分式的泰勒級數展開式求法

余啟輝

南榮技術學院資訊工程系助理教授

Email: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

摘要

本文是針對分式在某一點的泰勒級數展開式的求法做有系統的介紹,同時我們利用數學軟體Maple檢驗我們的答案。

關鍵詞: 泰勒級數展開式、二項級數、部分分式、綜合除法、Maple

一、前言

本篇文章所討論的分式(fractions)是指分子和分母都是實係數多項式的有理函數,在參考文獻[1]中有舉出一個例子:求分式 $\dfrac{x^2-3x+8}{2x^3-3x^2+4x+5}$ 在 $x=1$ 的泰勒級數展開式(Taylor series expansion)的前五項。文章中所使用的是長除法,它的局限性就是只能求出該分式的泰勒級數展開式前幾項的係數,並沒有辦法求出一般項的係數,本文就是針對這一點找出解決的辦法,我們利用二項級數(binomial series)的方法求出一個分式在任意點的泰勒級數展開式的一般項係數。並不是所有解析函數都可以很容易的求出在某一點的泰勒級數展開式的一般項係數,我們只能說分式比較特別,主要是因為它可以表示成部分分式之和,我們可以利用二項級數定理將每一項部分分式表示成冪級數(power series),所以可以得到原來分式的泰勒級數展開式,詳細的情形我們將在以下的例子中說明。

分式的泰勒級數展開式在遞迴關係式(recurrence relations)的生成函數(generating functions)問題上有很重要的應用,我們可以參考[2]、[3]和[4]。另一方面,我們也可以藉由分式的泰勒級數展開式求出該分式的任意階微分值,以及該分式的積分,關於這方面的應用我們將在往後的文章中介紹。針對一個分式在某點 $x=a$ 的泰勒級數展開式的求法,我們將採取以下有系統的三個步驟:

第一步:先把此分式的分子和分母分別表示成 $x-a$ 的多項式;
第二步:如果此分式為真分式，就把此真分式的分母分解成一次多項式的連乘積，再把此真分式表示成部分分式之和;如果此分式為假分式，要先把此分式用長除法寫成一個多項式和一個真分式之和，再把此真分式利用前面的方法表示成部分分式之和;
第三步:把部分分式的每一項利用二項級數定理表示成 $x-a$ 的冪級數。

本文將舉出三個例子來說明如何應用這三個步驟來求一個分式在某點的泰勒級數展開式。問題(A)中我們求一個真分式在 $x=0$ 的泰勒級數展開式，並且把此級數收斂的範圍和某幾項的係數求出來。因為這個題目只要用到第二和第三個步驟，而且部分分式寫出來比較不複雜，所以計算起來會簡單許多。問題(B)是求一個假分式在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式，因為必須用到全部三個步驟，而且係數都是分子和分母很大的分數，所以會有冗長的計算。問題(C)中我們將求一個比較困難的泰勒級數展開式問題，因為此真分式表示成部分分式之和時會有複數產生，使得整個泰勒級數展開式會有複數型式的係數產生，在計算過程中顯得麻煩許多，但是最後算出來的泰勒級數展開式的係數卻呈現數字循環的情形，這也是一種有趣的現象。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 作為輔助解題的工具，讓我們可以一邊計算、一邊檢驗答案的正確性，同時從 Maple 的答案中我們可以得到解決問題的靈感，這也是 Maple 意想不到的功能。想要對 Maple 更進一步的認識，可以利用 Maple 的線上查詢系統或者到 Maple 的官方網站參觀瀏覽，相信會有許多意想不到的收穫;至於 Maple 的一些指令和使用方法的說明，可以參考[5-10]。

二、主要的理論

以下我們介紹一些在本文中用到的定義、引理、定理和指令。

定義([11]): 設 a 為實數且 $f(x)$ 是一個在點 $x=a$ 附近無窮可微分的函數。如果 $f(x)$ 在點 $x=a$ 附近可以表示成 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$，則此級數稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒級數展開式。

