兩種指數函數的微分問題

余啟輝

南榮技術學院管理與資訊系助理教授

摘要

本篇論文主要是研究兩種指數函數的微分問題。我們利用 Leibniz 微分法則和逐項微分定理可以求出這兩種指數函數的任意階導函數，因此大大降低了求解它們高階微分值的困難度。此外，我們舉出四個指數函數的例子，實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數解的近似值。

關鍵字：指數函數、Leibniz微分法則、逐項微分定理、Maple

一、前言

在微積分課程裡，要求函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 m 階微分值(m -th order derivative value) $f^{(m)}(c)$ (其中 m 為正整數)，一般而言需要經過兩道手續：首先必須求出 $f(x)$ 的 m 階導函數 $f^{(m)}(x)$ ，其次再代入 $x=c$ 才能得到。這兩道手續在求高階微分值(即 m 比較大的情形)時會面臨計算越來越複雜的困境，所以要用手算的方式得到答案可以說是一件非常不容易的事情，有關微分問題的研究可以參考(高木貞治，1984，第二章；Edwards & Penney, 1986, chap. 3；Euler, 1997；Grossman, 1992, chap. 2；Larson, Hostetler & Edwards, 2006, chap. 2；Marshall, 2000)。針對這一個難題，本篇文章研究以下兩種指數函數的微分問題

$$f(x) = \exp[(ax+b)^p(cx+d)^q] \tag{1}$$

以及

$$g(x) = \exp[(\lambda x+\beta)^r \exp(wx+t)] \tag{2}$$

其中 $a,b,c,d,p,q,r,\lambda,\beta,w,t$ 為實數。我們利用 Leibniz 微分法則(Leibniz differential rule)和逐項微分定理(differentiation term by term theorem)可以求出這兩種指數函數的任意階導函數，也就是本文兩個主要的結果－定理 1、定理 2，因此大大降低了求解這兩種指數函數高階微分值的困難度。此外，我們舉出四個指數函數的例子，實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案，都是以無窮級數的型式呈現的。同時，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數解的近似值。另一方面，想要了解 Maple 在其他函數微分問題上的應用可以參考(余啟輝，2012a, 2012b, 2012c, 2012d, 2012e, 2012f, 2012g, 2012h, 2012i, 2012j, 2012k, 2012l)。

二、主要的理論

以下我們先介紹本文中用到的符號：

符號：(i)函數 $f(x)$ 的 m 階導函數記作 $f^{(m)}(x)$，其中 m 為正整數。

(ii)設 t 為實數且 k 為正整數，定義 $(t)_k = t(t-1)\cdots(t-k+1)$；而 $(t)_0 = 1$。

(iii)設 m,n 為正整數且 $n \le m$，定義 $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$；而 $\binom{m}{0} = 1$。

接著介紹本文中用到的兩個重要定理：

Leibniz 微分法則 (高木貞治，1984，第 68 頁)：設 m 為正整數且 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是對 x 可以 m 次微分的函數，則 $u(x)$ 和 $v(x)$ 兩個函數相乘的 m 次微分

$$(uv)^{(m)} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} u^{(m-n)} v^{(n)} 。$$

逐項微分定理 (Apostol, 1975, p230)：如果對所有非負整數 k，函數 $g_k : (a,b) \to R$ 滿足下列三個條件：(i)存在一點 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂(uniformly convergent)。則

$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 上均勻收斂而且可以微分，其微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_k(x)$。

以下是本文第一個主要的結果，有關指數函數 $f(x)=\exp[(ax+b)^p(cx+d)^q]$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 1: 設 a,b,c,d,p,q 為實數，m 為正整數且

$$f(x)=\exp[(ax+b)^p(cx+d)^q]$$

的定義域為 $\{x\in R \mid (ax+b)^p(cx+d)^q \text{ 存在且不為 } 0\}$，則 $f(x)$ 的 m 階導函數

$$f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot a^{m-n}c^{n}(pk)_{m-n}(qk)_{n}(ax+b)^{pk-m+n}(cx+d)^{qk-n} \tag{3}$$

