,0)$)上的函数芽环.

将$(R^r\times R^n,0)$上的向量场芽 X 记为

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}\xi\\X\end{bmatrix},$$

式中 ξ 为 $\bar{X}$ 在参数空间 R^r 中的分量,X 为 $\bar{X}$ 在 R^n 中的分量. 类似地,$(R^r\times R^p,0)$上的向量场芽 $\bar{Y}$ 写为

$$\bar{Y}=\begin{bmatrix}\eta\\Y\end{bmatrix},$$

式中 η 和 Y 分别为 $\bar{Y}$ 在 R^r 和 R^p 中的分量.

$T_tA(F)=(\varepsilon_{u,x})^{\times(r+p)}$ 对任意 $\bar{Z}=\begin{bmatrix}\zeta\\Z\end{bmatrix}\in(\varepsilon_{u,x})^{\times(r+p)}$,其中 ζ,Z 分别为 $\bar{Z}$ 在 R^r 和 R^p 中的分量,下列方程

$$DF\cdot\bar{X}+\bar{Y}\circ F=\bar{Z}$$

有解 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$,该方程可写成下列形式:

$$\begin{bmatrix} I & 0\\ \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial u_r} & \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi\\X\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta\circ F\\Y\circ F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\zeta\\Z\end{bmatrix},$$

或

$$\begin{cases}\xi+\eta\circ F=\zeta,\\ \sum_{i=1}^{r}\xi_i\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\xi=\zeta-\eta\circ F,\\ -\sum_{i=1}^{r}(\eta_i\circ F)\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=\\ \qquad Z-\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\frac{\partial f}{\partial u_i},\end{cases}$$

式中 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\in(\varepsilon_{u\cdot x})^{\times r}$,$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_r)\in(\varepsilon_{u\cdot v})^{\times r}$,$X=(X_1,\cdots,X_n)\in(\varepsilon_{u,x})^{\times n}$.

由上可见,方程 $DF\cdot\bar{X}+\bar{Y}\circ F=\bar{Z}$ 对任意 $\bar{Z}$ 有解 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 当且仅当下列方程

$$-\sum_{i=1}^{r}(\eta_i\circ F)\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z$$

对任意 $Z(\varepsilon_{u,x})^{\times r}$ 有解(X,Y,η). 而集为

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F\mid X_j\in\varepsilon_{u,x},Y\in(\varepsilon_{u,y})^{\times p}\right\}=$$

$$\tilde{T}_tA(F).$$

故 $M=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}/\tilde{T}_tA(F)$ 作为 $\varepsilon_{u,y}$ - 模是有限生成的,生成元为 $\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}$. 从而有

$$M_0=M/\mu_n\cong(\varepsilon_x)^{\times p}/T_tA(f_0)$$

作为 ε_y - 模是有限生成的,生成元为 $\dot{F}_i(x)=\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x,)(i=1,\cdots,r)$,从而得证.

例 3 设 $f_0:(R^2,0)\to(R^2,0)$ 定义为 $f_0(x,y)=(x^2,y^2)$,

$$T_tA(f_0)+\varepsilon_2\{h_1,h_2\}=\varepsilon(2,2),$$

式中 $h_1=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}$,$h_2=\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}$. 由定理 5 知,$f_0$ 的 2 - 参

数开折

$$F:(R^2\times R^2,0)\to(R^2\times R^2,0),$$
$$(u,v,x,y)\mapsto(u,v,x^2+uy,y^2+vx)$$

是稳定芽.

定理6　设 $F(u,x)=(u,f(u,x))$ 是 $f_0(x)\in\varepsilon^0(n,p)$ 的 r - 参数开折,并且 f 在点 $0\in R^n$ 的秩为 $0,\dot{F}_i(0)=0(i=1,\cdots,r)$,则下列条件互相等价:

(i) F 是稳定芽,

(ii) $T_tK(f_0)+R\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^0(n,p)$,

(iii) $T_tK(f_0)+\mu_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)+R\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^0(n,p)$.

定理7　设稳定芽 F 在点 $0\in R^r\times R^n$ 的秩为 r,则满足 $j^{r+2}G=j^{r+2}F$ 的每一芽 G 都是稳定的.