二項級數定理([12])**:** 假設r, x都是實數且$|x|<1$。則$(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k$，其中$\binom{r}{k}$

$=\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$ 對所有$k\ge 1$且$\binom{r}{0}=1$。

以下兩個引理和一個定理的證明將放在附錄中，而引理 2 可以由二項級數定理得到。

引理 1: 假設m, n為正整數，則$\binom{-m}{n}=(-1)^n\binom{m+n-1}{n}$。

引理 2: 假設x為實數，λ為複數且$\lambda\neq 0$，而m為一正整數。如果$|x|<\dfrac{1}{|\lambda|}$，則

$\dfrac{1}{(1-\lambda x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\lambda^n x^n$ 。

定理 H: 假設x為實數，λ為複數且$\lambda\neq 0$。如果$|x|<\dfrac{1}{|\lambda|}$，則$\dfrac{1}{1-\lambda x}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^n$，

$\dfrac{1}{(1-\lambda x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\lambda^n x^n$ 。

至於本文中用到的 Maple 指令，我們也簡單的列出以供參考。

>factor(f(x)); 因式分解$f(x)$的指令，

>convert(f(x),parfrac,x); 將$f(x)$表示成部分分式之和的指令，

>taylor(f(x),x=a,n); 求函數$f(x)$在$x=a$的泰勒級數展開式的前n項的指令。

三、問題與研究

首先我們針對一個真分式，求它在$x=0$的泰勒級數展開式，並且把此級數收斂的範圍和某幾項的係數設法求出來:

問題(A): (1)求分式$\dfrac{-5x^2+26x-33}{2x^3-x^2-7x+6}$在$x=0$的泰勒級數展開式，並求其收斂範圍，

(2)求此泰勒級數展開式中x^8和x^{11}項的係數。

解: (1)首先把此分式的分母因式分解

$$2x^3-x^2-7x+6=(x-1)(2x^2+x-6)=(x-1)(x+2)(2x-3) 。$$

接著我們用 Maple 檢驗答案:

>factor(2*x^3-x^2-7*x+6);

$$(x-1)\,(x+2)\,(2x-3)$$

因此可以假設原分式 $\dfrac{-5x^2+26x-33}{2x^3-x^2-7x+6}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{2x-3}$，其中 a,b,c 為實數。所以 $a(x+2)(2x-3)+b(x-1)(2x-3)+c(x-1)(x+2)=-5x^2+26x-33$，將 $x=1,-2,\dfrac{3}{2}$ 分別代入等號兩邊，我們可以得到 $\begin{cases}-3a=-12\\ 21b=-105\\ \dfrac{7}{4}c=-\dfrac{21}{4}\end{cases}$，因此 $a=4,b=-5,c=-3$。接著我們用 Maple 檢驗分式 $\dfrac{-5x^2+26x-33}{2x^3-x^2-7x+6}$ 的部分分式之和:

>convert((-5*x^2+26*x-33)/(2*x^3-x^2-7*x+6),parfrac,x);

$$-\frac{3}{2x-3}+\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x+2}$$

因此

$$\frac{-5x^2+26x-33}{2x^3-x^2-7x+6}=\frac{4}{x-1}+\frac{-5}{x+2}+\frac{-3}{2x-3}$$

$$=-\frac{4}{1-x}+\frac{-\frac{5}{2}}{1+\frac{1}{2}x}+\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$$

$$=-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n x^n \qquad \text{(利用定理H)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{2}{3})^n-\frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^n-4]x^n \text{，}$$

這就是 $\dfrac{-5x^2+26x-33}{2x^3-x^2-7x+6}$ 在 $x=0$ 的泰勒級數展開式。因為 $\dfrac{1}{1-x}$，$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x}$ 和 $\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}x}$ 三者可以表示成幾何級數的收斂範圍分別為 $|x|<1$，$|x|<2$ 和 $|x|<\dfrac{3}{2}$，我們取其中最小的收斂範圍，可以得知此泰勒級數展開式的收斂範圍為 $|x|<1$，即 $-1<x<1$。

