權重均值定理的應用

余啟輝

南榮科技大學資訊科技系助理教授

摘要

本篇文章研究幾種定積分問題。利用複變數函數的冪級數展開式和逐項微分定理先求出一些實變數函數的任意階導函數，然後由權重均值定理可以求出這幾種定積分的無窮級數表示式。另一方面，本篇論文舉出幾個定積分的例子實際地求出它們的答案；同時利用數學軟體 Maple 計算出這些定積分以及它們的無窮級數表示式的近似值來對照驗證本研究的結論。

關鍵字：定積分、權重均值定理、冪級數展開式、逐項微分定理、無窮級數表示式、Maple

一、前言

在微積分和工程數學的課程裡介紹了許多求解積分的方法，其中包含了變數變換法(change of variables)、分部積分法(integration by parts)、部分分式法(partial fractions)以及三角代換法(trigonometric substitution)等等。但是對於比較困難的積分問題，利用上述這些方法不見得可以容易的求出答案，因此(Adams, Gottliebsen, Linton, 和 Martin, 1999)，(Nyblom, 2007)以及(Oster, 1991) 提出了一些求解積分的其他方法；另一方面，(余，2012a-2012h, 2013a-2013l, 2014a-2014i)，(余和陳，2014)以及(余和許，2014)利用逐項積分定理、參數微分法、面積均值定理、Parseval 定理以及廣義的柯西積分公式等方法來研究一些困難積分的求解問題。本研究利用不同於上面所提到的方法來求解定積分問題，以下就是本篇文章所探討的四種定積分問題：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)\cos n\theta+\sinh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)\sin n\theta}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}d\theta\text{，} \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sinh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)\cos n\theta-\sin(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)\sin n\theta}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}d\theta\text{，} \tag{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos(s\cos\varphi+r\cos\theta)\cosh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\cos n\theta+\sin(s\cos\varphi+r\cos\theta)\sinh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\sin n\theta}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}\right)d\theta, \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(s\cos\varphi+r\cos\theta)\sinh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\cos n\theta-\cos(s\cos\varphi+r\cos\theta)\cosh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\sin n\theta}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}\right)d\theta, \quad (4)$$

其中r,s,θ,φ為實數，$s\neq 0$，$|r|+|s|<\pi/2$且n為非負整數。本文的方法是先利用複變數函數的冪級數展開式和逐項微分定理求出某些實變數函數的任意階導函數，再利用權重均值定理得到這些定積分的無窮級數表示式，也就是本文兩個主要的結果－定理 1 和定理 2。另一方面，本篇論文舉出幾個定積分的例子，實際地求出它們的無窮級數表示式，同時利用 Maple 計算出這些定積分以及它們無窮級數表示式的近似值來和本文的結果做一個對照和比較。

二、預備知識和主要的結果

以下我們先介紹本文中用到的符號：

(一) 符號：

(i)設z為複數，複變數函數$f(z)$的n階導函數記作$f^{(n)}(z)$，其中n為正整數。

(ii)設λ為實數且m為正整數，定義$(\lambda)_m=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)$;而$(\lambda)_0=1$。

(iii)設a為複數，R為實數且$R>0$，定義閉圓盤$\overline{B(a,R)}=\{z\in C\,\|z-a|\leq R\}$。

(iv)B_k代表第k個 Bernoulli 數，E_k代表第k個 Euler 數，其中k為非負整數。

接著介紹本文中用到的幾個重要性質：

(二) Euler 公式

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，其中$i=\sqrt{-1}$，$\theta$為任意實數。

(三) DeMoivre 公式

$(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta$，其中 p 為整數且 θ 為實數。

(四) 複變數函數的冪級數展開式 (Power series expansions of one complex variable functions) (Zwillinger，2003，第 44 頁)

假設 z 為複數且 $|z| < \pi/2$，則

$$\text{(i)}\quad \tan z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \tag{5}$$

$$\text{(ii)}\quad \sec z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}。 \tag{6}$$

