以 wxMaxima 輔助線性聯立微分方程組系統之求解自動化

郭青松[1] 陳宗銘[2]

南榮技術學院 通識教育中心[1]
南榮技術學院 電機工程系[2]

摘要

由於目前網路普及和全球資訊相互快速流通的情況，其中有關數學教育的發展訊息非常地多，在這當中 wxMaxima 這個電腦代數系統，除了可讓一般學生用來輔助強化數學計算能力的練習，甚至於也可讓教學者利用軟體的特殊功能作為教學輔助，以程式化方式撰寫自動教學示範步驟，這一點可以使得學生在課後複習或自修學習者重新加強並彌補以前不懂或較弱的數學單元，即使示範講解過程瑣碎繁雜，不過由於可一再地提供同類型新題目的計算，使得學習者不會畏懼演算過程而減弱學習的意願，讓學生能強化觀念與加深演算的熟悉程度。

工程數學中求解線性聯立微分方程系統時，常因牽涉到各物理系統之組成方式較為複雜，所以無法足夠對於系統的控制方程組有效的自動推導，還是得靠熟練的經驗才行。而 wxMaxima 免費軟體除了強有力的符號代數運算功能外，並提供相關求解指令的使用。本文以程式化輔助講解線性微分方程系統求解步驟。期望課堂上的演算過程轉化成自動講解的這種方式，可輔助學習緩慢的學生，配合講解步驟一步一步重新做起，使其重新檢視自己的學習癥結所在，因為課後自行演算練習停頓處通常就是學習觀念不清楚的地方，這可讓學生學習後，了解自己觀念歧異之處或學習的盲點。

關鍵詞：電腦代數系統、線性聯立微分方程組、求解自動化

引言

雖然網路上的數學共享軟體 wxMaxima[1]缺乏部份特殊演算功能，另外在網路上也較少出現中文的使用說明資料，但仍有熱心的使用者[2-4]在網路上提供一些資料來表達其信賴和建議使用。市面上常見商用軟體如 Maple、Mathematica 或 Matlab 等的符號代數演算(Symbolic Algebraic Computing)概念都源自於 Maxima (wxMaxima 為其

視窗介面)，更重要的是學生不必花錢即可擁有這套功能毫不遜色的數學軟體，雖然 wxMaxima 軟體剛開始的使用介面為英文，由於 wxMaxima 的計算功能完整性也相當好，因此新的版本多已附帶有中文化的使用介面，只是對於中小學程度的學生來說，可能稍嫌困難，然而對於高中大專階段的學生而言，只需記憶一些英文常用指令，如同電腦高階程式語言一樣，只要背好常用術語，就可以應付大多數的使用需要了。而且不須花任何錢，加上計算功能非常強大不是陽春型的套裝程式，即使用來做高深研究的繁雜計算，它也一點都不遜色，這也是本文之所以推薦使用的原因。

wxMaxima 簡介

wxMaxima 的起源催生者 Schelter[5]教授，他畢業於加拿大 McGill 大學，後來任教於美國德州大學數學系，對於特殊程式語言 LISP 的發展以及 GNU Common LISP 的推行有所貢獻。wxMaxima 繼承美國麻省理工學院於 1960 年代發展的電腦代數系統 Macsyma，Schelter 教授由 1982 年維護到 2001 年(教授辭世)，並於 1998 年獲得允許開放程式來源碼供後續程式設計師更新維護。wxMaxima 軟體的詳細安裝和使用，因考慮文章篇幅限制，有興趣者可以自行參閱蔡炎龍老師[2]、王輝清老師[3]、陳中亮老師[4]等人的網頁或南榮技術學院數位學習網[6]提供的內容，而其它著作[7-12]或相關網頁[13-18]也提供 wxMaxima 豐富的說明。

線性微分方程組系統概述

對實際存在的物理現象，如果認真且細膩的加以探討，通常是需要複雜的數學模型才有辦法去闡述它的真正變化。這當中有些問題是牽涉到多變數的函數變化，如自動控制、RLC 電路分析，質量彈簧和阻尼所構成之震動系統等應用問題，而拉普拉斯轉換及矩陣通常可相輔相成的用來呈現線性微分方程組系統所出現的問題，由這裡所衍生出來的狀態方程式將物理現象或問題以 $\mathbf{Y}'(x)=\mathbf{A}\mathbf{Y}(x)+\mathbf{B}(x)$的數學模型來表達，進而如何求解便衍生出線性微分方程系統的求解問題，以及解的穩定與否的相關