，對所有實數 x 使得 $(ax+b)^p(cx+d)^q$ 存在且不為 0 。

證明:

$$f(x)=\exp[(ax+b)^p(cx+d)^q]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[(ax+b)^p(cx+d)^q]^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ax+b)^{pk}(cx+d)^{qk} \tag{4}$$

所以 $f(x)$ 的任意 m 階導函數

$$f^{(m)}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^m}{dx^m}[(ax+b)^{pk}(cx+d)^{qk}] \quad \text{(利用逐項微分定理)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}[(ax+b)^{pk}]^{(m-n)}[(cx+d)^{qk}]^{(n)} \quad \text{(利用 Leibniz 微分法則)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot[a^{m-n}(pk)_{m-n}(ax+b)^{pk-m+n}]\cdot[c^{n}(qk)_{n}(cx+d)^{qk-n}]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot a^{m-n}c^{n}(pk)_{m-n}(qk)_{n}(ax+b)^{pk-m+n}(cx+d)^{qk-n}$$

，對所有實數 x 使得 $(ax+b)^{p}(cx+d)^{q}$ 存在且不為 0 ■

接著是本文第二個主要的結果，有關指數函數 $g(x)=\exp[(\lambda x+\beta)^{r}\exp(wx+t)]$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 2: 設 λ,β,w,t,r 為實數，m 為正整數且函數

$$g(x)=\exp[(\lambda x+\beta)^{r}\exp(wx+t)]$$

的定義域為 $\{x\in R \mid (\lambda x+\beta)^{r}$ 存在且不為 $0\}$，則 $g(x)$ 的 m 階導函數

$$g^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot\lambda^{m-n}w^{n}k^{n}(rk)_{m-n}\cdot(\lambda x+\beta)^{rk-m+n}\cdot\exp k(wx+t) \tag{5}$$

，對所有實數 x 使得 $(\lambda x+\beta)^{r}$ 存在且不為 0 。

證明:

$$\begin{aligned}g(x)&=\exp[(\lambda x+\beta)^{r}\exp(wx+t)]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[(\lambda x+\beta)^{r}\exp(wx+t)]^{k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda x+\beta)^{rk}\exp k(wx+t)\end{aligned} \tag{6}$$

所以 $g(x)$ 的 m 階導函數

$$g^{(m)}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^{m}}{dx^{m}}[(\lambda x+\beta)^{rk}\exp k(wx+t)] \quad \text{(利用逐項微分定理)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}[(\lambda x+\beta)^{rk}]^{(m-n)}[\exp k(wx+t)]^{(n)} \quad \text{(利用 Leibniz 微分法則)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot[\lambda^{m-n}(rk)_{m-n}(\lambda x+\beta)^{rk-m+n}]\cdot[w^{n}k^{n}\exp k(wx+t)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot \lambda^{m-n} w^n k^n (rk)_{m-n} \cdot (\lambda x + \beta)^{rk-m+n} \cdot \exp k(wx+t)$$

，對所有 x 使得 $(\lambda x+\beta)^r$ 存在且不為 0 ■

三、例子說明

接著針對本文所探討的兩種指數函數的微分問題，舉出四個例子實際的利用定理 1 和定理 2 求出這些指數函數的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面，我們利用 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數解的近似值。

例題 1: 設指數函數

$$f_1(x) = \exp\left[\frac{1}{(2x+1)^3(3x-4)^2}\right] \tag{7}$$

的定義域為 $\left\{x \in R \middle| x \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right\}$ 。此函數對應定理 1 中 $a=2, b=1, c=3, d=-4$ 以及 $p=-3, q=-2$ 的情形。所以由定理 1 我們很容易可以得到 $f_1(x)$ 的任意 m 階導函數

$$f_1^{(m)}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot 2^{m-n} \cdot 3^n (-3k)_{m-n} (-2k)_n (2x+1)^{-3k-m+n} (3x-4)^{-2k-n} \tag{8}$$

，對所有 $x \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$ 。

因此可以求出 $f_1(x)$ 在 $x=\frac{3}{4}$ 的 11 階微分值

$$f_1^{(11)}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{11} \binom{11}{n} \cdot 2^{11-n} \cdot 3^n (-3k)_{11-n} (-2k)_n \left(\frac{5}{2}\right)^{-3k-11+n} \left(-\frac{7}{4}\right)^{-2k-n}$$