2.3　基本分类定理

设 $F,G:(R^{r\times n},0)\to(R^{r\times p},0)$ 是稳定芽,若 F,G 在原点的秩不相等,则不是 A - 等价,因此利用秩可以区分稳定芽. 假定稳定芽 $F,G\in\varepsilon^0(r+n,r+p)$ 在原点具有相同的秩 $r\geqslant0$,

$$F(u,x)=(u,f(u,x)),f_u(x)=f(u,x),$$
$$G(u,x)=(u,g(u,x)),g_u(x)=g(u,x).$$

其中 $u\in R^r,x\in R^n$ 并且 $f(u,x),g(u,x)\in R^p,f_0$,$g_0\in\varepsilon^0(n,p)$,点 $0\in R^n$ 的秩为0. 假定开折的初始速度 $\dot{F}_i,\dot{G}_j\in\varepsilon^0(n,p)$,令 $\varepsilon^0(r+n,r+p)$ 中的子集

$$S(r,n,p)=\{F:(R^r\times R^n,0)\to(R^r\times R^p,0)$$

为稳定芽,并且 $rk_0F=r\}$.

对于 $F\in S(r,n,p)$,据定理6,由 $f(0,x)=f_0(x)$ 定义的 $f\in\varepsilon^0(n,p)$ 满足

$$T_tK(f_0)+R\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^0(n,p),$$

或

$$TK(f_0)+R\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\}=\varepsilon^0(n,p).$$

因此 $T_tK(f_0)$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 中的余维数不大于 $n+r$. 令 $\varepsilon^0(n,p)$ 中的子集

$$K(r,n,p)=\{f\in\varepsilon^0(n,p)\mid rk_0F=r,$$
$$\dim_R\varepsilon^0(n,p)/TK(f_0)\leqslant r+n\}.$$

定理8　稳定映射芽 F 和 G 是 A - 等价的,则 f_0 和 g_0 是 K - 等价的,反之也成立.

该定理表明,对应 $S(r,n,p)\to K(r,n,p),F\mapsto f_0$,诱导出 $S(r,n,p)$ 中成员的 A - 等价类所成之集到 $K(r,n,p)$ 中成员的 K - 等价类所成之集的双射.

定理9　$S(r,n,p)$ 中的每一芽 F 和它在点 $0\in R^{r+n}$ 的 $(r+2)$ 阶 Taylor 多项式芽是 A - 等价的.

定理10　设 $F,G\in S(r,n,p)$,若 F 与 G 是 A - 等价的,则实代数 $Q_{r+2}(F)$ 与 $Q_{r+2}(G)$ 是同构的,反之也成立.

2.4　稳定映射芽的简单分类

稳定映射芽分类的基本理论说明稳定芽按 A - 等价分类可相当于映射芽按 K - 等价进行分类. 如果对稳定映射芽的维数及 Boardman 符号作适当限制,并应用映射芽 K - 等价的结论,则可以对稳定映射芽分类的结果进行一些简单情形的讨论.

设 $f:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,$n\leqslant p$. 若 f 是非奇异芽因而是浸入芽,则 f 必属于 $\sum^0$ 类,并且明显是稳定芽.

下面研究具有 $\sum^1$ 类奇点的稳定芽.

定理11　设 $n\leqslant p$,若 $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 为属于 $\sum^1$ 类的稳定芽,则 f 必为 $\sum^{1_k,0}$ 类奇点,其中整数 k 合于 $1\leqslant k\leqslant n/q(q=p-n+1)$. 进而可得到 f 必 A - 等价于芽 $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$,其分量为:

$$\begin{cases} G_i=u_i, & 1\leqslant i\leqslant n-1;\\ G_{n+i}=\sum\limits_{j=1}^{k}u_{ik+j}x^j, & 0\leqslant i\leqslant q-2;\\ G_p=\sum\limits_{j=1}^{k-1}u_{(q-1)k+j}x^j+x^{k+1}. \end{cases}$$

这里 $u_1,\cdots,u_{n-1},x$ 为 R^n 的坐标.

定理12　设 $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 为属于 $\sum^1$ 类的稳定芽,则它是 $\sum^{1_k,0}$ 类奇点 $(1\leqslant k\leqslant n)$. 并且 A - 等价于芽 $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$,分量为

$$\begin{cases} G_i=u_i, & 1\leqslant i\leqslant n-1;\\ G_n=\sum\limits_{j=1}^{k-1}u_jx^j+x^{k+1}. \end{cases}$$

即广义 Whitney 映射. 则当 $n=2,k=2$ 时便是 Whitney 尖点映射.

