極限問題之研究

余啟輝

南榮技術學院管理與資訊系助理教授

摘要

本篇文章主要是研究六種困難的極限問題。我們利用參數微分法、逐項微分法和逐項積分法可以求出這六種極限的無窮級數表示法。另一方面，我們舉出六個極限的例子實際的求出它們的無窮級數表示法。同時，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些極限以及它們無窮級數表示法的近似值。

關鍵字：極限、參數微分法、逐項微分法、逐項積分法、Maple

一、前言

在微積分課程裡，函數的微分和積分都是用極限定義的，所以有關極限問題的研究便成為一項重要的課題。我們經常需要求解一些極限的問題，然而有些極限問題並不是很容易可以得到答案，關於極限問題的探討可以參考相關文獻(黃世吟、余啟輝，2011；Edwards & Penney, 1986, chap. 11；Grossman, 1992, chap. 9；Larson, Hostetler & Edwards, 2006, chap. 8；Widder, 1961, chap. 8)。本篇論文主要是研究六種困難的極限問題，分別是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}(n+k)^{b} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}(n-k)^{b} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}\cdot r^{k/n} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}\cos\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \tag{6}$$

其中 $a>0, b>0, r>0$ 且 m 為正整數。我們利用參數微分法(differentiation with respect to a parameter)、逐項微分法(differentiation term by term)和逐項積分法(integration term by term)可以求出這六種極限的無窮級數表示法 (infinite series forms),也就是本文六個主要的結果—定理 1 到定理 6。此外,我們舉出六個極限的例子,實際的求出它們的無窮級數表示法。同時,我們利用數學軟體 Maple,計算出這些極限以及它們無窮級數表示法的近似值。

二、主要的理論

以下我們先介紹本文用到的符號、公式和一個性質:

符號:

設 c 為實數且 p 為正整數,定義 $(c)_p = c(c-1)\cdots(c-p+1)$;而 $(c)_0 = 1$。

公式:

(i) 自然指數函數 $e^{y}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}y^{p}$,其中 y 為任意實數。

(ii) 餘弦函數 $\cos y=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{(2p)!}y^{2p}$,其中 y 為任意實數。

(iii) 正弦函數 $\sin y=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{(2p+1)!}y^{2p+1}$,其中 y 為任意實數。

(iv) 反正切函數 $\tan^{-1}y=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{2p+1}y^{2p+1}$,其中 y 為實數且 $|y|\le 1$。

(v) 二項級數 (Knopp, 1990, p426): 設 c,u 為實數,$c>0$ 且 $|u|\le 1$,則

$(1+u)^c = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(c)_p}{p!} u^p$ 。

Weierstrass M-test (Apostol, 1975, p223)：假設 $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ 為非負整數數列使得 $0 \le |g_k(x)| \le M_k$，對所有 $k = 0, 1, 2\ldots$ 以及所有 $x \in S$。若 $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ 收斂，則 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ 在 S 上均勻收斂(uniformly convergent)。

接著介紹本文用到的三個重要定理：

參數微分法 (高木貞治, 1984, p218)：設兩變數函數 $f(x,y)$ 的定義域為 $[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$。若 $f(x,y)$ 以及它對 y 的一階偏導函數 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ 為連續函數。則 $F(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$ 在開區間 (y_1,y_2) 可以微分，且它的微分 $\frac{d}{dy}F(y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$。

逐項微分法 (Apostol, 1975, p230)：如果對所有非負整數 k，函數 $g_k:(a,b)\to R$ 滿足下列三個條件：(i)存在一點 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂。則 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 上均勻收斂而且可以微分，其微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_k(x)$。

逐項積分法 (Apostol, 1975, p269)：假設 $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 為在區間 I 的 Lebesgue 可積分函數序列使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I |g_n(x)|dx$ 收斂，則 $\int_I \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I g_n(x)dx$。