(五) 權重均值定理 (Weighted mean value theorem) (Appostol，1975，第 450-451 頁)：

設 a 為複數，R, r, θ 皆為實數，$|r| < R$ 且 n 為非負整數。設複變數函數 $f(z)$ 在閉圓盤 $\overline{B(a,R)}$ 為解析函數(analytic function)，則

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{2\pi r^n}{n!} f^{(n)}(a)。 \tag{7}$$

(六) 逐項微分定理 (Differentiation term by term theorem) (Apostol，1975，第 230 頁)：

如果對所有非負整數 k，函數 $g_k : (a,b) \to R$ 滿足下列三個條件：(i)存在一點 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂(uniformly convergent)。則 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 上均勻收斂而且可以微分，其微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_k(x)$。

為了得到本文的主要結果，需要以下的引理：

引理 設α,β為實數，則

$$\tan(\alpha+i\beta)=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}+i\frac{\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}\text{，} \tag{8}$$

$$\sec(\alpha+i\beta)=\frac{2\cos\alpha\cosh\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}+i\frac{2\sin\alpha\sinh\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}\text{。} \tag{9}$$

證明 $\tan(\alpha+i\beta)$

$$=\frac{\sin(\alpha+i\beta)}{\cos(\alpha+i\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cosh\beta+i\cos\alpha\sinh\beta}{\cos\alpha\cosh\beta-i\sin\alpha\sinh\beta}$$

$$=\frac{(\sin\alpha\cosh\beta+i\cos\alpha\sinh\beta)(\cos\alpha\cosh\beta+i\sin\alpha\sinh\beta)}{\cos^2\alpha\cosh^2\beta+\sin^2\alpha\sinh^2\beta}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+i\sinh\beta\cosh\beta}{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cosh 2\beta}{2}+\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{\cosh 2\beta-1}{2}}$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}+i\frac{\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}\text{。}$$

另一方面，

$\sec(\alpha+i\beta)$

$$=\frac{1}{\cos(\alpha+i\beta)}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha\cosh\beta-i\sin\alpha\sinh\beta}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cosh\beta+i\sin\alpha\sinh\beta}{\cos^2\alpha\cosh^2\beta+\sin^2\alpha\sinh^2\beta}$$

$$=\frac{2\cos\alpha\cosh\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}+i\frac{2\sin\alpha\sinh\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}\text{。}$$

q.e.d.

接著，可以分別求出定積分(1)和(2)的無窮級數表示式：

定理 1 設r,s,θ,φ為實數，$s\neq 0$，$|r|+|s|<\pi/2$且n為非負整數，則

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)\cos n\theta+\sinh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)\sin n\theta}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_n}{(2k)!}s^{2k-n-1}\cos[(2k-n-1)\varphi]\text{，}\tag{10}$$

以及

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sinh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)\cos n\theta-\sin(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)\sin n\theta}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_n}{(2k)!}s^{2k-n-1}\sin[(2k-n-1)\varphi]\text{。}\tag{11}$$

證明 令 $f(z)=\tan z$，其中 z 為複數且 $|z|<\pi/2$。由(5)式和逐項微分定理可得到

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_n}{(2k)!}z^{2k-n-1}\text{。}\tag{12}$$

此外，由權重均值定理得知

$$\int_0^{2\pi}f(se^{i\varphi}+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\frac{2\pi r^n}{n!}f^{(n)}(se^{i\varphi})\text{。}\tag{13}$$

所以，

$$\int_0^{2\pi}f(se^{i\varphi}+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_n}{(2k)!}(se^{i\varphi})^{2k-n-1}\text{。}\tag{14}$$

再利用Euler公式和DeMoivre公式得到

$$\int_0^{2\pi}f((s\cos\varphi+r\cos\theta)+i(s\sin\varphi+r\sin\theta))(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_n}{(2k)!}s^{2k-n-1}[\cos(2k-n-1)\varphi+i\sin(2k-n-1)\varphi]\text{。}\tag{15}$$

利用(8)式得到

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+i\sinh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}\right)(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_n}{(2k)!}s^{2k-n-1}[\cos(2k-n-1)\varphi+i\sin(2k-n-1)\varphi]\text{。}\tag{16}$$

由(16)式等號兩邊的實部相等，得證(10)式成立。另一方面，由(16)式等號兩邊的虛部相等，得證(11)式成立。 q.e.d.