(9)

接著我們利用 Maple 算出 $f_1^{(11)}\left(\frac{3}{4}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值：

>f1:=x->exp(1/((2*x+1)^3*(3*x-4)^2));

$$f1 := x \to e^{\frac{1}{(2x+1)^3 (3x-4)^2}}$$

>evalf((D@@11)(f1)(3/4),20);

$$1.4717878490760073071 \cdot 10^9$$

>evalf(sum(1/k!*sum(11!/(n!*(11-n)!)*2^(11-n)*3^n*product(-3*k-i,i=0..10-n)*product(-2*k-j,j=0..n-1)*(5/2)^(-3*k-11+n)*(-7/4)^(-2*k-n),n=0..11),k=0..infinity),20);

$$1.4717878490760073072 \cdot 10^9$$

例題 2:假設指數函數

$$f_2(x) = \exp\left[(5x+3)^{\frac{1}{2}}(6x-1)^{\frac{4}{7}}\right] \tag{10}$$

的定義域為 $\left\{x \in R \middle| x > -\frac{3}{5} \text{且} x \neq \frac{1}{6}\right\}$。此函數對應定理 1 中 $a=5, b=3, c=6, d=-1$ 以及 $p=1/2, q=4/7$ 的情形。利用定理 1 我們可以求出 $f_2(x)$ 的任意 m 階導函數

$$f_2^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot 5^{m-n}6^n\left(\frac{1}{2}k\right)_{m-n}\left(\frac{4}{7}k\right)_n (5x+3)^{\frac{1}{2}k-m+n}(6x-1)^{\frac{4}{7}k-n} \tag{11}$$

，對所有 $x > -\frac{3}{5}$ 且 $x \neq \frac{1}{6}$。

所以 $f_2(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 的 15 階微分值

$$f_2^{(15)}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{15}\binom{15}{n}\cdot 5^{15-n}6^n\left(\frac{1}{2}k\right)_{15-n}\left(\frac{4}{7}k\right)_n\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{1}{2}k-15+n}\cdot 2^{\frac{4}{7}k-n}$$

(12)

同樣我們利用 Maple 算出 $f_2^{(15)}\left(\frac{1}{2}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值：

```
>f2:=x->exp((5*x+3)^(1/2)*(6*x-1)^(4/7));
```

$$f2 := x \to e^{\sqrt{5x+3}\,(6x-1)^{4/7}}$$

```
>evalf((D@@15)(f2)(1/2),20);
```

$$1.6539823872211346816953944479\cdot 10^{17}$$

```
>evalf(sum(1/k!*sum(15!/(n!*(15-n)!)*5^(15-n)*6^n*product(k/2-i,i=0..14-n)*product(4*k
/7-j,j=0..n-1)*(11/2)^(k/2-15+n)*2^(4*k/7-n),n=0..15),k=0..infinity),30);
```

$$1.6539823872211346816953944467\cdot 10^{17}$$

$$+\ 1.2749900158914385216369209296\,1\cdot 10^{-17}\,\mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中出現了虛數 I $(=\sqrt{-1})$，是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的緣故，但因為虛數部分很小，所以是可以忽略的。(12)式等號兩邊在小數點後第 10 位開始產生誤差，應該算是非常小的誤差。

例題 3: 假設指數函數

$$g_1(x) = \exp\left[(3x-1)^{\frac{5}{6}}\exp(2x+4)\right] \tag{13}$$

的定義域為 $\left\{x \in R \middle| x > \frac{1}{3}\right\}$。此函數對應定理 2 中 $\lambda = 3, \beta = -1, w = 2, t = 4$ 以及 $r = 5/6$ 的情形。利用定理 2 我們得到 $g_1(x)$ 的任意 m 階導函數

$$g_1^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\cdot 3^{m-n}2^n k^n\cdot\left(\frac{5}{6}k\right)_{m-n}\cdot(3x-1)^{\frac{5}{6}k-m+n}\cdot\exp k(2x+4) \tag{14}$$