詮釋理論等。

一般的工程數學書籍中，對於物理問題轉化成微分方程組系統之範例，其詳細說明因篇幅有限不在此贅述，但可得一普遍性之論述：那就是高階線性常微分方程組可以化成 n 個一階聯立微分方程組。

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) \quad (\text{接下列})$$

$$+ a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x) \tag{1}$$

其中 a_0、a_1、a_2、…、a_{n-2}、a_{n-1} $\in$ R 。

在設定 $y_1 = y(x)$、$y_2 = y'(x)$、$y_3 = y''(x)$、…、$y_n = y^{(n-1)}(x)$ 後，

$$y_1' = [\ y(x)\ ]' = y'(x) = y_2$$

$$y_2' = [\ y'(x)\ ]' = y''(x) = y_3$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}' = [\ y^{(n-2)}(x)\ ]' = y^{(n-1)}(x) = y_n$$

$$y_n' = [\,y^{(n-1)}(x)\,]' = y^{(n)}(x)\ (\text{接下列})$$

$$= b(x) - a_{n-1}y_{n-1}' - a_{n-2}y_{n-2}' - \ldots - a_2 y_2' - a_1 y_1' - a_0 y(x) \tag{2}$$

$$= b(x) - a_{n-1}y_n - a_{n-2}y_{n-1} - \ldots - a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 \tag{3}$$

n 階線性常微分方程組可重新寫成下列形式

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = b(x) - a_{n-1}y_n - a_{n-2}y_{n-1} - \cdots - a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 \end{cases}$$

或以矩陣方程式表達為 $\mathbf{Y}'(x)=\mathbf{A}\mathbf{Y}(x)+\mathbf{B}(x)$ (4)

其中 $\mathbf{Y}(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \\ y_n(x) \end{bmatrix}$，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$。

當 $\mathbf{B}(x)$＝零矩陣(零向量)時，此聯立微分方程組稱為齊性(Homogeneous)，否則稱為非齊性(Nonhomogeneous)。對於聯立系統的求解有拉氏轉換、矩陣對角化及衍生積分公式法等求解方式，至於孰優孰劣？仍和所面對之問題有關。本文將以 wxMaxima 配合撰寫程式來說明求解過程或步驟，讓學習解題者了解此型問題之解法，進而去推導相關問題之變化和解之趨勢演變。

拉氏轉換求解步驟簡述

先以簡單之 2 階微分方程組求解為例，式子說明如下。

例 求解聯立微分方程組 $\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t) \\ y_2'(t)=-y_1(t)+2y_2(t)+t-2 \end{cases}$，起始條件為 $\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_2(0)=0 \end{cases}$。

解：由上述微分方程組系統之說明可知此為非齊性聯立微分方程組，可轉化成

$$\mathbf{Y}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{Y}(t)+\mathbf{B}(t) \tag{5}$$

其中 $\mathbf{Y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ t-2 \end{bmatrix}$。

兩邊取拉氏轉換後，可得

$$\mathscr{L}[\mathbf{Y}'(t)] = \mathscr{L}[\mathbf{A}\mathbf{Y}(t)+\mathbf{B}(t)] \tag{6}$$

$$s\,\tilde{Y}(s)-\mathbf{Y}(0)=\mathbf{A}\tilde{Y}(s)+\tilde{B}(s) \tag{7}$$

$$s\,\tilde{Y}(s)-\mathbf{A}\,\tilde{Y}(s)=\tilde{B}(s)+\mathbf{Y}(0) \tag{8}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\tilde{Y}(s) = \tilde{B}(s) + \mathbf{Y}(0) \tag{9}$$

此處 **I** 是和 **A** 同階的單位矩陣。

故 $$\tilde{Y}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\left[\tilde{B}(s) + \mathbf{Y}(0)\right] \tag{10}$$

通解(general solution)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{Y}(s)\right] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\left[\tilde{B}(s) + \mathbf{Y}(0)\right]\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{Y}(0)\right\} + \quad \text{(續接下列)} \\
&\qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\tilde{B}(s)\right\} \\
&= \mathbf{Y}_h(t) + \mathbf{Y}_p(t)
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\mathbf{Y}_h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{Y}(0)\right\}$為齊性解(homogeneous solution)，