其次，可以推導定積分(3)和(4)的答案：

定理 2 和定理 1 相同的假設，則

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\begin{array}{l}\cos(s\cos\varphi+r\cos\theta)\cosh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\cos n\theta\\+\sin(s\cos\varphi+r\cos\theta)\sinh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\sin n\theta\end{array}}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi r^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_n}{(2k)!}s^{2k-n}\cos[(2k-n)\varphi]\text{，}\tag{17}$$

以及

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\begin{array}{l}\sin(s\cos\varphi+r\cos\theta)\sinh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\cos n\theta\\-\cos(s\cos\varphi+r\cos\theta)\cosh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\sin n\theta\end{array}}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi r^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_n}{(2k)!}s^{2k-n}\sin[(2k-n)\varphi]\text{。}\tag{18}$$

證明 設 z 為複數且 $|z|<\pi/2$ 且令 $g(z)=\sec z$。由(6)式和逐項微分定理可以知道

$$g^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_n}{(2k)!}z^{2k-n} 。\tag{19}$$

再由權重均值定理得到

$$\int_0^{2\pi} g(se^{i\varphi}+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\frac{2\pi r^n}{n!}g^{(n)}(se^{i\varphi}) 。\tag{20}$$

因此，

$$\int_0^{2\pi} g(se^{i\varphi}+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_n}{(2k)!}(se^{i\varphi})^{2k-n} 。\tag{21}$$

利用Euler 公式和DeMoivre 公式可得

$$\int_0^{2\pi} g((s\cos\varphi+r\cos\theta)+i(s\sin\varphi+r\sin\theta))(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_n}{(2k)!}s^{2k-n}[\cos(2k-n)\varphi+i\sin(2k-n)\varphi] 。\tag{22}$$

再利用(9)式得出

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\begin{array}{c}2\cos(s\cos\varphi+r\cos\theta)\cosh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\\+i2\sin(s\cos\varphi+r\cos\theta)\sinh(s\sin\varphi+r\sin\theta)\end{array}}{\cos(2s\cos\varphi+2r\cos\theta)+\cosh(2s\sin\varphi+2r\sin\theta)}\right)(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta$$

$$=\frac{2\pi r^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_n}{(2k)!}s^{2k-n}[\cos(2k-n)\varphi+i\sin(2k-n)\varphi] 。\tag{23}$$

所以由(23)式等號兩邊的實部相等，得證(17)式成立；同理由(23)式等號兩邊的虛部相等，得證(18)式成立。 q.e.d.

三、例子說明

以下針對本文所探討的四種定積分問題，舉出幾個例子實際的利用定理 1 和定理 2 求出這些定積分的無窮級數表示式。此外，利用 Maple 計算出這些定積分以及它們的無窮級數表示式的近似值來驗證答案。

例題 1 在(10)式中令 $r=-1/4, s=2/5, \varphi=\pi/3, n=4$，則定積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin[4/5\cos(\pi/3)-1/2\cos\theta]\cos 4\theta+\sinh[4/5\sin(\pi/3)-1/2\sin\theta]\sin 4\theta}{\cos[4/5\cos(\pi/3)-1/2\cos\theta]+\cosh[4/5\sin(\pi/3)-1/2\sin\theta]}d\theta$$

$$=\frac{2\pi(-1/4)^4}{4!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_4}{(2k)!}(2/5)^{2k-5}\cos[(2k-5)\pi/3]\text{。} \qquad (24)$$