，對所有實數 $x > \frac{1}{3}$。

所以可以求出 $g_1(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 的 7 階微分值

$$g_1^{(7)}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{7}\binom{7}{n}\cdot 3^{7-n}2^n k^n\cdot\left(\frac{5}{6}k\right)_{7-n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}k-7+n}\cdot\exp 5k$$

$$=6^7\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\exp(5k)\cdot\sum_{n=0}^{7}\binom{7}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}k\right)_{7-n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}k+n} \qquad (15)$$

以下是利用 Maple 得到 $g_1^{(7)}\left(\frac{1}{2}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值：

>g1:=x->exp((3*x-1)^(5/6)*exp(2*x+4));

$$g1 := x \to e^{(3x-1)^{5/6}e^{2x+4}}$$

>evalf((D@@7)(g1)(1/2),30);

$$3.76690728207377650451657203732\cdot 10^{55}$$

>evalf(6^7*sum(1/k!*exp(5*k)*sum(7!/(n!*(7-n)!)*(2*k/3)^n*product(5*k/6-j,j=0..6-n)*(1/2)^(5*k/6+n),n=0..7),k=0..infinity),30);

$$3.76690728207377650451657203733\cdot 10^{55}$$

$$-\ 1.56720442905668058486283109303\cdot 10^{-23}\ \mathrm{I}$$

上面 Maple 得到的答案中同樣出現了虛數 I，由於虛數部分很小，所以是可以忽略的。雖然 $g_1^{(7)}\left(\frac{1}{2}\right)$ 和它的無窮級數解兩者的近似值從左邊算起第 30 位整數開始產生誤差，但是兩者相對誤差的百分比是非常小的。如果想要更加縮小兩者的誤差值，只要將 Maple 指令最後的數字 30 改成更大的正整數就可以辦到，只不過 Maple 計算所花費的時間可能要增加好幾倍。

例題 4: 假設指數函數

$$g_2(x)=\exp\left[\frac{\exp(6x-3)}{(8x+5)^{3/7}}\right] \qquad (16)$$

的定義域為 $\left\{x \in R \middle| x \neq -\frac{5}{8}\right\}$。此函數對應定理 2 中 $\lambda = 8, \beta = 5, w = 6, t = -3$ 以及 $r = -3/7$ 的情形。利用定理 2 我們得到 $g_2(x)$ 的任意 m 階導函數

$$g_2{}^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \cdot 8^{m-n} 6^n k^n \cdot \left(-\frac{3}{7}k\right)_{m-n} \cdot (8x+5)^{-\frac{3}{7}k-m+n} \cdot \exp k(6x-3) \tag{17}$$

，對所有實數 $x \neq -\frac{5}{8}$。

所以可以求出 $g_2(x)$ 在 $x = \frac{2}{3}$ 的 12 階微分值

$$\begin{aligned} g_2{}^{(12)}\left(\frac{2}{3}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{12} \binom{12}{n} \cdot 8^{12-n} 6^n k^n \cdot \left(-\frac{3}{7}k\right)_{12-n} \cdot \left(\frac{31}{3}\right)^{-\frac{3}{7}k-12+n} \cdot \exp k \\ &= \left(\frac{24}{31}\right)^{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \exp k \cdot \sum_{n=0}^{12} \binom{12}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}k\right)^n \cdot \left(-\frac{3}{7}k\right)_{12-n} \cdot \left(\frac{31}{3}\right)^{-\frac{3}{7}k+n} \end{aligned} \tag{18}$$

我們利用 Maple 算出 $g_2{}^{(12)}\left(\frac{2}{3}\right)$ 和它的無窮級數解的近似值如下：

```
>g2:=x->exp(exp(6*x-3)/(8*x+5)^(3/7));
```

$$g2 := x \rightarrow e^{\frac{e^{6x-3}}{(8x+5)^{3/7}}}$$

```
>evalf((D@@12)(g2)(2/3),30);
```

$$1.34742887683964915799579427533 \cdot 10^{16}$$

```
>evalf((24/31)^12*sum(1/k!*exp(k)*sum(12!/(n!*(12-n)!)*(3*k/4)^n*product(-3*k/7-j,j=0..11-n)*(31/3)^(-3*k/7+n),n=0..12),k=0..infinity),30);
```

$$1.34742887683964915799579427539 \cdot 10^{16} + 2.30117595107284291454368724521 \cdot 10^{-24}\, I$$