而 $\mathbf{Y}_p(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\tilde{B}(s)\right\}$為特解(particular solution)。

由 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t-2 \end{bmatrix}$，可得

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

而 $$\begin{aligned}
\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} &= \frac{1}{s^2 - 2s + 1}\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{(s-1)^2} \\ \dfrac{-1}{(s-1)^2} & \dfrac{s}{(s-1)^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{Y}(0)=\begin{bmatrix}\dfrac{s-2}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{(s-1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s-1)^2} & \dfrac{s}{(s-1)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s-2}{(s-1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s-1)^2}\end{bmatrix} \tag{14}$$

又 $$\tilde{B}(s)=\mathscr{L}\left(\mathbf{B}(t)\right)=\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix}0\\t-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1-2s}{s^2}\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\tilde{B}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s-2}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{(s-1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s-1)^2} & \dfrac{s}{(s-1)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1-2s}{s^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{(1-2s)}{s^2(s-1)^2}\\ \dfrac{(1-2s)}{s(s-1)^2}\end{bmatrix} \tag{16}$$

齊性解 $$\mathbf{Y}_h(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{Y}(0)\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{s-2}{(s-1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s-1)^2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)}-\dfrac{1}{(s-1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s-1)^2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}e^t-t\,e^t\\ -t\,e^t\end{bmatrix} \tag{17}$$

特解 $$\mathbf{Y}_p(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\tilde{B}(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{(1-2s)}{s^2(s-1)^2}\\ \dfrac{(1-2s)}{s(s-1)^2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{(s-1)^2}\\ \dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)}-\dfrac{1}{(s-1)^2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}t-t\,e^t\\ 1-e^t-t\,e^t\end{bmatrix} \tag{18}$$

所以此 2 階微分方程組之通解 $\mathbf{Y}_g(t) = \mathbf{Y}_h(t) + \mathbf{Y}_p(t)$，

$$\text{即}\quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t\,e^t \\ -t\,e^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - t\,e^t \\ 1 - e^t - t\,e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + e^t - 2te^t \\ 1 - e^t - 2te^t \end{bmatrix} \tag{19}$$

或分量形式 $y_1(t) = t + e^t - 2te^t = t + (1-2t)e^t$ (20)

和 $y_2(t) = 1 - e^t - 2te^t = 1 - (1+2t)e^t$ (21)