接著，利用 Maple 驗證(24)式的正確性：

```
>evalf(int((sin(4/5*cos(Pi/3)-1/2*cos(theta))*cos(4*theta)+sinh(4/5*sin(Pi/3)-1/2*sin(theta))*sin(4*theta))/(cos(4/5*cos(Pi/3)-1/2*cos(theta))+cosh(4/5*sin(Pi/3)-1/2*sin(theta))),theta=0..2*Pi),14);
```

0.00069510443935427

```
>evalf(2*Pi*(-1/4)^4/4!*sum((-1)^(k-1)*2^(2*k)*(2^(2*k)-1)*bernoulli(2*k)*product(2*k-1-i,i=0..3)/(2*k)!* (2/5)^(2*k-5)*cos((2*k-5)*Pi/3),k=1..infinity),14);
```

0.00069510443935429

此外，在(11)式中令 $r=1/3, s=-4/7, \varphi=\pi/4, n=5$ 得到定積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sinh[-8/7\sin(\pi/4)+2/3\sin\theta]\cos 5\theta-\sin[-8/7\cos(\pi/4)+2/3\cos\theta]\sin 5\theta}{\cos[-8/7\cos(\pi/4)+2/3\cos\theta]+\cosh[-8/7\sin(\pi/4)+2/3\sin\theta]}d\theta$$

$$=\frac{2\pi(1/3)^5}{5!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}(2k-1)_5}{(2k)!}(-4/7)^{2k-6}\sin[(2k-6)\pi/4]\text{。} \qquad (25)$$

同樣，利用 Maple 檢驗(25)式：

>evalf(int((sinh(-8/7*sin(Pi/4)+2/3*sin(theta))*cos(5*theta)-sin(-8/7*cos(Pi/4)+2/3*cos(theta))*sin(5*theta))/(cos(-8/7*cos(Pi/4)+2/3*cos(theta))+cosh(-8/7*sin(Pi/4)+2/3*sin(theta))),theta=0..2*Pi),14);

0.0062750947363198

>evalf(2*Pi*(1/3)^5/5!*sum((-1)^(k-1)*2^(2*k)*(2^(2*k)-1)*bernoulli(2*k)*product(2*k-1-i,i=0..4)/(2*k)!* (-4/7)^(2*k-6)*sin((2*k-6)*Pi/4),k=1..infinity),14);

0.0062750947363168

例題 2 於(17)式中代入 $r=-4/9, s=-1/8, \varphi=\pi/6, n=7$，得到定積分

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\begin{array}{c}\cos[-1/8\cos(\pi/6)-4/9\cos\theta]\cosh[-1/8\sin(\pi/6)-4/9\sin\theta]\cos 7\theta\\+\sin[-1/8\cos(\pi/6)-4/9\cos\theta]\sinh[-1/8\sin(\pi/6)-4/9\sin\theta]\sin 7\theta\end{array}}{\cos[-1/4\cos(\pi/6)-8/9\cos\theta]+\cosh[-1/4\sin(\pi/6)-8/9\sin\theta]}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi(-4/9)^7}{7!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_7}{(2k)!}(-1/8)^{2k-7}\cos[(2k-7)\pi/6] \text{。} \tag{26}$$

利用 Maple 驗證(26)式的正確性如下：

>evalf(int((cos(-1/8*cos(Pi/6)-4/9*cos(theta))*cosh(-1/8*sin(Pi/6)-4/9*sin(theta))*cos(7*theta)+sin(-1/8*cos(Pi/6)-4/9*cos(theta))*sinh(-1/8*sin(Pi/6)-4/9*sin(theta))*sin(7*theta))/(cos(-1/4*cos(Pi/6)-8/9*cos(theta))+cosh(-1/4*sin(Pi/6)-8/9*sin(theta))),theta=0..2*Pi),14);

0.00031882836440791

>evalf(Pi*(-4/9)^7/7!*sum((-1)^k*euler(2*k)*product(2*k-j,j=0..6)/(2*k)!* (-1/8)^(2*k-7)*cos((2*k-7)*Pi/6),k=0..infinity),14);