以下我們推導本文六個主要的定理，每一個定理都需要一個引理：

引理 1: 設 a,b 為實數，$a>0, b>0$ 且 m 為正整數。則瑕積分

$$\int_0^1 (\ln x)^m x^a (1+x)^b dx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^{m+1}}$$

證明: 因為定積分 $\int_0^1 x^a(1+x)^b dx = \int_0^1 x^a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!} x^p dx$ (利用公式(v))

$$= \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!} x^{a+p} dx$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(b)_p}{p!} x^{a+p} dx \quad \text{(利用逐項積分法)} \tag{7}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)} \tag{8}$$

利用參數微分法和逐項微分法將(8)式等號兩邊同時對 a 做 m 次微分得到瑕積分

$$\int_0^1 (\ln x)^m x^a (1+x)^b dx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \tag{9}$$

■

附註 1: 因為 $\sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \left| \frac{(b)_p}{p!} x^{a+p} \right| dx \le \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \left| \frac{(b)_p}{p!} \right| dx = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|(b)_p|}{p!} < \infty$，所以利用逐項積分法，(8)式成立。另一方面，上面(9)式等號右邊成立的主要原因說明如下：假設 m 為任意固定的正整數，則對任意 $a_0 > 0$，我們可以找到包含 a_0 的開區間 $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right)$ 使得函數級數 $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^m}$ 在 $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right)$ 上均勻收斂(利用 Weierstrass M-test)，因此利用逐項微分法得到 $\frac{d}{da}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^m}\right) = (-m) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^{m+1}}$，對所有 $a \in \left(\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right)$。因為 m 為任意正整數，所以我們得到:

$$\frac{d^m}{da^m}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)}\right) = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \text{。}$$

以下是本文第一個主要的結果：

定理 1: 和引理 1 相同的假設，則極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}(n+k)^{b}=(-1)^{m}m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(b)_{p}}{p!(a+p+1)^{m+1}} \tag{10}$$

證明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}(n+k)^{b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}\left(\frac{k}{n}\right)^{a}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{b}$$

$$=\int_0^1(\ln x)^m x^a(1+x)^b dx$$

$$=(-1)^m m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(b)_p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \quad (利用引理1)$$ ■

和引理1相同的證明方式，我們有以下的結果：

引理 2: 和引理 1 相同的假設，則瑕積分

$$\int_0^1(\ln x)^m x^a(1-x)^b dx=(-1)^m m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(b)_p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \tag{11}$$

利用引理 2 以及和定理 1 相同的證明方式，我們很容易得到本文第二個主要的結果：

定理 2: 和引理 1 相同的假設，則極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{m}k^{a}(n-k)^{b}=(-1)^{m}m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(b)_{p}}{p!(a+p+1)^{m+1}} \tag{12}$$

接著推導本文第三個主要的定理，同樣我們需要一個引理：

引理 3: 設 a,r 為實數，$a>0, r>0$ 且 m 為正整數。則瑕積分

$$\int_0^1(\ln x)^m x^a r^x dx=(-1)^m m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\ln r)^p}{p!(a+p+1)^{m+1}}$$

證明: 因為定積分 $\int_0^1 x^a r^x dx=\int_0^1 x^a e^{(\ln r)x}dx$

$$= \int_0^1 x^a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!} x^p dx \quad (\text{利用公式(i)})$$

$$= \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!} x^{a+p} dx$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!} \int_0^1 x^{a+p} dx \quad (\text{利用逐項積分法}) \tag{13}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!(a+p+1)} \tag{14}$$

利用參數微分法和逐項微分法將(14)式等號兩邊同時對 a 做 m 次微分得到瑕積分

$$\int_0^1 (\ln x)^m x^a r^x dx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \tag{15}$$

■

附註 2: 上面(13)式以及(15)式等號右邊成立的原因和附註 1 的說明是一樣的。

利用引理 3 我們得到本文第三個主要的結果：

定理 3: 和引理 3 相同的假設，則極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m k^a \cdot r^{k/n} = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \tag{16}$$

