

# 时间分数阶对流扩散方程的有限点法分析

陈有玲

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:**基于有限差分法得到时间离散格式和利用有限点法建立离散代数系统,提出了数值求解时间分数阶对流扩散方程的无网格有限点法,详细推导了时间离散格式是无条件稳定的和该方法的理论误差估计.数值算例验证了理论结果,并验证了该方法的有效性和收敛性.

**关键词:**无网格有限点法;时间分数阶对流扩散方程;稳定;误差估计

中图分类号:O241.82

文献标识码:A

文章编号:1673-1670(2023)05-0015-08

## 0 引言

对流扩散方程是偏微分方程中一个重要的方程,而分数阶对流扩散方程能够对各种复杂的异常扩散现象<sup>[1-2]</sup>精准刻画.目前可用于求解分数阶对流扩散方程的方法有有限差分法<sup>[3]305,[4]</sup>、有限元法<sup>[5]</sup>、有限体积法<sup>[6]</sup>、隐式无网格方法<sup>[7]</sup>、径向基函数无网格插值法<sup>[8]</sup>等.

传统的基于网格的数值方法无法很好地得到科学和工程领域的一些复杂问题的解,无网格方法<sup>[9]</sup>克服了对于网格的依赖,并且具有较高的计算精度.有限点法<sup>[10]1,[11]</sup>是在散乱的离散点集上,基于移动最小二乘近似构造数值解和配点技术形成离散代数方程组,是一种最流行和最简单的无网格方法,已广泛用于科学工程领域.

针对时间分数阶对流扩散方程提出了一种有限点方法.首先,用 $L2-1_\sigma$ <sup>[12]424</sup>逼近离散 Caputo 分数阶导数,用二阶中心差商离散扩散项和对流项,得到时间离散格式,并对该格式进行稳定性和收敛性分析;其次,用有限点法离散代数系统;再次,借鉴文献<sup>[10]3-6</sup>的思路求解时间分数阶对流扩散方程的快速有限点法的理论误差估计;最后,给出数值验证该方法的有效性和合理性.

## 1 给出问题

考虑以下时间分数阶对流扩散方程的初边值问题:

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) = \lambda \Delta u(x, t) - \gamma \nabla u(x, t) + f(x, t), x \in \Omega, t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t), x = \partial\Omega, t \in (0, T]. \quad (3)$$

式中 $\Omega$ 是求解区域, $\lambda$ 是正扩散项系数, $\gamma$ 是正对流项系数, $\bar{u}(x, t)$ 和 $\varphi(x)$ 是已知函数, $\Delta$ 是拉普拉斯算子, $\nabla$ 是梯度微分算子. ${}_0^C D_t^\alpha u(x, t)$ 是 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 阶 Caputo 分数阶导数,其定义为

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} ds.$$

## 2 时间离散及其稳定性与收敛性分析

### 2.1 时间离散

为了近似 ${}_0^C D_t^\alpha u(x, t)$ ,记 $t_n = n\tau, u^n(x) = u(x, t_n), n = 0, 1, 2, \dots, T/\tau$ ,其中 $\tau > 0$ 是时间步长,取 $\sigma =$



$1 - \alpha/2$ , 则  $t_{n+\sigma} = (n + \sigma)\tau, u(x, t_{n+\sigma}) = u^{n+\sigma}(x)$ , 显然  $u(x, 0) = u^0(x) = \varphi(x)$ . 对 Caputo 导数基于  $L2 - 1_\sigma$  [12]428 插值逼近, 在点  $(x, t_{n-1+\sigma})$  处离散, 有

$${}_0^c D_t^\alpha u^{n-1+\sigma}(x) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n,\alpha)} [u^{n-k}(x) - u^{n-k-1}(x)] + o(\tau^{3-\alpha}), n = 1, 2, \dots, T/\tau. \quad (4)$$

其中  $C_0^{(1,\alpha)} = \sigma^{1-\alpha}, n = 1$ . 当  $n \geq 2$  时,

$$\left. \begin{aligned} C_0^{(n,\alpha)} &= \frac{(1 + \sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}}{2 - \alpha} - \frac{(1 + \sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}}{2}, \\ C_k^{(n,\alpha)} &= \frac{1}{2 - \alpha} [(k + 1 + \sigma)^{2-\alpha} - 2(k + \sigma)^{2-\alpha} + (k - 1 + \sigma)^{2-\alpha}] - \\ &\quad \frac{1}{2} [(k + 1 + \sigma)^{1-\alpha} - 2(k + \sigma)^{1-\alpha} + (k - 1 + \sigma)^{1-\alpha}], \quad 1 \leq k \leq n - 2, \\ C_{n-1}^{(n,\alpha)} &= \frac{1}{2} [3(n - 1 + \sigma)^{1-\alpha} - (n - 2 + \sigma)^{1-\alpha}] - \frac{1}{2 - \alpha} [(n - 1 + \sigma)^{2-\alpha} - (n - 2 + \sigma)^{2-\alpha}]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