上面Maple得到的答案中，因為虛數部分很小，所以也是可以忽略的。

四、結論

由上面四個例子，可以知道定理1和定理2是求解本文所探討的兩種指數函數微分問題的主要理論依據，並且我們看到Leibniz微分法則和逐項微分定理在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位，事實上這兩個定理的應用十分廣泛，許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解，我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，也可以看出Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用Maple來設計一些函數的微分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會將觸角延伸到其他微積分和工程數學的問題上，並且利用Maple作為輔助工具來解決這些問題。

參考文獻

余啟輝 (2012a)。Maple 的應用－以兩種函數的導函數閉合型式解求法為例子。WCE 2012 民生電子研討會，P0082，雲林縣：國立虎尾科技大學。

余啟輝 (2012b)。Maple 的應用—以有理函數的微分問題為例子。2012 光電與通訊工程研討會，271-274 頁，高雄市：國立高雄應用科技大學。

余啟輝 (2012c)。傅利葉級數在三角函數微分問題上的應用，*遠東學報*，*第二十九卷*(第三期)，271-279 頁。

余啟輝 (2012d)。Maple 的應用－以兩種特別函數的微分問題為例子。MC2012 第十七屆行動計算研討會，ID17，新北市：長庚大學。

余啟輝 (2012e)。Maple 的應用－以求解某種類型有理函數的高階微分值為例子。DLT2012 數位生活科技研討會，150-153 頁，雲林縣：國立雲林科技大學。

余啟輝 (2012f)。Maple 在兩種函數的高階微分值求解問題上的應用。DTIM2012 數位科技與創新管理研討會，A46，新北市：華梵大學。

余啟輝 (2012g)。Maple 在微分問題上的應用。2012 第六屆創新管理學術與實務研討會，桃園縣：萬能科技大學。

余啟輝 (2012h)。Maple 在雙曲函數微分問題上的應用。ICSSMET 2012 安全管理與工程技術國際研討會，481-484 頁，嘉義縣：吳鳳科技大學。

余啟輝 (2012i)。Maple 的應用－以三角函數的高階微分值求解問題為例子。

ICSSMET2012 安全管理與工程技術國際研討會，469-473 頁，嘉義縣：吳鳳科技大學。

余啟輝 (2012j)。Maple 在求函數高階微分值問題上的應用。ICIM2012 第 23 屆國際資訊管理學術研討會，MS0287，高雄市：國立高雄大學。

余啟輝 (2012k)。Maple 的應用—以一些周期函數的微分問題為例子。IETAC2012 第五屆資訊教育與科技應用研討會，D3：11-16 頁，台中市：中台科技大學。

余啟輝 (2012l)。Maple 的應用－以正弦和餘弦函數的微分問題為例子。屏東台東澎湖地區大專校院第五屆通識教育暨通識課程發展聯合學術研討會，197-207 頁，屏東縣：永達技術學院。

高木貞治 (原著)，葉能哲、賴漢卿 (合譯) (1984)。*高等微積分(解析概論)*。台北市：文笙書局。

謝良瑜、陳志賢(譯)，Rosen, K. H.(原著) (2008)。*離散數學*。新北市：全華圖書公司。

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical Analysis* (2nd ed.). Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Azarian, M. K. (1993). There May Be More Than One Way to Find the Derivative of a Function. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, *5*(1), pp. 13-15.

Edwards, C. H. Jr. and Penney, D. E. (1986). *Calculus and Analytic Geometry* (2nd ed.). New Jersey：Prentice-Hall, Inc.

Euler, R. (1997). A Note on Taylor's Series for sin(ax+b) and cos(ax+b). *The College Mathematics Journal*, *28*(4), pp. 297-298.

Grossman, S. I. (1992). *Calculus* (5th ed.). London：Saunders College Publishing.

Larson, R., Hostetler, R. P. and Edwards, B. H. (2006). *Calculus with Analytic Geometry* (8th ed.). Boston：Houghton Mifflin.

Marshall, A. (2000). Math Bite: Once in a While, Differentiation is Multiplicative. *Mathematics Magazine*, p302.