0.00031882836440791

另一方面，在(18)式中代入 $r=3/5, s=-7/10, \varphi=2\pi/3, n=8$，則

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\begin{array}{l}\sin[-7/10\cos(2\pi/3)+3/5\cos\theta]\sinh[-7/10\sin(2\pi/3)+3/5\sin\theta]\cos 8\theta\\ -\cos[-7/10\cos(2\pi/3)+3/5\cos\theta]\cosh[-7/10\sin(2\pi/3)+3/5\sin\theta]\sin 8\theta\end{array}}{\cos[-7/5\cos(2\pi/3)+6/5\cos\theta]+\cosh[-7/5\sin(2\pi/3)+6/5\sin\theta]}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi(3/5)^8}{8!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}(2k)_8}{(2k)!}(-7/10)^{2k-8}\sin[(4k-16)\pi/3]\text{。}\tag{27}$$

同樣利用 Maple 驗證(27)式：

```
>evalf(int((sin(-7/10*cos(2*Pi/3)+3/5*cos(theta))*sinh(-7/10*sin(2*Pi/3)+3/5*sin(theta))*
cos(8*theta)-cos(-7/10*cos(2*Pi/3)+3/5*cos(theta))*cosh(-7/10*sin(2*Pi/3)+3/5*sin(theta)
)*sin(8*theta))/(cos(-7/5*cos(2*Pi/3)+6/5*cos(theta))+cosh(-7/5*sin(2*Pi/3)+6/5*sin(theta
))),theta=0..2*Pi),14);
```

0.0027826513471540

```
>evalf(Pi*(3/5)^8/8!*sum((-1)^k*euler(2*k)*product(2*k-j,j=0..7)/(2*k)!* (-7/10)^(2*k-8)
*sin((4*k-16)*Pi/3),k=0..infinity),14);
```

0.0027826513471520

四、結論

由本文的討論可以知道，定理1和定理2是求解本文所探討的四種定積分問題的主要理論依據。同時也看到，權重均值定理和逐項微分定理在本文理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上，這兩個定理的應用十分廣泛，許多高等微積分和工程數學上困難的問題利用它們都可以迎刃而解，以後會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，也可以看出Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，甚至可以利用Maple來設計一些積分的問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。將來的研究會將觸角延伸到其他數學領域的問題上，並且利用Maple來解決這些問題。

參考文獻

Adams, A. A., Gottliebsen, H., Linton, S. A., and Martin, U. (1999). Automated Theorem Proving in Support of Computer Algebra: Symbolic Definite Integration as a Case Study. *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Canada, 253-260.

Nyblom, M. A. (2007). On the Evaluation of a Definite Integral Involving Nested Square Root Functions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 37(4), 1301-1304.

Oster, C. (1991). Limit of a Definite Integral. *SIAM Review*, 33(1), 115-116.

余啟輝(2012a)：Maple 在一些積分問題上的應用。*2012 安全管理與工程技術國際研討會*，吳鳳科技大學，台灣，290-294 頁。

余啟輝(2012b)：Maple 在求解兩種積分問題上的應用。*第九屆服務業管理與創新學術研討會*，南台科技大學，台灣，No. 3。

余啟輝(2012c)：Maple 的應用－以兩種特殊的積分問題為例子。*KC2012 第八屆知識社群國際研討會*，中國文化大學，台灣，803-811 頁。

余啟輝(2012d)：Maple 的應用－以積分問題為例子。*2012 數位科技與創新管理研討會*，華梵大學，台灣，# 74。

余啟輝(2012e)：Maple 在某種有理函數積分問題上的應用。*2012 工業工程與管理年會暨學術研討會*，大葉大學，台灣，D357-D362。

余啟輝(2012f)：Maple 在某種積分問題上的應用。*第六屆優質家庭生活科技關鍵技術研討會*，崑山科技大學，台灣，206-210 頁。

余啟輝(2012g)：Maple 在求兩種積分的閉合型式解上的應用。*第十七屆行動計算研討會*，長庚大學，台灣，ID16。

余啟輝(2012h)：Maple 的應用－以兩種特殊的積分問題為例子。*第八屆知識社群國際研討會*，中國文化大學，台灣，803-811 頁。

Yu, C. -H. (2013a). Using Maple to Study the Double Integral Problems. *Applied and Computational Mathematics*, 2(2), 28-31.