證明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m k^a \cdot r^{k/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m \left(\frac{k}{n}\right)^a r^{k/n}$$

$$= \int_0^1 (\ln x)^m x^a r^x dx$$

$$= (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^p}{p!(a+p+1)^{m+1}} \quad (\text{利用引理3})$$

■

引理4: 設 a 為實數，$a>0$ 且 m 為正整數。則瑕積分

$$\int_0^1 (\ln x)^m x^a \cos xdx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!(a+2p+1)^{m+1}}$$

證明: 因為定積分 $\int_0^1 x^a \cos xdx$

$$= \int_0^1 x^a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} dx \qquad \text{(利用公式(ii))}$$

$$= \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{a+2p} dx$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \int_0^1 x^{a+2p} dx \quad \text{(利用逐項積分法)} \tag{17}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!(a+2p+1)} \tag{18}$$

利用參數微分法和逐項微分法將(18)式等號兩邊同時對 a 做 m 次微分得到瑕積分

$$\int_0^1 (\ln x)^m x^a \cos xdx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!(a+2p+1)^{m+1}} \tag{19}$$

■

附註 3: 上面(17)式以及(19)式等號右邊成立的原因和附註 1 的說明是一樣的。

利用引理 4 我們得到本文第四個主要的結果：

定理 4: 和引理 4 相同的假設，則極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m k^a \cos\left(\frac{k}{n}\right) = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!(a+2p+1)^{m+1}} \tag{20}$$

證明: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m k^a \cos\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n} \right)^m \left(\frac{k}{n} \right)^a \cos\left(\frac{k}{n} \right)$$

$$= \int_0^1 (\ln\ x)^m x^a \cos\ xdx$$

$$= (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!(a+2p+1)^{m+1}} \quad (\text{利用引理4}) \quad \blacksquare$$

引理5: 和引理4相同的假設，瑕積分

$$\int_0^1 (\ln\ x)^m x^a \sin\ xdx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!(a+2p+2)^{m+1}}$$

證明: 因為定積分 $\int_0^1 x^a \sin\ xdx$

$$= \int_0^1 x^a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} dx \quad (\text{利用公式(iii)})$$

$$= \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{a+2p+1} dx$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \cdot \int_0^1 x^{a+2p+1} dx \quad (\text{利用逐項積分法}) \tag{21}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!(a+2p+2)} \tag{22}$$

利用參數微分法和逐項微分法將(22)式等號兩邊同時對 a 做 m 次微分得到瑕積分

$$\int_0^1 (\ln\ x)^m x^a \sin\ xdx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!(a+2p+2)^{m+1}} \tag{23}$$

$\blacksquare$

附註 4: 上面(21)式以及(23)式等號右邊成立的原因和附註 1 的說明也是一樣的。

利用引理 5 可以得到本文第五個主要的結果：

定理 5: 和引理 4 相同的假設，則極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^m k^a\sin\left(\frac{k}{n}\right)=(-1)^m m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!(a+2p+2)^{m+1}} \tag{24}$$

證明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^m k^a\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^m\left(\frac{k}{n}\right)^a\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1(\ln x)^m x^a\sin x\,dx$$

$$=(-1)^m m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!(a+2p+2)^{m+1}}\quad(\text{利用引理}5)\qquad\blacksquare$$

引理6: 和引理4相同的假設，則瑕積分

$$\int_0^1(\ln x)^m x^a\tan^{-1}x\,dx=(-1)^m m!\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!(a+2p+2)^{m+1}}$$

證明: 因為定積分 $\int_0^1 x^a\tan^{-1}x\,dx$

$$=\int_0^1 x^a\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1}dx\quad(\text{利用公式(iv)})$$

$$=\int_0^1\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}x^{a+2p+1}dx$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cdot\int_0^1 x^{a+2p+1}dx\quad(\text{利用逐項積分法}) \tag{25}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)(a+2p+2)} \tag{26}$$