拉氏轉換程式化

如以 wxMaxima 之操作方式搭配程式化可得流程如下之圖示：

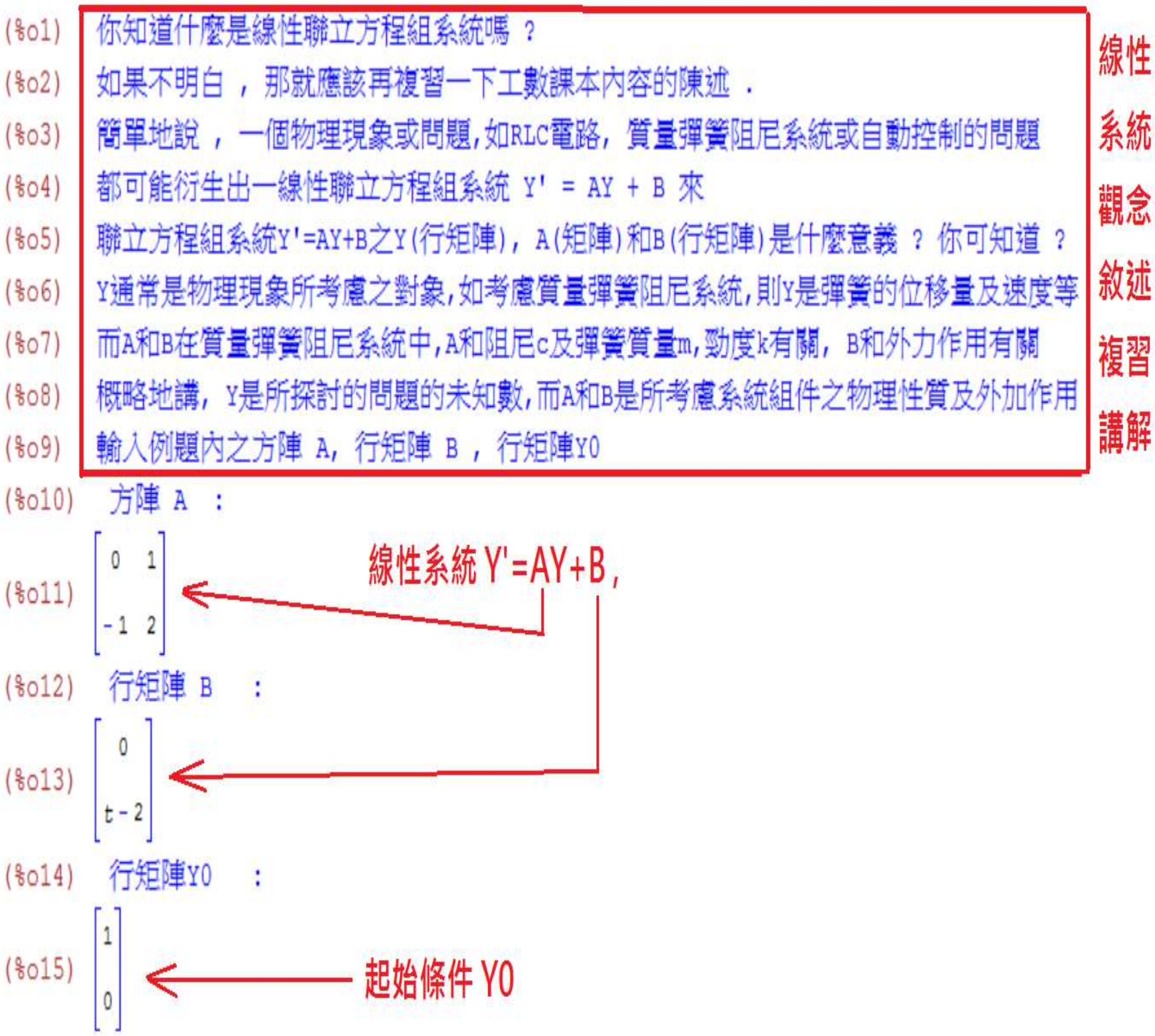

圖 1 簡易觀念敘述後，輸入相關矩陣