用二阶中心差商逼近扩散项和对流项, 得

$$\Delta u^{n-1+\sigma}(x) = (1 - \sigma)\Delta u^{n-1}(x) + \sigma\Delta u^n(x) + o(\tau^2), \quad (6)$$

$$\nabla u^{n-1+\sigma}(x) = (1 - \sigma)\nabla u^{n-1}(x) + \sigma\nabla u^n(x) + o(\tau^2). \quad (7)$$

将式(4) 和式(6) ~ (7) 代入式(1), 式(1) ~ (3) 可离散化为以下与时间无关的整数阶系统:

$$\kappa c_0^{(n,\alpha)} u^n(x) - \lambda\sigma\Delta u^n(x) + \sigma\gamma\nabla u^n(x) = g^n(x) + R^n, \quad (8)$$

$$u^n(x) = \bar{u}^n(x), x \in \partial\Omega, n = 1, 2, \dots, T/\tau. \quad (9)$$

其中

$$\kappa = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, R^n = o(\tau^2), n = 1, 2, \dots, T/\tau,$$

$$g^n(x) = (1 - \sigma)(\lambda\Delta u^{n-1}(x) - \gamma\nabla u^{n-1}(x)) + \kappa c_{n-1}^{(n,\alpha)} u^0(x) + f^{n-1+\sigma}(x) + \kappa \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k-1}^{(n,\alpha)} - c_{n-k}^{(n,\alpha)}) u^k(x).$$

此时  $\sum_{k=1}^0 (\cdot) = 0$ .

略去  $R^n$ , 设  $U^n$  是  $u^n(x)$  的近似值, 则  $U^0 = u^0(x) = \varphi(x)$ , 式(8) 和(9) 可写成

$$\kappa c_1^{(n,\alpha)} U^n - \lambda\sigma\Delta U^n + \sigma\gamma\nabla U^n = G^n, x \in \Omega, n = 1, 2, \dots, T/\tau, \quad (10)$$

$$U^n = \bar{u}^n(x), x \in \partial\Omega, n = 1, 2, \dots, T/\tau. \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} G^n &= (1 - \sigma)(\lambda\Delta U^{n-1} - \gamma\nabla U^{n-1}) + \kappa \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k}^{(n,\alpha)} - c_{n-k+1}^{(n,\alpha)}) U^k + \kappa c_n^{(n,\alpha)} U^0 + f^{n-1+\sigma}, \\ &x \in \Omega, n = 1, 2, \dots, T/\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.2 时间离散格式的稳定性分析

**引理 1** [12]430 式(5) 满足  $c_0^{(n,\alpha)} > c_1^{(n,\alpha)} > \dots > c_{n-1}^{(n,\alpha)} > (1 - \alpha)n^{-\alpha}$ , 并且  $(2\sigma - 1)c_0^{(n,\alpha)} - \sigma c_1^{(n,\alpha)} > 0$ .

**引理 2** [13] 设  $\Omega$  为内积空间,  $(\cdot, \cdot)$  为  $\Omega$  中的内积,  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  为导出的范数,  $0 \leq \alpha < 1, \sigma = 1 - \alpha/2$ , 已知  $\{c_k^{(n,\alpha)} | 0 \leq k \leq n - 1\}$  满足引理 1 中的关系式, 则对任意  $u^0, u^1, \dots, u^n \in \Omega$ , 有

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n,\alpha)} ((u^{n-k} - u^{n-k-1}), \sigma u^n + (1 - \sigma)u^{n-1}) \geq \\ &\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n,\alpha)} (\|u^{n-k}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u^{n-k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2), n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$



**定理 1** 如果  $U^n \in H_0^1(\Omega)$ , 则通过式(10) 可以得到时间离散方案是无条件稳定的.

**证明** 用  $\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}$  在式(10) 两边同时做内积, 可得

$$\begin{aligned} \kappa \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n,\alpha)} (U^{n-k} - U^{n-k-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) - \lambda (\sigma \Delta U^n + (1 - \sigma)\Delta U^{n-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) + \\ \gamma (\sigma \Delta U^n + (1 - \sigma)\nabla U^{n-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) = (f^{n-1+\sigma}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

根据 Green 公式和 Friedrichs 不等式可得

$$\begin{aligned} -\lambda (\sigma \Delta U^n + (1 - \sigma)\Delta U^{n-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) = \\ \lambda \|\sigma \nabla U^n + (1 - \sigma)\nabla U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda C \|\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $C$  是一个正常数.