(2)此分式在 $x=0$ 的泰勒級數展開式的 x^8 項係數為

$$(\frac{2}{3})^8-\frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^8-4=-\frac{13338661}{3359232}\approx-3.970747183，$$

而 x^{11} 項係數為

$$(\frac{2}{3})^{11}-\frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^{11}-4=-\frac{2893102105}{725594112}\approx-3.987218277。$$

接著我們用Maple算出此分式在 $x=0$ 的泰勒級數展開式的前14項以驗證答案:

>taylor((-5*x^2+26*x-33)/(2*x^3-x^2-7*x+6),x=0,14);

$$-\frac{11}{2}-\frac{25}{12}x-\frac{301}{72}x^2-\frac{1465}{432}x^3-\frac{10261}{2592}x^4-\frac{58945}{15552}x^5-\frac{368701}{93312}x^6-\frac{2195785}{559872}x^7-\frac{13338661}{3359232}x^8$$

$$-\frac{79998865}{20155392}x^9-\frac{481927501}{120932352}x^{10}-\frac{2893102105}{725594112}x^{11}-\frac{17383361461}{4353564672}x^{12}-\frac{104343362785}{26121388032}x^{13}+O(x^{14})$$

接下來我們研究假分式的泰勒級數展開式問題:

問題(B):(1)求分式 $\dfrac{6x^5+53x^4+176x^3+274x^2+183x+29}{2x^3+11x^2+16x+7}$ 在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式，並求其收斂範圍，

(2)求此分式在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式中 $(x+2)^{10}$ 和 $(x+2)^{15}$ 項的係數。

解:(1)首先我們利用綜合除法先把此分式的分子和分母分別表示成 $x+2$ 的多項式。

$$\begin{array}{llllll|l}
6 & +53 & +176 & +274 & +183 & +29 & -2 \\
 & -12 & -82 & -188 & -172 & -22 & \\ \hline
6 & +41 & +94 & +86 & +11 & ,+7 & \\
 & -12 & -58 & -72 & -28 & & \\ \hline
6 & +29 & +36 & +14 & ,-17 & & \\
 & -12 & -34 & -4 & & & \\ \hline
6 & +17 & +2 & ,+10 & & & \\
 & -12 & -10 & & & & \\ \hline
6 & +5 & ,-8 & & & & \\
 & -12 & & & & & \\ \hline
6 & ,-7 & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll|l}
2 & +11 & +16 & +7 & -2 \\
 & -4 & -14 & -4 & \\ \hline
2 & +7 & +2 & ,+3 & \\
 & -4 & -6 & & \\ \hline
2 & +3 & ,-4 & & \\
 & -4 & & & \\ \hline
2 & ,-1 & & &
\end{array}$$

從左上邊的算式中我們可以得到此分式的分子 $6x^5+53x^4+176x^3+274x^2+183x+29$ $=6(x+2)^5-7(x+2)^4-8(x+2)^3+10(x+2)^2-17(x+2)+7$；而從右上邊的算式中我們可以得到此分式的分母 $2x^3+11x^2+16x+7=2(x+2)^3-(x+2)^2-4(x+2)+3$。接著我們用 Maple 檢驗一下答案:

>taylor(6*x^5+53*x^4+176*x^3+274*x^2+183*x+29,x=-2);

$$7-17(x+2)+10(x+2)^2-8(x+2)^3-7(x+2)^4+6(x+2)^5$$

>taylor(2*x^3+11*x^2+16*x+7,x=-2);

$$3-4(x+2)-(x+2)^2+2(x+2)^3$$

我們令 $y=x+2$，所以此分式

$$\frac{6x^5+53x^4+176x^3+274x^2+183x+29}{2x^3+11x^2+16x+7}$$

$$=\frac{6y^5-7y^4-8y^3+10y^2-17y+7}{2y^3-y^2-4y+3}$$

$$=3y^2-2y+1+\frac{-6y^2-7y+4}{2y^3-y^2-4y+3}\text{。}$$

假設 $\dfrac{-6y^2-7y+4}{2y^3-y^2-4y+3}=\dfrac{-6y^2-7y+4}{(y-1)^2(2y+3)}=\dfrac{a}{y-1}+\dfrac{b}{(y-1)^2}+\dfrac{c}{2y+3}$，其中 a,b,c 為實數。