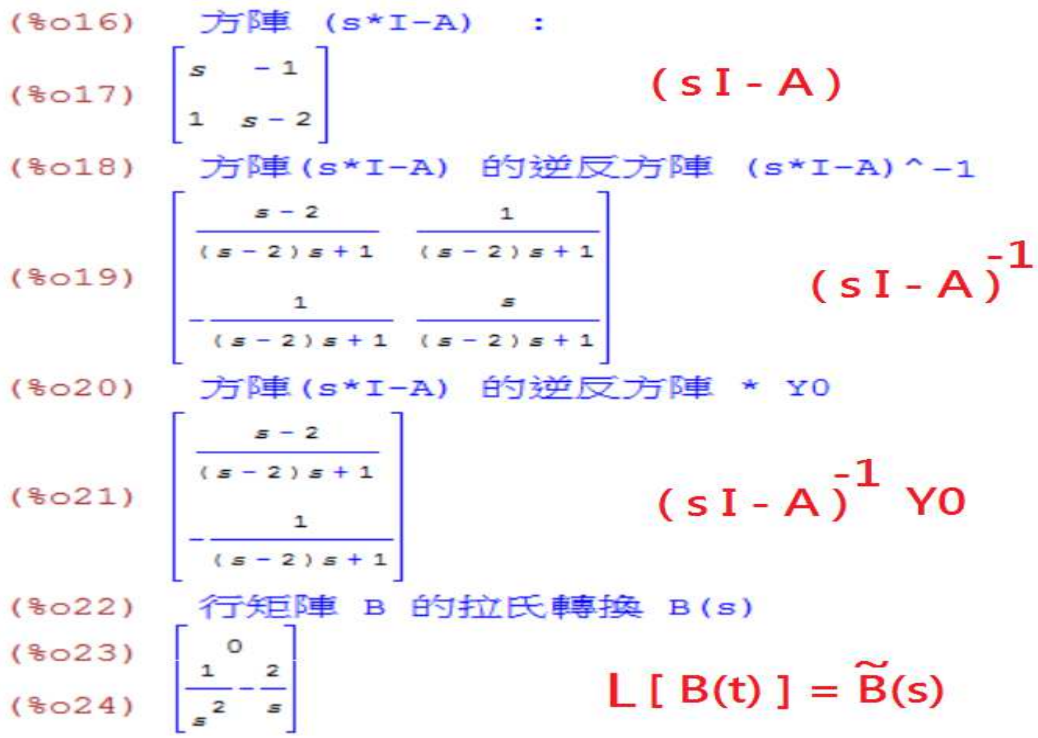

圖 2　依拉氏轉換求解步驟列式(一)

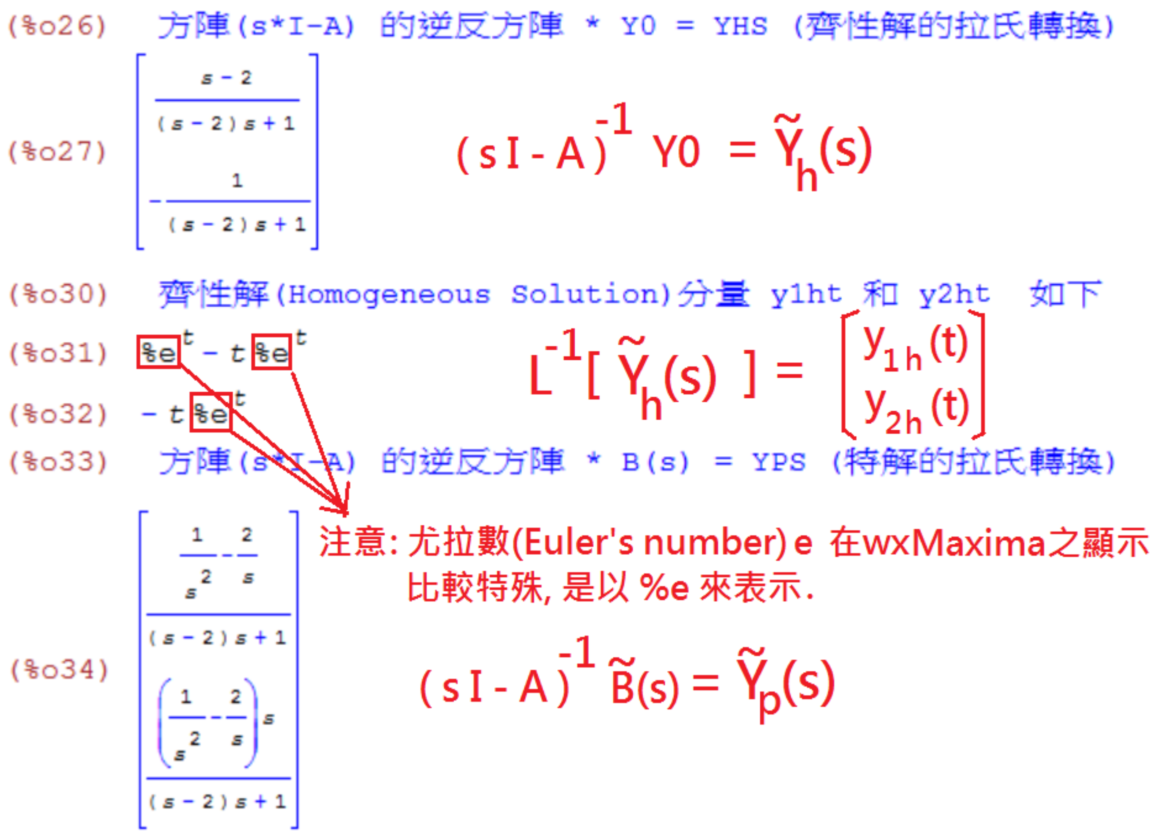

圖 3　依拉氏轉換求解步驟列式(二)