根据分部积分法, 有

$$\begin{aligned} -(\sigma \nabla U^n + (1 - \sigma)\nabla U^{n-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) = (\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}, \sigma \nabla U^n + (1 - \sigma)\nabla U^{n-1}) = \\ (\sigma \nabla U^n + (1 - \sigma)\nabla U^{n-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}), \end{aligned}$$

所以,

$$\gamma (\sigma \nabla U^n + (1 - \sigma)\nabla U^{n-1}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) = 0. \quad (16)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned} (f^{n-1+\sigma}, \sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}) \leq \|f^{n-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)} \|\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ \lambda C \|\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\lambda C} \|f^{n-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

应用引理 2, 将式(15) ~ (17) 代入式(14), 得

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n,\alpha)} (\|U^{n-k}\|^2 - \|U^{n-k-1}\|^2) + \lambda C \|\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ \lambda C \|\sigma U^n + (1 - \sigma)U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\lambda C} \|f^{n-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (18)$$

即

$$c_0^{(n,\alpha)} \|U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k-1}^{(n,\alpha)} - c_{n-k}^{(n,\alpha)}) \|U^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{n-1}^{(n,\alpha)} \|U^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\lambda C\kappa} \|f^{n-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (19)$$

由引理 1 知  $\frac{1}{2c_{n-1}^{(n,\alpha)}\lambda C\kappa} = \frac{\Gamma(1-\alpha)t_n^\alpha}{2\lambda C}$ , 所以式(19) 可写成

$$\begin{aligned} c_0^{(n,\alpha)} \|U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k-1}^{(n,\alpha)} - c_{n-k}^{(n,\alpha)}) \|U^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{n-1}^{(n,\alpha)} \left( \|U^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2c_{n-1}^{(n,\alpha)}\lambda C\kappa} \|f^{n-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \\ \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k-1}^{(n,\alpha)} - c_{n-k}^{(n,\alpha)}) \|U^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{n-1}^{(n,\alpha)} \left( \|U^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\Gamma(1-\alpha)t_n^\alpha}{2\lambda C} \|f^{n-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

用数学归纳法可得

$$\|U^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|U^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\lambda C} \max_{0 \leq j \leq k} t_j^\alpha \|f^{j-1+\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2, k = 1, 2, \dots, T/\tau.$$

即证明了时间离散方案是无条件稳定的.

### 2.3 时间离散格式的收敛性分析

**定理 2** 设  $\{U^n, n = 0, 1, 2, \dots, T/\tau\}$  为式(8) 的数值解,  $\{u^n, n = 0, 1, 2, \dots, T/\tau\}$  为其解析解, 令  $e^n = U^n - u^n, n = 0, 1, \dots, T/\tau$ , 则

$$\|e^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\Gamma(1-\alpha)T^\alpha/2\lambda C} (\tau^2).$$

**证明** 由式(2) 知  $e^0 = 0$ . 当  $x \in \partial\Omega$  时,  $U^n = u^n = \bar{u}^n$ , 所以,  $e^n \in H_0^1(\Omega)$ . 可以得到



$$\kappa \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n,\alpha)} (e^{n-k} - e^{n-k-1}, \sigma e^n + (1-\sigma)e^{n-1}) - \lambda(\sigma \Delta e^n + (1-\sigma)\Delta e^{n-1}, \sigma e^n + (1-\sigma)e^{n-1}) + \gamma(\sigma \nabla e^n + (1-\sigma)\nabla e^{n-1}, \sigma e^n + (1-\sigma)e^{n-1}) = (R^n, \sigma e^n + (1-\sigma)e^{n-1}),$$

由定理 1 类似证明过程即得定理 2.

### 3 空间离散

为了得到式(8)的近似解, 设  $\{x_i\}_{i=1}^N$  是  $\bar{\Omega}$  上的  $N$  个节点, 节点距离为  $h = \max_{1 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$ . 基于移动最小二乘近似<sup>[14]5</sup>, 可得

$$u^n(x) \approx u_h^n(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i^n, n = 1, 2, \dots, T/\tau. \quad (20)$$

式中  $u_i^n$  是  $u$  在点  $(x_i, t_n)$  的近似值,  $\Phi_i(x)$  是移动最小二乘近似构造的形函数<sup>[14]6</sup>.