在 $n\geqslant p$ 的情形下讨论稳定芽 $(R^n,0)\to(R^p,0)$. 首先是非奇异芽,非奇异芽必属于 $\sum^{n-p}$ 类,所

以是稳定的，其标准形为投影 $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_p)$. 然后讨论具有 $\sum^{n-p+1}$ 类奇点的稳定芽，由稳定芽分类的基本理论推出这样的芽 A 等价于某一芽 $f:(R^m,0)\to(R,0)$ 的 $(p-1)$ - 参数开折，这里 $m=n-p+1$. 又因为芽 f 也属于 $\sum^{n-p+1}$ 类并且具有有限 K - 余维. 通过对函数芽分类的讨论，了解到 f 的余秩 c 和二阶 Boardman 符号都依赖于 f 的 2 - 导网，所以它们之间有一定关系.

定理 13　设芽 $f:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 是 $\sum^m$ 类奇点，若 f 属于 $\sum^{m,c}$ 类，则 f 有余秩 c，反之也成立.

定理 14　设 $f\in\mu_n^2$ 具有有限 K - 余维，它的余秩为 c，则 f K - 等价于芽

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_c)\pm x_{c+1}^2\pm\cdots\pm x_n^2.$$

这里 $g\in\mu_c^3$.

特别当 f 的余秩为 0 或 1 时，有以下情况.

定理 15　设 $n\geqslant p$. 若稳定芽 $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 属于 $\sum^{n-p+1,0}$ 类，则 F A - 等价于芽 $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$，其分量为：

$$G_i=u_i,1\leqslant i\leqslant p-1;$$
$$G_p=\pm x_p^2\pm\cdots\pm x_{n-1}^2\pm x_n^2.$$

定理 16　设 $n\geqslant p$. 如果 $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 为属于 $\sum^{n-p+1,1}$ 类的稳定芽，那么 F 必属于 $\sum^{n-p+1,\cdots,1,0}$ 类，其中 1 重复出现 k 次，$1\leqslant k\leqslant p-1$. 并且在这一情形下，$F$ A 等价于 $G:(R^n,0)\to(R^p,p)$，定义为：

$$G_i=u_i,1\leqslant i\leqslant p-1;$$
$$G_p=\pm x_p^2\pm\cdots\pm x_{n-1}^2\pm x_n^{2+k}+\sum_{j=1}^{k}u_jx_n^j.$$

特别地，上述两个定理在等维数 $n=p$ 情形下即为定理 9，因此对等维数情形，接下来简单介绍属于 $\sum^2$ 类的稳定芽.

定理 17　设稳定芽 $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 属于 $\sum^{2,0}$ 类，则它 A - 等价于下列芽 $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$ 之一：

型 $I_{a,b}$ 和

$$II_{a,b}\begin{cases}G_i=u_i,1\leqslant i\leqslant a-1;\\G_{a-1+j}=v_j,1\leqslant j\leqslant b-1;\\G_{a+b-2+k}=w_k,1\leqslant k\leqslant n-(a+b);\\G_{n-1}=xy;\\G_n=x^a+y^b+\sum\limits_{i=1}^{a-1}u_ix^i+\sum\limits_{j=1}^{b-1}v_jy^j.\end{cases}$$

这里 $a+b\leqslant n$.

$$IV_a\begin{cases}G_i=u_i,\quad 1\leqslant i\leqslant a-1;\\G_{a-1+j}=v_j,\quad 1\leqslant j\leqslant a-1;\\G_{2a-2+k}=w_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n-2a;\\G_{n-1}=x^2+y^2;\\G_n=x^a+\sum\limits_{i=1}^{a-1}u_ix^i+\sum\limits_{j=1}^{b-1}v_jx^{j-1}y.\end{cases}$$

这里 $2a\leqslant n$.

2.5　稳定映射芽的奇点分类

通过先前对稳定映射芽特征、分类的描述，对光滑映射芽稳定性与无穷小稳定性之间关系的讨论，接下来对光滑映射引入稳定性概念，并且简单讨论稳定映射的奇点分类.

定义 10　C^∞ 映射 $f:R^n\to R^p$ 叫做稳定映射，如果存在 f 在 $C^\infty(R^n,R^p)$ 中的邻域 U，使得对任意 $g\in U$，g　A - 等价于 f.