則 $a(y-1)(2y+3)+b(2y+3)+c(y-1)^2=-6y^2-7y+4$，將 $y=1,-\dfrac{3}{2},0$ 分別代入此等式

中我們得到 $\begin{cases} 5b=-9 \\ \dfrac{25}{4}c=1 \\ -3a+3b+c=4 \end{cases}$，所以 $b=-\dfrac{9}{5}$，$c=\dfrac{4}{25}$，$a=-\dfrac{77}{25}$。同樣用 Maple 檢驗分

式 $\dfrac{-6y^2-7y+4}{2y^3-y^2-4y+3}$ 的部分分式之和：

>convert((-6*y^2-7*y+4)/(2*y^3-y^2-4*y+3),parfrac,y);

$$\frac{4}{25(2y+3)}-\frac{77}{25(y-1)}-\frac{9}{5(y-1)^2}$$

因此 $$\frac{6y^5-7y^4-8y^3+10y^2-17y+7}{2y^3-y^2-4y+3}$$

$$=3y^2-2y+1+\frac{-\frac{77}{25}}{y-1}+\frac{-\frac{9}{5}}{(y-1)^2}+\frac{\frac{4}{25}}{2y+3}$$

$$=3y^2-2y+1+\frac{\frac{77}{25}}{1-y}+\frac{-\frac{9}{5}}{(1-y)^2}+\frac{\frac{4}{75}}{1+\frac{2}{3}y}$$

$$=3y^2-2y+1+\frac{77}{25}\sum_{n=0}^{\infty}y^n-\frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n+\frac{4}{75}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{2}{3})^n y^n \qquad \text{（利用定理 H）}$$

$$=(1+\frac{77}{25}-\frac{9}{5}+\frac{4}{75})+(-2+\frac{77}{25}-\frac{18}{5}-\frac{8}{225})y+(3+\frac{77}{25}-\frac{27}{5}+\frac{16}{675})y^2$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}[\frac{77}{25}-\frac{9}{5}(n+1)+\frac{4}{75}(-\frac{2}{3})^n]y^n$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{23}{9}y+\frac{19}{27}y^2+\sum_{n=3}^{\infty}[\frac{4}{75}(-\frac{2}{3})^n-\frac{9}{5}n+\frac{32}{25}]y^n \text{。}$$

所以原分式 $\dfrac{6x^5+53x^4+176x^3+274x^2+183x+29}{2x^3+11x^2+16x+7}$ 在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式為

$$\frac{7}{3}-\frac{23}{9}(x+2)+\frac{19}{27}(x+2)^2+\sum_{n=3}^{\infty}[\frac{4}{75}(-\frac{2}{3})^n-\frac{9}{5}n+\frac{32}{25}](x+2)^n \text{。}$$

因為 $\dfrac{1}{1-y}$，$\dfrac{1}{(1-y)^2}$，$\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}y}$ 三者可以表示成幾何級數的收斂範圍分別為 $|y|<1$，$|y|<1$ 和 $|y|<\dfrac{3}{2}$，我們取其中最小的收斂範圍 $|y|<1$，所以此分式在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式的收斂範圍為 $|x+2|<1$，即 $-3<x<-1$。

(2)此分式在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式中 $(x+2)^{10}$ 項的係數為

$$\frac{32}{25}-\frac{9}{5}\cdot 10+\frac{4}{75}(-\frac{2}{3})^{10}=-\frac{2961734}{177147}\approx -16.71907512，$$