通过式(20)可以得到

$$\nabla u^n(x) \approx \nabla u_h^n(x) = \sum_{i=1}^N \nabla \Phi_i(x) u_i^n = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x} u_i^n, \quad (21)$$

$$\Delta u^n(x) \approx \Delta u_h^n(x) = \sum_{i=1}^N \Delta \Phi_i(x) u_i^n = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} u_i^n. \quad (22)$$

当  $x_j \in \Omega$  时, 将式(20) ~ (22) 代入式(8) 并略去一切误差得

$$\kappa c_0^{(n,\alpha)} \sum_{i=1}^N \Phi_i(x_j) u_i^n - \lambda \sigma \sum_{i=1}^N \Delta \Phi_i(x_j) u_i^n + \sigma \gamma \sum_{i=1}^N \nabla \Phi_i(x_j) u_i^n = g_j^n. \quad (23)$$

其中  $g_j^n = \lambda(1-\sigma)\Delta u_j^{n-1} - (1-\sigma)\gamma \nabla u_j^{n-1} + \kappa \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k-1}^{(n,\alpha)} - c_{n-k}^{(n,\alpha)}) u_j^k + \kappa c_n^{(n,\alpha)} u_j^0 + f_j^{n-1+\sigma}$ .

当  $x_j \in \partial\Omega$  时, 将式(20) 代入式(3), 得

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i(x_j) u_i^n = \bar{u}^n(x_j), n = 1, 2, \dots, T/\tau. \quad (24)$$

最终根据式(23) ~ (24), 用矩阵形式表示式(1) ~ (3) 问题的有限点法离散代数系统如下:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_h^n = \mathbf{G}^n, n = 1, 2, \dots, T/\tau. \quad (25)$$

其中  $\mathbf{u}_h^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n)^T$ .

$$[\mathbf{K}]_{ij} = \begin{cases} \kappa c_1^{(n,\alpha)} (\Phi_i(x_j) - \lambda \sigma \Delta \Phi_i(x_j) + \sigma \gamma \nabla \Phi_i(x_j)), & j = 2, 3, \dots, N-1, \\ \Phi_i(x_j), & j = 1, N. \end{cases} \quad (26)$$

$$[\mathbf{G}^n]_j = \begin{cases} g_j^n, & j = 2, 3, \dots, N-1, \\ \bar{u}^n(x_j), & j = 1, N. \end{cases} \quad (27)$$

### 4 误差分析

**定理 3** 如果  $u^n \in H^{s+1}(\Omega)$  是式(1) ~ (3) 的解析解, 则

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_2 / \|\mathbf{u}^n\|_2 \leq c(\tau^2 + h^{\min(s, \hat{m})+1}). \quad (28)$$

其中  $\mathbf{u}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n)^T$ ,  $\mathbf{u}_h^n$  是由式(25) 得到的有限点法近似解,  $\hat{m}$  是移动最小二乘近似中基函数的最大次数,  $c$  是独立于  $\tau, \varepsilon$  和  $h$  的常数.

**证明** 设  $v^n(x)$  满足

$$\kappa c_0^{(n,\alpha)} v^n(x) - \lambda \sigma \Delta v^n(x) + \sigma \gamma \nabla v^n(x) = g^n(x), x \in \Omega, \quad (29)$$

则根据定理 2 可得  $\|u^n - v^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1(\tau^2)$ , 令  $\mathbf{v}^n = (v^n(x_1), v^n(x_2), \dots, v^n(x_N))^T$ , 则



$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_2 / \|\mathbf{u}^n\|_2 \leq c_2 \|u^n - v^n\|_{L^2(\Omega)} / \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 (\tau^2). \tag{30}$$

设  $R_j$  是半径为  $h_j$  的节点  $x_j$  的影响域, 区域  $\bar{R}_j \subset \Omega_j = \{x : |x - x_j| < h_j + \max_{1 \leq i \leq N} h_i\}$  满足  $\bar{\Omega}_j \cap (\Omega \cup \partial\Omega)$  关于  $\bar{R}_j$  是星形的<sup>[15]</sup>,  $v_e^n$  属于空间  $V_e^n = \{v_e^n : v_e^n \in H^{\hat{m}+1}(\Omega), v^n(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) v_e^n(x_i)\}$ ,  $Q^{\hat{m}} v_e^n$  是  $v_e^n$  在  $\bar{R}_j$  上的  $\hat{m} + 1$  次泰勒多项式, 根据文献[16] 得, 余项  $R^{\hat{m}} v_e^n = v_e^n - Q^{\hat{m}} v_e^n$  满足

$$\|R^{\hat{m}} v_e^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c_4 h^{\hat{m}+1} \|v_e^n\|_{H^{\hat{m}+1}(\Omega)}, \|R^{\hat{m}} v_e^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_5 h^{\hat{m}+1/2} \|v_e^n\|_{H^{\hat{m}+1}(\Omega)}. \tag{31}$$