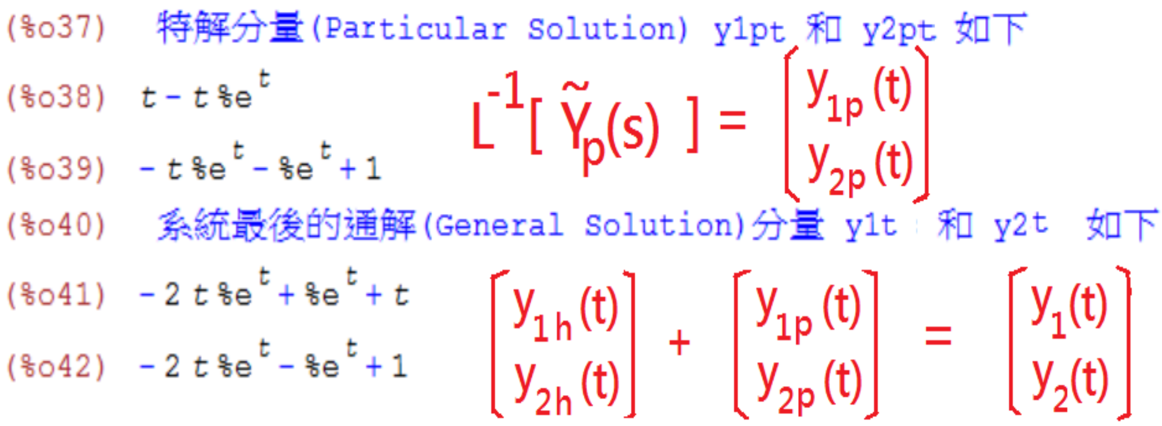

圖 4　最後求得通解為齊性解和特解之和

再舉 3 階之系統如下例所示，省略部份瑣碎的說明，而專注於各種解答之求得。

例 解聯立微分系統 $\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = 4y_1(t) + 4y_2(t) - y_3(t) + 2 \end{cases}$，起始條件 $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$。