Yu, C. -H. (2013b). A Study on Double Integrals. *International Journal of Research in Information Technology*, 1(8), 24-31.

Yu, C. -H. (2013c). Using Maple to Study Two Types of Integrals. *International Journal of Research in Computer Applications and Robotics*, 1(4), 14-22.

Yu, C. -H. (2013d). Solving Some Integrals with Maple. *International Journal of Research in Aeronautical and Mechanical Engineering*, 1(3), 29-35.

Yu, C. -H. (2013e). A Study on Integral Problems by Using Maple. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 3(7), 41-46.

Yu, C. -H. (2013f). Evaluating Some Integrals with Maple. *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*, 2(7), 66-71.

Yu, C. -H. (2013g). Application of Maple on Evaluation of Definite Integrals. *Applied Mechanics and Materials*, 479-480, 823-827.

Yu, C. -H. (2013h). Application of Maple on the Integral Problems. *Applied Mechanics and Materials*, 479-480, 849-854.

Yu, C. -H. (2013i). Using Maple to Study Multiple Improper Integrals. *International Journal of Research in Information Technology*, (8), 10-14.

Yu, C. -H. (2013j). A Study on the Multiple Improper Integral Problems. (in Chinese) *Journal of Hsin Sheng*, 12, 175-194.

Yu, C. -H. (2013k). Using Maple to Study the Integrals of Trigonometric Functions. *Proceedings of the 6th IEEE/International Conference on Advanced Infocomm Technology*, Taiwan, No. 00294.

Yu, C. -H. (2013l). A Study of the Integrals of Trigonometric Functions with Maple. *Proceedings of the Institute of Industrial Engineers Asian Conference 2013*, Taiwan, Springer, 1, 603-610.

Yu, C. -H. (2014a). Solving Some Definite Integrals Using Parseval's Theorem. *American Journal of Numerical Analysis*, 2(2), 60-64.

Yu, C. -H. (2014b). Some Types of Integral Problems. *American Journal of Systems and Software*, 2(1), 22-26.

Yu, C. -H. (2014c). Application of Parseval's Theorem on Evaluating Some Definite Integrals. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(1), 1-5.

Yu, C. -H. (2014d). Evaluation of Two Types of Integrals Using Maple. *Universal Journal of Applied Science*, 2(2), 39-46.

Yu, C. -H. (2014e). Studying Three Types of Integrals with Maple. *American Journal of Computing Research Repository*, 2(1), 19-21.

Yu, C. -H. (2014f). The Application of Parseval's Theorem to Integral Problems. *Applied Mathematics and Physics*, 2(1), 4-9.

Yu, C. -H. (2014g). A Study of Some Integral Problems Using Maple. *Mathematics and Statistics*, 2(1), 1-5.

Yu, C. -H. (2014h). Solving Some Definite Integrals by Using Maple. *World Journal of*

Computer Application and Technology, 2(3), 61-65.

Yu, C. -H. (2014i). Evaluating Some Types of Definite Integrals. *American Journal of Software Engineering*, 2(1), 13-15.

Yu, C. -H. and Chen B. -H. (2014). Solving Some Types of Integrals Using Maple. *Universal Journal of Computational Mathematics*, 2(3), 39-47.

Yu, C. -H. and Sheu S. -D. (2014). Using Area Mean Value Theorem to Solve Some Double Integrals. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(3), 75-79.

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical Analysis* (2nd ed.). Massachusetts: Addison-Wesley.

Zwillinger, D. (2003). *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae* (31st ed.). New York: Chapman & Hall/CRC.