令  $\mathbf{v}_e^n = (v_e^n(x_1), v_e^n(x_2), \dots, (v_e^n(x_N))^T$ , 由式(31) 可得

$$\|R^{\hat{m}} \mathbf{v}_e^n\|_2 / \|\mathbf{u}^n\|_2 \leq c_6 \|R^{\hat{m}} v_e^n\|_{L^2(\Omega)} / \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c_7 h^{\hat{m}+1}. \tag{32}$$

因为  $Q^{\hat{m}} v_e^n$  是  $\hat{m}$  次多项式, 根据移动最小二乘的重构性质<sup>[14]12</sup> 可得  $v^n(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) v_e^n(x_i) = Q^{\hat{m}} v_e^n(x) +$

$\sum_{i=1}^N \Phi_i(x) R^{\hat{m}} v_e^n(x_i)$ , 所以

$$v_e^n(x) = Q^{\hat{m}} v_e^n(x) + R^{\hat{m}} v_e^n(x) = v^n(x) + R^{\hat{m}} v_e^n(x) - \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) R^{\hat{m}} v_e^n(x_i). \tag{33}$$

对于任意  $i \in \Lambda_j = \{i : \text{dist}(x_i, R_j) < h_i\}$ , 根据文献<sup>[14]13</sup> 得  $\sum_{k \in \Lambda_j} \|\Phi_k\|_{L^2(R_j \cap \Omega)} \leq c_8 h^{1/2}$ , 再根据式(31)

和式(33) 可得  $\|u^n - v_e^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c_9 h^{\hat{m}+1} \|v_e^n\|_{H^{\hat{m}+1}(\Omega)}$ , 所以

$$\|\mathbf{v}^n - \mathbf{v}_e^n\|_2 / \|\mathbf{u}^n\|_2 \leq c_{14} \|v^n - v_e^n\|_{L^2(\Omega)} / \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{10} h^{\hat{m}+1}. \tag{34}$$

设  $\bar{s} = \min(\hat{m}, s)$ ,  $Q^{\bar{s}} u_h^n$  和  $Q^{\bar{s}} v^n$  分别是  $u_h^n$  和  $v^n$  的  $\bar{s} + 1$  次泰勒多项式, 余项为  $R^{\bar{s}} u_h^n = u_h^n - Q^{\bar{s}} u_h^n$  和  $R^{\bar{s}} v^n = v^n - Q^{\bar{s}} v^n$ . 根据式(32), 类似地可得

$$\|R^{\bar{s}} \mathbf{v}^n\|_2 / \|\mathbf{u}^n\|_2 \leq c_{11} h^{\bar{s}+1}, \|R^{\bar{s}} \mathbf{U}_h^n\|_2 / \|\mathbf{u}^n\|_2 \leq c_{12} h^{\bar{s}+1}. \tag{35}$$

另外, 根据式(33) 可得

$$v_e^n(x_i) = Q^{\bar{s}} v^n(x_i) + R^{\bar{s}} v^n(x_i) + R^{\hat{m}} v_e^n(x_i) - \sum_{l=1}^N \Phi_l(x_i) R^{\hat{m}} v_e^n(x_l), i = 1, 2, \dots, N. \tag{36}$$

根据移动最小二乘近似的重构性质和式(29), 可得

$$\begin{aligned} \kappa \sum_{i=1}^N [c_0^{(n,\alpha)} \Phi_i(x_j) - \lambda \sigma \Delta \Phi_i(x_j) + \sigma \gamma \nabla \Phi_i(x_j)] Q^{\bar{s}} v^n(x_i) &= \kappa c_0^{(n,\alpha)} Q^{\bar{s}} v^n(x_j) - \\ \lambda \sigma \Delta Q^{\bar{s}} v^n(x_j) + \sigma \gamma \nabla Q^{\bar{s}} v^n(x_j) &= g^n(x_j) Q^{\bar{s}} v^n(x_i) = g^n(x_j) - R^{\bar{s}} g^n(x_j), x_j \in \Omega. \end{aligned}$$

将式(23) 的左侧用  $v_e^n$  代替  $u^n$ , 再根据式(36) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [\kappa c_0^{(n,\alpha)} \Phi_i(x_j) - \lambda \sigma \Phi_{i,xx}(x_j) + \sigma \gamma \Phi_{i,x}(x_j)] v_e^n(x_i) &= \\ g^n(x_j) - R^{\bar{s}} g^n(x_j) + r^n(x_j), x_j \in \Omega. \end{aligned} \tag{37}$$