从定义 10 可知，所有稳定映射在 $C^\infty(R^n,R^p)$ 中形成一个开集. 所有稳定映射在映射空间 $C^\infty(R^n,R^p)$ 中能构成一个稠密子集.

定义 11　在映射空间 $C^\infty(R^n,R^p)$ 中，所有常态稳定映射组成稠密子集的充要条件是维数对 (n,p) 满足下列条件之一：

(a) $p<7s+8$，当 $s\geqslant4$；

(b) $p<7s+9$，当 $3\geqslant s\geqslant0$；

(c) $p<8$，当 $s=-1$；

(d) $p<6$，当 $s=-2$；

(e) $p<7$，当 $s\leqslant-3$.

其中 $s=p-n$. $f:R^n\to R^p$ 为常态映射是指 f 为连续映射，并且对于 R^p 中的任意紧致子集 C，它在 f 下的原像 $f^{-1}(C)$ 为 R^n 中的紧致子集.

定理 18　在 Boardman 意义下，光滑映射的稳定性是通有性质.

证明　设 $f:R^n\to R^p$ 为稳定映射，k 为正整数. 需证 j_0^kf 横截于所有 Boardman 子流形 $\sum^{i_1,\cdots,i_k}$，这里 $j_0^kf:R^n\to J_{n,p}^{k,0}$ 定义为 $j_0^kf(x)=(f-f(x))$ 的 k 阶 Taylor 多项式. 则集 $D=\{|\,g:R^n\to R^p$ 为 C^∞ 映射 $|\,j_0^kg\pitchfork\sum^{i_1,\cdots,i_k}\}$ 为 $C^\infty(R^n,R^p)$ 中的稠密子集. 因为 f 是稳定的，故存在 f 在 $C^\infty(R^n,R^p)$ 中的邻域 U，使得 U 中的每一 h，A - 等价于 f. 由于 D 是稠密的，可取 $g\in U\cap D$，这意味着 g 与 f 是 A - 等价的，并

且 g 满足横截性条件. 同理 f 也满足横截性条件,结论得证.

定理 19　设 $f:R^n \to R^p$ 为稳定映射,则 f 在任意点 $x \in R^n$ 的芽都是稳定映射芽.

接下来讨论等维数 $n = p$ 情形的奇点类型,对稳定映射 $f:R^n \to R^n$,由定理 15,f 必须横截于一阶 Boardman 子流形 $\sum^i$. 设 $n \leqslant 3$, 因一阶奇点集 $\sum^i(f)$ 的余维数为 i^2,当 $i \geqslant 2$ 时, $\sum^i(f) = \varnothing$,因此只需考虑属于 $\sum^1$ 类的奇点. 而在等维数情形下,奇点集 $\sum^{i_k,0}(f)$ 具有余维 k,所以在 $k \leqslant n$ 时才不为空. 于是由定理 15 和定理 9 有以下结论:

定理 20　设 $n \leqslant 3$,$f:R^n \to R^p$ 为稳定映射,则

(i) 当 $n = 1$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\sum{}^0: y_1 = x_1 \text{(正常点)},$$

$$\sum{}^{1,0}: y_1 = x_1^2 \text{(极小值点)}.$$

(ii) 当 $n = 2$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\sum{}^0 \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \text{(正常点)};$$

$$\sum{}^{1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases} \text{(折叠)};$$

$$\sum{}^{1,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^3 + x_1x_2 \end{cases} \text{(尖点)}.$$

(iii) 当 $n = 3$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽中的一个:

$$\sum{}^0 \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \text{(正常点)};$$

$$\sum{}^{1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^2 \end{cases} \text{(折叠)};$$

$$\sum{}^{1,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^3 + x_1x_3 \end{cases} \text{(尖点)};$$

$$\sum{}^{1,1,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^4 + x_1x_3 + x_2x_3^2 \end{cases} \text{(燕尾)}.$$

当 $n = 4$ 时,稳定映射 $f:R^4 \to R^4$ 不仅有 $\sum^1$ 类奇点,还有 $\sum^2$ 类奇点,但无 $\sum^3$ 类奇点($i \geqslant 3$). 现在 $\sum^2(f)$ 可分解为 $\sum^{2,0}(f)$ 和 $\sum^{2,1}(f)$ 及 $\sum^{2,2}(f)$,其余维数分别为 4,7 和 10,因此只能出现 $\sum^{2,0}$ 类奇点. 应用定理15 和定理9 及定理14 得到下面的结论:

定理 21　设 $f:R^4 \to R^4$ 为稳定映射,则它在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\sum{}^0 \begin{cases} y_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ y_4 = x_4; \end{cases}$$

$$\sum{}^{1,0} \begin{cases} y_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ y_4 = x_4^2; \end{cases}$$

$$\sum{}^{1,1,0} \begin{cases} y_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ y_4 = x_4^3 + x_1x_4; \end{cases}$$

$$\sum{}^{1,1,1,0} \begin{cases} y_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ y_4 = x_4^4 + x_1x_4 + x_2x_4^2; \end{cases}$$

$$\sum{}^{1,1,1,1,0} \begin{cases} y_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ y_4 = x_4^5 + x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_3x_4^3; \end{cases}$$

$$\underset{I_{2,2}}{\sum{}^{2,0}} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3x_4, \\ y_4 = x_3^2 + x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4; \end{cases}$$

$$\underset{II_{2,2}}{\sum{}^{2,0}} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3x_4, \\ y_4 = x_3^2 - x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4. \end{cases}$$

3　结论

研究光滑映射的奇点的基本几何思想其实类似于函数的情形,但两者也有重要的差别. 如在对余维数很小的光滑映射芽进行简单分类时,应限制为具有最低余维数的映射芽,即笔者研究的稳定映射芽. 对于函数芽来说,这一概念指的是非奇异芽,并且当考虑位势芽时为 Morse 芽. 然而对一般的映射芽而言,存在许多种稳定芽,因此稳定映射芽的分类有很大难度,需要具体问题具体分析,所以,在今后的研究中需要关注一些具体的稳定映射芽的分类.

参考文献:

[1]李养成. 光滑映射的奇点理论[M]. 北京:科学出版社,2002.

[2] 梁琼初,李养成. 接触等价下的相对映射芽的通用形变[J]. 株洲工学院学报,2006(4):5 - 7.

[3] 刘海明,孙伟志,苗佳晶. 关于函数芽的相对通用形变与通用形变[J]. 东北师大学报(自然科学版),2009(2):30 - 34.

[4] 孙伟志,高峰,裴东河. K 等价下相对映射芽的通用形变[J]. 数学杂志,2007(4):441 - 446.

[5] 郭瑞芝,李养成. 含两组状态变量等变分歧问题开折的唯一性和稳定性[J]. 高校应用数学学报,2008(1):112 - 120.

[6] 郭瑞芝,刘林. 相对映射芽通用开折的唯一性和稳定性[J]. 东北师大学报(自然科学版),2011(3):32 - 38.

[7]石昌梅,熊宗洪,陈松良. 映射芽的相对无穷小稳定开折的唯一性[J]. 高校应用数学学报,2018(3):265 - 271.

[8] 石昌梅,熊宗洪. 光滑映射芽的相对无穷小稳定性[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2013(4):37 - 39,47.

[9] 何伟. 相对函数芽的有限决定性与多参数等变分歧问题开折的通用性及稳定性[D]. 长沙:中南大学,2008.

[10] 岳大川. 等变相对映射芽在左右等价群下开折的稳定性研究[D]. 长沙:湖南师范大学,2019.

[11] 张国滨,余建明. 光滑映射芽的开折的分级稳定性[J]. 数学学报,2001(4):713 - 726.

[12] 甘文良. 高余维光滑函数芽和强相对稳定映射芽的分类[D]. 长春:东北师范大学,2018.

(责任编辑:王彦江)

Classification of Stable Mapping Buds

ZHANG Xiaoxue

(School of Mathematics and Computer, Jilin Normal University, Changchun, Jilin 130000, China)

Abstract: The stability of smooth mapping sprouts has always been an important part of singularity theory. In fact, people are not interested in all mappings, but what is important is stable mappings. This paper focuses on stable mapping bud. The definition of stable mapping bud is described, and the characteristics of stable mapping bud are summarized systematically. Through the basic classification theorem of stable buds, they are classified by some real algebra. Using the basic theory of stable bud classification and the Boardman symbol of mapping bud, several examples of stable bud classification are given, and several types of singularities that may appear under stable mapping are discussed.

Key words: stable mapping; theory of singularities; contact equivalence; versal unfolding