而 $(x+2)^{15}$ 項的係數為

$$\frac{32}{25}-\frac{9}{5}\cdot 15+\frac{4}{75}(-\frac{2}{3})^{15}=-\frac{1107166907}{43046721}\approx -25.7201218 \text{。}$$

接著我們用Maple算出此分式在 $x=-2$ 的泰勒級數展開式的前16項以驗證答案：

>taylor((6*x^5+53*x^4+176*x^3+274*x^2+183*x+29)/(2*x^3+11*x^2+16*x+7),x=-2, 16);

$$\frac{7}{3}-\frac{23}{9}(x+2)+\frac{19}{27}(x+2)^2-\frac{335}{81}(x+2)^3-\frac{1436}{243}(x+2)^4-\frac{5633}{729}(x+2)^5-\frac{20810}{2187}(x+2)^6-\frac{74291}{6561}(x+2)^7$$

$$-\frac{258200}{19683}(x+2)^8-\frac{881093}{59049}(x+2)^9-\frac{2961734}{177147}(x+2)^{10}-\frac{9842615}{531441}(x+2)^{11}-\frac{32395988}{1594323}(x+2)^{12}$$

$$-\frac{105800585}{4782969}(x+2)^{13}-\frac{343223234}{14348907}(x+2)^{14}-\frac{1107166907}{43046721}(x+2)^{15}+O((x+2)^{16})$$

最後我們研究一個真分式在某點的泰勒級數展開式求法，此展開式的係數會以複數型式呈現出來，但事實上計算的結果會是實數，而且這些係數會呈現數字循環的情形，所以顯得比較有趣。

問題(C): (1)求分式 $\dfrac{8x^2-48x+79}{x^3-9x^2+27x-28}$ 在 $x=3$ 的泰勒級數展開式，並求其收斂範圍，

(2)求此分式在 $x=3$ 的泰勒級數展開式中 $(x-3)^6$ 和 $(x-3)^{10}$ 項的係數。

解:(1)首先我們先把此分式的分子和分母分別表示成 $x-3$ 的多項式。分子 $8x^2-48x+79=8(x^2-6x)+79=8[(x-3)^2-9]+79=8(x-3)^2+7$；而分母 $x^3-9x^2+27x-28=(x^3-9x^2+27x-27)-1=(x-3)^3-1$。接著我們用Maple檢驗答案:

>taylor(8*x^2-48*x+79,x=3);

$$7+8(x-3)^2$$

>taylor(x^3-9*x^2+27*x-28,x=3);

$$-1+(x-3)^3$$

令 $y=x-3$，則原分式 $\dfrac{8x^2-48x+79}{x^3-9x^2+27x-28}$

$$=\frac{8(x-3)^2+7}{(x-3)^3-1}=\frac{8y^2+7}{y^3-1}=\frac{8y^2+7}{(y-1)(y^2+y+1)}\text{。}$$

假設 $\dfrac{8y^2+7}{(y-1)(y^2+y+1)}=\dfrac{a}{y-1}+\dfrac{by+c}{y^2+y+1}$，其中 a,b,c 為實數。所以

$$a(y^2+y+1)+(by+c)(y-1)=8y^2+7\text{。}$$

將 $y=1,0,-1$ 分別代入此等式中，我們得到 $\begin{cases}3a=15\\ a-c=7\\ a+2b-2c=15\end{cases}$，因此 $a=5$，$c=-2$ 且 $b=3$。

所以 $\dfrac{8y^2+7}{(y-1)(y^2+y+1)}=\dfrac{5}{y-1}+\dfrac{3y-2}{y^2+y+1}$，接著用 Maple 檢驗答案:

>convert((8*y^2+7)/((y-1)*(y^2+y+1)),parfrac,y);

$$\frac{5}{y-1}+\frac{3y-2}{y^2+y+1}$$

我們再假設 $\dfrac{3y-2}{y^2+y+1}=\dfrac{\beta}{y-\lambda}+\dfrac{\gamma}{y-\mu}$，其中 λ,μ 為 $y^2+y+1=0$ 的兩個複數解，

$\lambda=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\mu=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，而 β,γ 也是複數。因此我們得到 $\begin{cases}\beta+\gamma=3\\ \beta\mu+\gamma\lambda=2\end{cases}$，所以

$\beta=\dfrac{3\lambda-2}{\lambda-\mu}=\dfrac{9+7\sqrt{3}i}{6}$，$\gamma=3-\beta=\dfrac{9-7\sqrt{3}i}{6}$。所以 $\dfrac{\beta}{\lambda}=\dfrac{\frac{9+7\sqrt{3}i}{6}}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}=\dfrac{3-4\sqrt{3}i}{3}=1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}i$，

$\dfrac{\gamma}{\mu}=\dfrac{\frac{9-7\sqrt{3}i}{6}}{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}=\dfrac{3+4\sqrt{3}i}{3}=1+\dfrac{4}{\sqrt{3}}i$，因此

$$\begin{aligned}
&\frac{8y^2+7}{(y-1)(y^2+y+1)}\\
&=\frac{5}{y-1}+\frac{\beta}{y-\lambda}+\frac{\gamma}{y-\mu}\\
&=\frac{-5}{1-y}-\frac{\frac{\beta}{\lambda}}{1-\frac{1}{\lambda}y}-\frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1-\frac{1}{\mu}y}\\
&=-5\sum_{n=0}^{\infty}y^n-\frac{\beta}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\lambda})^n y^n-\frac{\gamma}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\mu})^n y^n \qquad \text{(利用定理H)}\\
&=-5\sum_{n=0}^{\infty}y^n-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n y^n-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n y^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n]y^n,
\end{aligned}$$

所以原分式 $\dfrac{8x^2-48x+79}{x^3-9x^2+27x-28}$ 在 $x=3$ 的泰勒級數展開式為

$$\sum_{n=0}^{\infty}[-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n](x-3)^n$$ 。

因為 $\frac{1}{1-y}$ ， $\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}y}$ 和 $\frac{1}{1-\frac{1}{\mu}y}$ 分別的收斂範圍皆為 $|y|<1$， $|y|<|\lambda|=\left|\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right|=1$ 以及 $|y|<|\mu|=\left|\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right|=1$。所以此泰勒級數展開式的收斂範圍為 $|y|<1$，也就是 $|x-3|<1$，即 $2<x<4$。雖然此泰勒級數展開式的係數是以複數型式呈現，但是實際上算出來是實數，我們可由以下計算 $(x-3)^6$ 項和 $(x-3)^{10}$ 的係數就可以看出。

(2)此分式在 $x=3$ 的泰勒級數展開式的 $(x-3)^6$ 項係數為

$$-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^6-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^6=-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)=-7$$ ，

而 $(x-3)^{10}$ 項係數為

$$\begin{aligned}&-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^{10}-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^{10}\\&=-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})\\&=-5-\frac{1}{2\sqrt{3}}[(\sqrt{3}-4i)(-1-\sqrt{3}i)+(\sqrt{3}+4i)(-1+\sqrt{3}i)]\\&=-5-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(-10\sqrt{3})\\&=0\end{aligned}$$ 。

我們用Maple算出此分式在 $x=3$ 的泰勒級數展開式的前13項以驗證答案:

>taylor((8*x^2-48*x+79)/(x^3-9*x^2+27*x-28),x=3,13);

$$-7-8(x-3)^2-7(x-3)^3-8(x-3)^5-7(x-3)^6-8(x-3)^8$$
$$-7(x-3)^9-8(x-3)^{11}-7(x-3)^{12}+O((x-3)^{14})$$