其中

$$\begin{aligned} r^n(x_j) &= \sum_{i=1}^N (\kappa c_0^{(n,\alpha)} \Phi_i(x_j) - \lambda \sigma \Phi_{i,xx}(x_j) + \sigma \gamma \Phi_{i,x}(x_j)) \cdot \\ &\quad (R^{\bar{s}} v^n(x_i) + R^{\hat{m}} v_e^n(x_i) - \sum_{l=1}^N \Phi_l(x_i) R^{\hat{m}} v_e^n(x_l)). \end{aligned} \tag{38}$$

根据式(24) 得

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i(x_j) Q^{\bar{s}} v^n(x_i) = Q^{\bar{s}} v^n(x_j) = Q^{\bar{s}} \bar{u}^n(x_j) = \bar{u}^n(x_j) - R^{\bar{s}} \bar{u}^n(x_j), x_j \in \partial\Omega. \tag{39}$$

将式(36) 代入式(39), 得



$$\sum_{i=1}^N \Phi_i(x_j) v_e^n(x_i) = \bar{u}^n(x_j) - R^s \bar{u}^n(x_j) + r^n(x_j), x_j \in \partial\Omega. \tag{40}$$

其中

$$r^n(x_j) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x_j) (R^s v^n(x_i) + R^m v_e^n(x_i) - \sum_{l=1}^N \Phi_l(x_i) R^m v_e^n(x_l)), x_j \in \partial\Omega. \tag{41}$$

式(37)和式(40)可以写成矩阵形式:

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_e^n = \mathbf{G}^n - R^s \mathbf{G}^n + \mathbf{r}^n. \tag{42}$$

其中  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{G}^n$  分别由式(26)和式(27)给出,  $\mathbf{r}^n = (r^n(x_1), r^n(x_2), \dots, r^n(x_N))^T$ . 又根据式(38)和式(41)得  $\mathbf{r}^n = \mathbf{K}(R^s \mathbf{v}^n + R^m \mathbf{v}_e^n - \Phi R^m \mathbf{v}_e^n)$ , 其中  $\Phi = (\Phi_i(x_j))_{i,j=1}^N$ . 将式(42)减去式(25), 可得  $\mathbf{K}(\mathbf{v}_e^n - \mathbf{u}_h^n) = \mathbf{r}^n - R^s \mathbf{G}^n$ , 即得

$$\mathbf{v}_e^n - \mathbf{u}_h^n = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}^n - R^s \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^n = R^s \mathbf{v}^n + R^m \mathbf{v}_e^n - \Phi R^m \mathbf{v}_e^n - R^r \mathbf{u}_h^n. \tag{43}$$

因此,通过式(32)和式(35)有

$$\|\mathbf{v}_e^n - \mathbf{u}_h^n\|_2 \leq \|R^s \mathbf{v}^n\|_2 + \|R^m \mathbf{v}_e^n\|_2 + c_{13} \|R^m \mathbf{v}_e^n\|_2 + \|R^r \mathbf{u}_h^n\|_2 \leq c_{14} h^{\min(s, m)+1} \|u^n\|_{L^2(\Omega)}. \tag{44}$$

最后,根据式(30)、式(34)和式(44)得出式(28).

### 5 数值算例

考虑如下时间分数对流扩散方程:

$${}_0^c D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

该问题的解析解为  $u(x, t) = \sin(\pi x) t^{3+\alpha}$ , 初边值条件和  $f(x, t)$  可根据解析解得到. 在数值计算时选取二次基函数  $p(x) = [1, x, x^2]^T$ .

图1给出了当  $t = 1$ , 空间间距  $h = 1/20$  与时间间距  $\tau = 1/20$  时的数值解和误差, 可以看出数值解和解析解吻合得很好, 数据也显示绝对误差小于  $3 \times 10^{-3}$ , 说明笔者使用的有限点法具有较高的计算精度.