利用參數微分法和逐項微分法將(26)式等號兩邊同時對 a 做 m 次微分得到瑕積分

$$\int_0^1 (\ln x)^m x^a \tan^{-1} x dx = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(a+2p+2)^{m+1}} \tag{27}$$

■

附註 5: 上面(25)式以及(27)式等號右邊成立的原因和附註 1 的說明是一樣的。

最後是本文第六個主要的結果：

定理 6: 和引理 4 相同的假設，則極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m k^a \tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) = (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(a+2p+2)^{m+1}} \tag{28}$$

證明:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m k^a \tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^m \left(\frac{k}{n}\right)^a \tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 (\ln x)^m x^a \tan^{-1} x dx \\
&= (-1)^m m! \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(a+2p+2)^{m+1}} \quad (\text{利用引理}6)
\end{aligned}$$

■

三、例子說明

接著針對本文所探討的六種極限問題，舉出六個例子實際的利用定理 1 到定理 6 求出這些極限的無窮級數表示法。同時我們利用 Maple 算出這些極限以及它們無窮級數表示法的近似值。

例題 1: 在定理 1 中，當 $a=2, b=3/5, m=4$ 時，我們得到極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{18/5}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{k}{n}\right)^4 k^2 (n+k)^{3/5} = 24 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(3/5)_p}{p!(3+p)^5} \tag{29}$$

以下我們利用 Maple 算出此極限和它的無窮級數表示法的近似值：

>evalf(limit(1/n^(18/5)*sum((ln(k/n))^4*k^2*(n+k)^(3/5),k=1..n),n=infinity),14);

0.11204320514732

>evalf(24*sum(product(3/5-j,j=0..p-1)/(p!*(3+p)^5),p=0..infinity),14);

0.11204320514783

例題 2: 在定理 2 中，當 $a=4, b=2/3, m=7$ 時，我們得到極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{17/3}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{7}k^{4}(n-k)^{2/3}=-5040\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}(2/3)_{p}}{p!(5+p)^{8}} \tag{30}$$

同樣利用 Maple 算出此極限和它的無窮級數表示法的近似值：

>evalf(limit(1/n^(17/3)*sum((ln(k/n))^7*k^4*(n-k)^(2/3),k=1..n),n=infinity),14);

-0.010785077043811

>evalf(-5040*sum((-1)^p*product(2/3-j,j=0..p-1)/(p!*(5+p)^8),p=0..infinity),14);

-0.010785077043868

此極限和它的無窮級數表示法的近似值在第 14 位小數以後產生誤差，主要是因為我們取的精確值位數不夠多，只要將上面 Maple 指令中最後的 14 改成比較大的正整數，就可以降低誤差。

例題 3: 在定理 3 中，當 $a=2, r=12, m=3$ 時，我們得到極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{6}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{3}k^{5}\cdot 12^{k/n}=-6\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\ln 12)^{p}}{p!(6+p)^{4}} \tag{31}$$

以下是利用 Maple 得到此極限及其無窮級數表示法的近似值：

>evalf(limit(1/n^6*sum((ln(k/n))^3*k^5*12^(k/n),k=1..n),n=infinity),14);

-0.019103293732521

>evalf(-6*sum((ln(12))^p/(p!*(6+p)^4),p=0..infinity),14);

-0.019103293732547

同樣，此極限和它的無窮級數表示法的近似值在第 14 位小數以後產生誤差，只要將上面 Maple 指令中最後的 14 改成比較大的正整數，就可以減小誤差。

例題 4: 在定理 4 中，當 $a=6, m=2$ 時，我們得到極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^2 k^6\cos\left(\frac{k}{n}\right)=2\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!(7+2p)^3} \qquad (32)$$