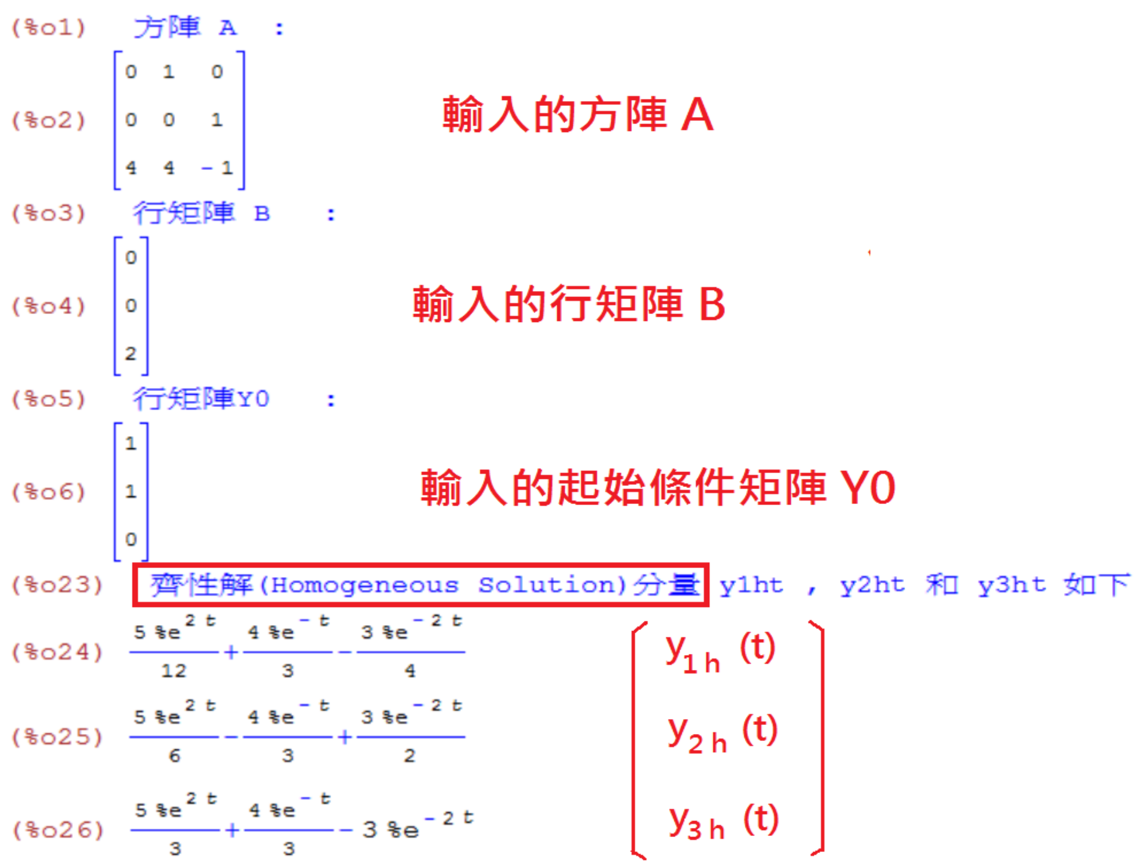

圖 5 輸入相關矩陣並求得齊性解

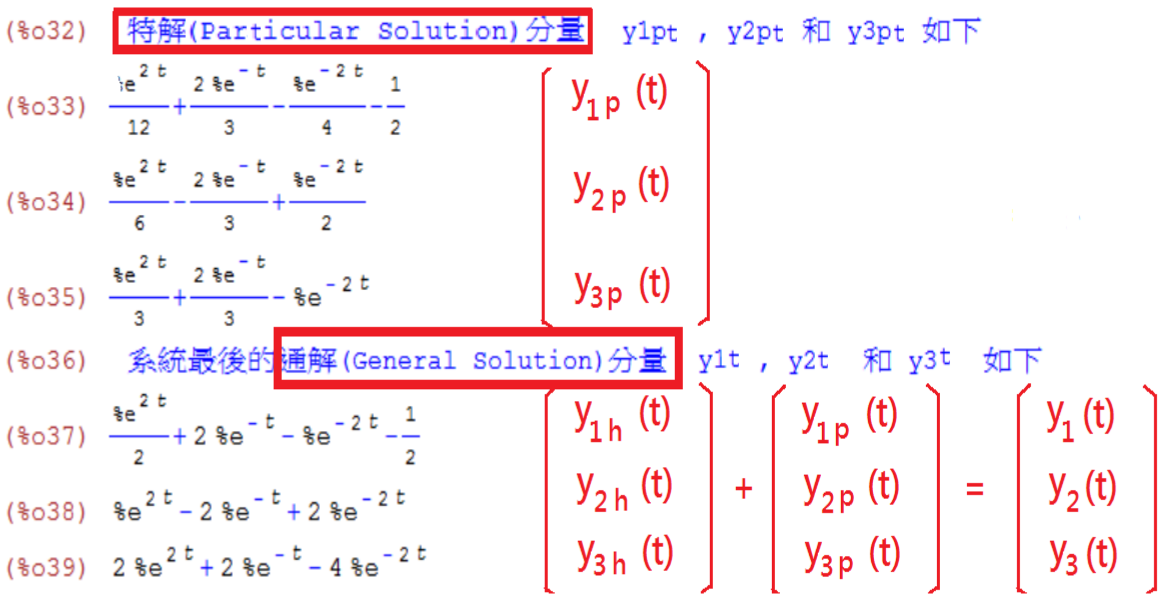

圖 6 進一步求得特解，最後得到符合起始條件的通解

結論

工程數學的學習，不僅需具備微積分基礎，內容更涉及各種不同之專業應用，在微積分還不夠純熟的情況下，進到工程數學更深難度的部份，對多數同學因此造成學習的障礙與困頓。惟有加強自己的學習信心與演算能力，才有辦法適應這更高層級的數學難題，當然對於為什麼會衍生出這麼多的工數單元，自然和所學的系科而各有不同專擅的部份，微分方程在每一位剛接觸工數的學生而言，都會有不同以往和微積分學習不同之處，那就是解法零零落落，離散而不綿密相連，可能讓初學者有點摸不著邊的感覺。總之學問之道無它，求其放心而已矣!