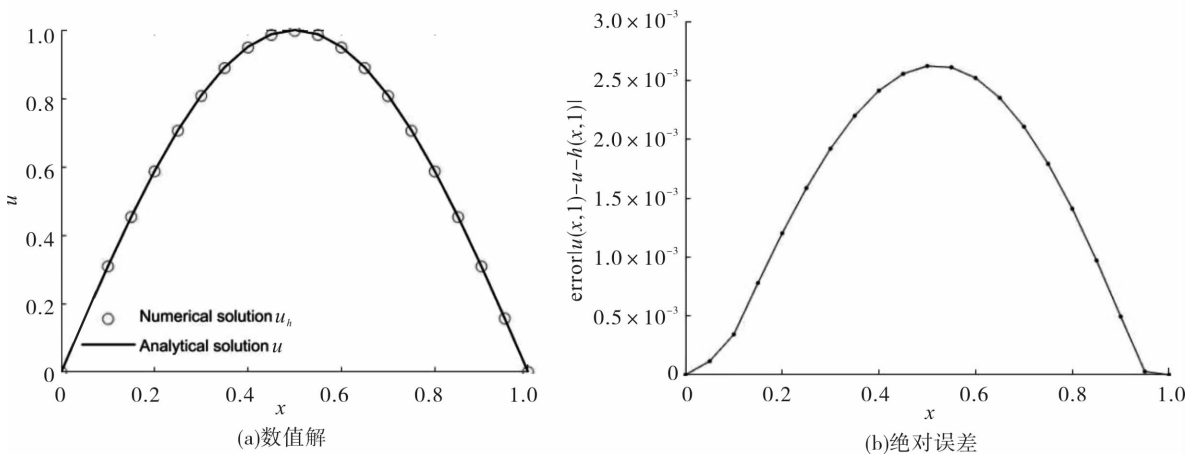


图1 算例在  $\alpha = 0.5, t = 1, h = 1/20$  和  $\tau = 1/20$  时的数值解和绝对误差

图2和图3分别给出了当  $\tau = 0.01$  或者  $h = 0.01$  时,  $L^\infty$  误差和  $L^2$  误差与空间步长  $h$  或者时间步长  $\tau$  之间的关系. 可以看出, 误差随着  $\tau$  和  $h$  的变小而变小, 且数值解大约以  $\tau^2$  和  $h^2$  速度收敛于解析解, 这与理论一致. 表1是有限差分法<sup>[3]308</sup>和有限点法不同  $h, \tau$  和  $\alpha$  时的最大误差, 有限点法具有更高精度, 明显优于有限差分法.