我們從上面Maple計算出來的結果可以看出此泰勒級數展開式從常數項開始以後的係數呈現 −7，0和−8三個數字循環出現，主要是因為 $(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^3=1$ 且 $(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^3=1$，使得此泰勒級數展開式從常數項開始以後的係數 $-5-(1-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n$

$-(1+\frac{4}{\sqrt{3}}i)\cdot(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n$ 產生數字每三個循環出現的情形。

四、附錄

引理 1: 假設 m,n 為正整數，則 $\binom{-m}{n}=(-1)^n\binom{m+n-1}{n}$。

（證明）：

$$\begin{aligned}\binom{-m}{n}&=\frac{-m(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-n+1)}{n!}\\&=\frac{(-1)^n m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{n!}\\&=\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{n!(m-1)!}\\&=(-1)^n\binom{m+n-1}{n}\end{aligned}$$ □

引理 2: 假設 x 為實數，λ 為複數且 $\lambda\neq 0$，而 m 為一正整數。如果 $|x|<\frac{1}{|\lambda|}$，則 $\frac{1}{(1-\lambda x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\lambda^n x^n$。

（證明）：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-\lambda x)^m}\\&=(1-\lambda x)^{-m}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}(-\lambda x)^n \quad \text{(利用二項級數定理)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}(-1)^n\lambda^n x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\lambda^n x^n \quad \text{(由引理 1 得知)}\end{aligned}$$ □

定理 H: 假設 x 為實數，λ 為複數且 $\lambda\neq 0$。如果 $|x|<\frac{1}{|\lambda|}$，則 $\frac{1}{1-\lambda x}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^n$，$\frac{1}{(1-\lambda x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\lambda^n x^n$。

(證明)： 在引理 2 中代入 $m=1$ 得到 $\dfrac{1}{1-\lambda x}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^n$，代入 $m=2$ 得到 $\dfrac{1}{(1-\lambda x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\lambda^n x^n$。 □

五、結論

由以上的例子，我們知道求分式在某點的泰勒級數展開式是可以辦到的，而且可以依據前面所提到的三個步驟，循序漸進的把答案找出來。我們也看到Maple在整個解題過程中提供了我們很多線索，使我們可以經由這些蛛絲馬跡判斷我們使用方法的正確性，或者修正我們所用的方法。我們甚至可以利用Maple來設計一些問題，並且從中找尋解題的樂趣。經由我們的介紹，希望可以對此問題有更進一步的了解，並且利用我們提供的解題步驟和技巧廣泛的應用在一些更困難的問題上。

參考文獻

[1]余啟輝(2011)，「泰勒級數展開式的一些研究」，南榮學報第十四期，34D1-1~9。

[2]黃中彥(2007)，*基礎離散數學*(第二版)，6.4，新文京出版公司。

[3]顏重功(2010)，*離散數學*，6.5，普林斯頓出版公司。

[4]Kenneth H. R.(2008)，*離散數學*(第六版)，謝良瑜、陳志賢(譯)，6.4，全華圖書出版公司。

[5]洪維恩(2000)，*Maple 在微積分之應用—基礎篇*(初版)，五南圖書出版公司。

[6]洪維恩(2001)，*數學魔法師 Maple 6*(第二版)，碁峰資訊公司。

[7]希爾/威立大工作室(1997)，*Maple V 學習手冊*，高立圖書出版公司。

[8]Abell, M. L. and Braselton, J. P.(2005), *Maple by Example*, 3rd ed., Elsevier Academic Press.

[9]Blachman, N., Mossinghoff, M.(1995), *Maple V Quick Reference*, Brooks/Cole.

[10]Corless, R.M. (1994), *Essential Maple*, Springer-Verlag, New York.

[11]Apostol, T.M.(1984), *Mathematical Analysis*(2nd ed.), p241, Addison-Wesley Publishing Company.

[12]Larson, R., Hostetler, R.P., and Edwards, B.H.(2006), *Calculus with Analytic Geometry*, (8th ed.), p681, Houghton Mifflin, Boston.