不管是微積分或工程數學的相關演算，其實多半有其理論之論述和依據，也因此存在著符號代數演繹的必要性，在課堂講解後若能配合例題演算的自動化顯示，應可建立學習者不怕演算的信心，而最後回歸到讓學生認知理論的了解才是最重要的。wxMaxima 擁有和其它商業軟體類似的符號演算功能，針對講解步驟可配合程式化的操作，讓學習反應較慢多半也是計算能力薄弱的同學，可提供非常豐富的求解範例練習，將演算步驟配合理論說明逐步的呈現，相信對學生課後的練習有很好的輔助。

線性微分方程系統有其對應的產生方式，無論是電路中的 RLC 電路電流分析、多

質量彈簧阻尼系統、管路流體流動問題等，學生將會認識到有非常豐富且變得有點難度的問題都會衍生出如線性微分方程系統的數學控制方程式，配合起始條件或者是邊界條件等著去求解。如果被繁雜的計算擊倒了學習信心，那麼以後的學習將如同遍地荊棘的如影隨形，把繁雜瑣碎的計算交給電腦，讓自己專注於理論的成型以及如何演變，和各種解法優劣的比較，將會豐富自己的學習，跳脫以往的學習模式，進展到更有效率但也隨之而來的細膩求真的複雜真實物理世界的探索。

參考文獻

[1] Maxima, A Computer Algebra System（電腦代數系統）開放式架構的程式可解決眾多數學的符號或數值式的計算 http://maxima.sourceforge.net/

[2] 蔡炎龍老師(政治大學應用數學系助理教授)數位教學網 http://yenlung.math.nccu.edu.tw/index.html/?q=linearAlgebra/maxima

[3] 王輝清老師(中興大學應用數學系副教授)個人網頁 http://www.amath.nchu.edu.tw/teacher/hcwang/

[4] 陳中亮老師(大仁科技大學資訊工程系副教授)個人網頁. http://mail.tajen.edu.tw/~clchen/math.html

[5] 維基百科對 Schelter 教授的註解. http://en.wikipedia.org/wiki/Bill Schelter.

[6] 數位學習網提供 wxMaxima 的相關資料(請以訪客身分登入即可) http://192.192.205.168:10000/course/view.php?id=740

[7] 郭青松，數學課程的輔助學習與觀念講解的程式自動化展示－以網路開放(免費)數學軟體 wxMaxima 使用為基礎，2009 南榮通識教育學術研討會，中華民國九十八年三月十三日，March 13, 2009.

[8] 陳清華，郭青松*，黃世吟，翁上珍，使用免費數學軟體 wxMaxima 輔助教學. 2009 安全管理與工程技術國際研討會，中華民國九十八年 12 月 18 日(C7-066) ，International Conference on Safety & Security Management and Engineering Tech-

nology 2009 (ICSSMET2009) Vol. 2, pp.444~450.

[9] 郭青松，wxMaxima在部份分式的演算過程的自動化演示，2010南榮通識教育學術研討會，中華民國九十九年三月十二日，pp.270~285，12 March 2010.

[10] 郭青松，wxMaxima 的符號運算功能與應用於微積分的輔助學習，南榮學報第十三期，Journal of Nan Jeon，Volume 13，pp.D7-1~14，June 2010.

[11] 郭青松，以 wxMaxima 建構分部積分的觀念講解與自動化算式演練，2011 南榮通識教育學術研討會，中華民國一百年六月三日，pp. 141 ~ 155, 3 June, 2011.

[12] 郭青松，wxMaxima 在數學自動化演算之應用:部份分式的展示，2011 安全管理與工程技術國際研討會，中華民國一百年 11 月 17 日(A7-060) International Conference on Safety & Security Management and Engineering Technology 2011 (ICSSMET2011) Vol.2, pp. 398~405.

[13] A 10 minute tutorial for solving Math problems with Maxima. http://math-blog.com/2007/06/04/a-10-minute-tutorial-for-solving-math- problems -with-maxima/

[14] Introduction to MACSYMA, Richard H. Hand, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, Jul 10, 2000. 譯著:徐昕 April 13, 2004.

[15] Department of Mathematics - University of Utah FAQ for Maxima. http://www.math.utah.edu/faq/maxima/

[16] Frequently-Asked Questions. This FAQ resides at http://maxima.source-forge.net/faq/faq.html. Maxima version at last update: 5.9.0. http://www.math.psu.edu/glasner/Max_doc/faq.html.

[17] Harvard Mathematics Department Computing: Maxima. Department of Mathematics Harvard University. http://abel.math.harvard.edu/computing /maxima/

[18] Maxima Beginner’s FAQ. Main contributors: Robert Dodier, Richard Fateman, Stavros Macrakis, Raymond Toy, Barton Willis, Jaime Villate, Andrej Vodopivec and other mailing list subscribers. Alexey Beshenov http://beshenov. ru/maxima/faq.html.