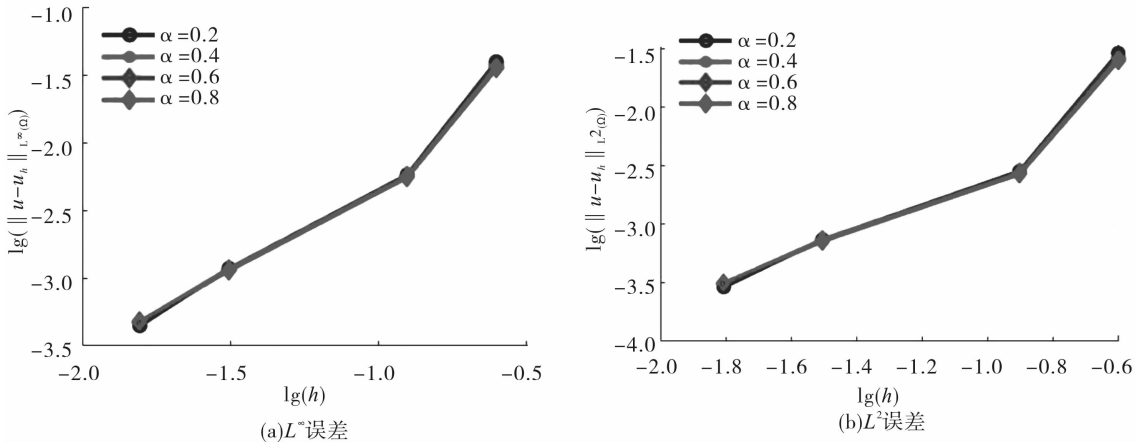


图2 当  $\tau = 0.01$  时误差与空间步长  $h$  的关系

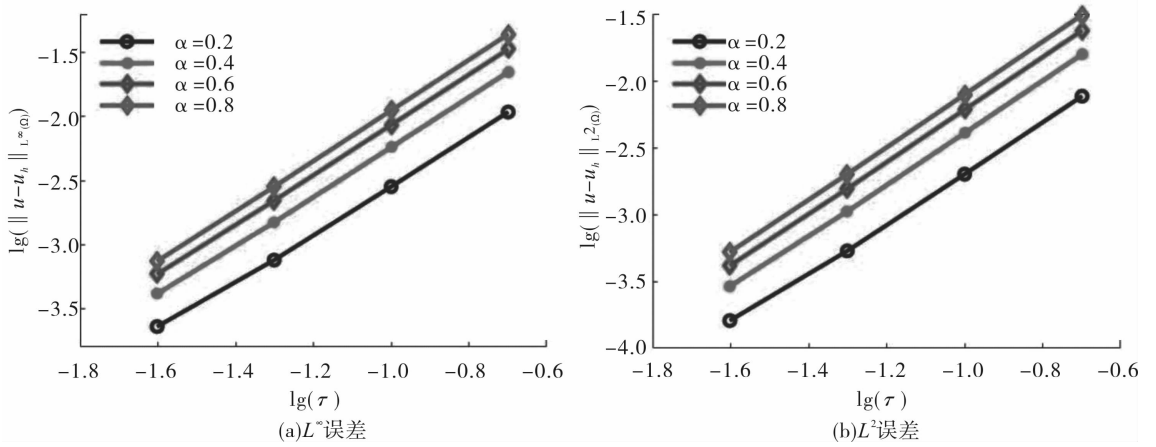


图3 当  $h = 0.01$  时误差与时间步长  $\tau$  的关系

表1 有限差分法与有限点法在不同的空间步长  $h$ 、时间步长  $\tau$  和  $\alpha$  时的最大误差

$h = \tau$	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.8$	
	有限差分法	有限点法	有限差分法	有限点法
1/20	3.538 0e - 03	2.622 0e - 03	1.056 3e - 02	3.548 4e - 03
1/40	1.092 4e - 03	7.198 2e - 04	4.395 4e - 03	9.420 3e - 04
1/80	3.468 4e - 04	1.877 3e - 04	1.861 0e - 03	2.421 4e - 04
1/160	1.128 2e - 04	4.788 1e - 05	7.971 9e - 04	6.127 1e - 05

6 结论

针对时间分数阶对流扩散方程,用有限差分法离散时间变量,用有限点法进行空间离散,推导了详细的数值计算公式,对时间离散方案进行了稳定性和收敛性分析,分析了该方法的误差估计.理论误差分析表明,时间和空间收敛率分别约为  $\tau^2$  和  $h^2$ .数值算例证实了求解时间分数阶对流扩散方程的有限点法的有效性和收敛性,并验证了理论分析结果.

参考文献:

[1] ADAMS E E, GELHAR L W. Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer: 2. spatial moments analysis[J]. Water Re-



- sources Research, 1992, 28:3293 – 3307.
- [2] NIGMATULLIN R R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry[J]. Physica Status Solidi(B), 1986,133:425 – 430.
- [3] ZHANG X. An approximation scheme for the time fractional convection-diffusion equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 335.
- [4] SOUSA E. A second order explicit finite difference method for the fractional advection diffusion equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64:3141 – 3152.
- [5] HUANG Q, HUANG G, ZHAN H. A finite element solution for the fractional advection dispersion equation[J]. Advances in Water Resources, 2008,31:1578 – 1589.
- [6] BI Y A, JIANG Z W. The finite volume element method for the two-dimensional space-fractional convection-diffusion equation [J]. Advances in Difference Equations, 2021,1:1 – 22.
- [7] ZHUANG P, GU Y T, LIU F, et al. Time-dependent fractional advection-diffusion equations by an implicit MLS meshless method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2012,88:1346 – 1362.
- [8] LIU Q, GU Y T, ZHUANG P, et al. An implicit RBF meshless approach for time fractional diffusion equations[J]. Computational Mechanics, 2011,48:1 – 12.
- [9] CHENG Y M. Meshless methods[M]. Beijing:Science Press,2015.
- [10] LI X L, DONG H Y. Error analysis of the meshless finite point method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 382.
- [11] 陈虹伶, 李小林. 分数阶 Cable 方程的有限点法分析[J]. 应用数学和力学, 2022(6):700 – 706.
- [12] ALIKHANOV A A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2015,280.
- [13] 孙志忠, 高光花. 分数阶微分方程的有限差分方法[M]. 北京:科学出版社,2021:127.
- [14] LI X L. Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free Galerkin method in  $n$ -dimensional spaces[J]. Applied Numerical Mathematics, 2016, 99.
- [15] BRENNER S C, SCOTT L R. The mathematical theory of finite element methods[M]. New York: Springer,1994.
- [16] CHENG R J, CHENG Y M. Error estimates for the finite point method[J]. Applied Numerical Mathematics, 2008,58:891.

(责任编辑:王彦江)

## Analysis of the Finite Point Method for the Time Fractional Convection-diffusion Equation

CHEN Youling

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** With the finite difference method to obtain the time discrete scheme and by means of the finite point method to establish discrete algebraic equation systems, a meshless finite point method for the numerical analysis of the time fractional convective-diffusion equation is proposed. The time discrete scheme is unconditionally stable, and the error estimation of the method is derived and discussed in detail. Numerical examples verify the theoretical results, and the efficiency and convergence of the proposed method.

**Key words:** meshless finite point method; the time fractional convection-diffusion equation; unconditionally stable; error estimation