Maple 算出此極限和它的無窮級數表示法的近似值如下：

>evalf(limit(1/n^7*sum((ln(k/n))^2*k^6*cos(k/n),k=1..n),n=infinity),14);

0.0045205214796153

>evalf(2*sum((-1)^p/((2*p)!*(7+2*p)^3),p=0..infinity),14);

0.0045205214796316

為何極限和它的無窮級數表示法的近似值都在第 14 位小數以後產生誤差，是因為上面 Maple 指令中最後取 14 的緣故，只要將 14 改成比較大的正整數，就可以產生比較小的誤差。

例題 5: 在定理 5 中，當 $a=5/2, m=3$ 時，我們得到極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{7/2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^3 k^{5/2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)=-6\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!(9/2+2p)^4} \qquad (33)$$

利用 Maple 計算此極限及其無窮級數表示法的近似值如下：

>evalf(limit(1/n^(7/2)*sum((ln(k/n))^3*k^(5/2)*sin(k/n),k=1..n),n=infinity),14);

-0.014081192554291

>evalf(-6*sum((-1)^p/((2*p+1)!*(9/2+2*p)^4),p=0..infinity),14);

-0.014081192554318

例題 6: 在定理 6 中，當 $a=9/7, m=4$ 時，我們得到極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{16/7}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^{4}k^{9/7}\tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)=24\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{(2p+1)(23/7+2p)^{5}} \tag{34}$$

同樣我們利用 Maple 算出此極限和它的無窮級數表示法的近似值：

```
>evalf(limit(1/n^(16/7)*sum((ln(k/n))^4*k^(9/7)*arctan(k/n),k=1..n),n=infinity),14);
```

0.060926368919401

```
>evalf(24*sum((-1)^p/((2*p+1)*(23/7+2*p)^5),p=0..infinity),18);
```

$0.0609263689194 + 8.4\cdot 10^{-14}\,\mathrm{I}$

上面 Maple 得到的答案中出現了虛數 I $(=\sqrt{-1})$，是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的緣故，但因為虛數部分很小，所以是可以忽略的。想要大幅度降低此極限和它的無窮級數表示法近似值的誤差，會牽涉到 Maple 的計算能力和耗費的計算時間，就筆者嘗試的結果，想要再提高一下精確度，Maple 可能需要多好幾倍的時間來計算。

四、結論

由上面六個例子，可以知道本文六個主要的定理是求解我們所探討的六種極限問題的主要理論依據，並且我們看到參數微分法、逐項微分法和逐項積分法在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上這三個定理的應用十分廣泛，許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解，我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，也可以看出Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，將來我們會將觸角延伸到其他微積分和高等微積分的問題上，同時利用Maple作為輔助工具來解決這些問題。我們將以此做為Maple在研究和教學上的良好教材，來豐富微積分和高等微積分的內涵。

參考文獻

黃世吟、余啟輝 (2011)。幾種極限問題的探討。2011 南榮通識教育學術研討會，南榮技術學院，83-94 頁。

高木貞治 (原著)，葉能哲、賴漢卿 (合譯) (1984)。高等微積分(解析概論)。台北市：文笙書局。

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical Analysis* (2nd ed.). Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Edwards, C. H. Jr. and Penney, D. E. (1986). *Calculus and Analytic Geometry* (2nd ed.). New Jersey：Prentice-Hall, Inc.

Grossman, S. I. (1992). *Calculus* (5th ed.). London：Saunders College Publishing.

Knopp, K. (1990). *Theory and Application of Infinite Series*. New York：Dover Publications, Inc.

Larson, R., Hostetler, R. P. and Edwards, B. H. (2006). *Calculus with Analytic Geometry* (8th ed.). Boston：Houghton Mifflin.

Widder, D. V. (1961). *Advanced Calculus* (2nd ed.). Englewood Cliffs, N. J.：Prentice-Hall, Inc.