正修通識教育學報 第十期
2013 年 6 月 頁 25～42

一些瑕積分公式的推廣

余啟輝
南榮技術學院通識教育中心助理教授

摘 要

本篇論文主要是研究四種瑕積分公式的推廣問題。我們利用參數微分法以及 Leibniz 微分法則可以求出這四種推廣的瑕積分的閉合型式解。另一方面，我們舉出四個瑕積分的例子實際的來做計算，並且利用數學軟體 Maple 計算出這些瑕積分以及它們解的近似值。

關鍵字：瑕積分、參數微分法、Leibniz 微分法則、閉合型式解

Generalization of Some Improper Integral Formulas

Chii-Huei YU

Assistant Professor, Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology

Abstract

This paper mainly studies the generalization problem of four types of improper integral formulas. We can obtain the closed forms of these four types of generalized improper integrals by using differentiation with respect to a parameter and Leibniz differential rule. On the other hand, we propose four improper integrals to do calculation practically, and use the mathematical software Maple to calculate the approximations of these improper integrals and their solutions.

Keywords: improper integrals, differentiation with respect to a parameter, Leibniz differential rule, closed forms

壹、前言

在高等微積分或是工程數學的課程裡有關瑕積分(improper integrals)問題的研究是一項重要的課題，例如 Gamma 函數和 Beta 函數以及其他一些特殊函數都是以瑕積分的型式呈現的，所以無論在物理、工程或是其他自然科學領域裡，有關瑕積分的求解或數值計算都有其重要性，這方面的書籍可以參閱 (賴漢卿，1979，第六章；Ghorpade & Limaye, 2006, chap.9；Lang, 1983, chap.13；Ponnusamy, 2012, chap.7；Widder, 1961, chap.10)，相關的論文可以參考 (余啓輝，2012a, 2012b, 2012c；Baxa & Schoißengeier, 2002；Gray & Wang, 1992；Haber, 1975)。在(Derrick, 1973, pp. 96, 97, 102, 105)中有以下四個瑕積分公式：

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2a}e^{-ax} \quad \text{，其中} a>0 \text{，} x\ge 0 \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{y\sin xy}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2}e^{-ax} \quad \text{，其中} a>0 \text{，} x>0 \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y(a^2+y^2)}dy=\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a}) \quad \text{，其中} a>0 \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln y}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2a}\ln a \quad \text{，其中} a>0 \tag{4}$$

本篇論文是將(1)-(4)這四個瑕積分公式分別推廣成下面的型式：

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^p\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}\right)\cos xy}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi}{2a^{2n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}x^k\right)e^{-ax} \tag{5}$$

其中$a>0$，$x\ge 0$，n 爲任意非負整數。

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^p\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-1}\right)\sin xy}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{(-1)^n\pi}{2}x^n e^{-ax} \tag{6}$$

其中$a>0$，$x>0$，n為任意非負整數。

$$\int_0^{\infty}\frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^p\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-1}\right)\sin y}{y(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi(n+1)}{2a^{2n+2}}-\frac{\pi e^{-a}}{2a^{2n+2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)a^k}{k!}\right) \quad (7)$$

其中$a>0$，n為任意非負正整數。

$$\int_0^{\infty}\frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^p\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-1}\right)\ln y}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi(-1)^n n!}{2a^{n+1}}\left(\ln a-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \quad (8)$$

其中$a>0,n$為任意正整數。

(5)－(8)這四個推廣的瑕積分公式就是本文四個主要的結果—定理1, 2, 3, 4。我們主要是利用參數微分法 (differentiation with respect to a parameter)以及Leibniz微分法則(Leibniz differential rule)得到這四個推廣的瑕積分閉合型式解 (closed forms)，其中詳細的推導過程見以下的定理證明。因此我們認爲這四個推廣公式的重要性在於提供求解瑕積分的一些方法，將來我們希望利用這些技巧和方法求解更一般的瑕積分問題，甚至在工程或其他科學領域上得到應用。另一方面，我們舉出四個瑕積分的例子，利用本文四個主要的定理實際的來做計算，並且利用數學軟體Maple計算出這些瑕積分以及它們解的近似值。

貳、主要的結果

首先我們介紹本文中用到的符號和定義：

符號：

(i)設s為實數，高斯符號$\lfloor s\rfloor$代表小於或等於s的最大整數。

(ii)函數$f(x)$的m次導函數記作$f^{(m)}(x)$，其中m為正整數。

定義：

假設 a_1, a_2, c 皆爲實數， $a_1 < a_2$ 且兩變數函數 $g(y,a)$ 在 $[c,\infty)\times[a_1,a_2]$ 爲連續函數。$\int_c^\infty g(y,a)dy$ 在區間 $[a_1,a_2]$ 均勻收斂 (uniformly convergent)的意思是指：對任意 $\varepsilon > 0$ ，存在與 a 無關的實數 $R \ge c$ ，使得當 $t \ge R$ 時，$\left|\int_t^\infty g(y,a)dy\right| < \varepsilon$ ，對所有 $a \in [a_1,a_2]$ 。

接著是本文用到的兩個重要定理：

參數微分法 (高木貞治, 1984, p223)：

假設 a_1, a_2, c 皆爲實數， $a_1 < a_2$ 且兩變數函數 $f(y,a)$ 以及它對 a 的一階偏微分 $\frac{\partial f}{\partial a}(y,a)$ 在 $[c,\infty)\times[a_1,a_2]$ 皆爲連續函數。若 $\int_c^\infty f(y,a)dy$ 收斂，對所有 $a \in [a_1,a_2]$ 且 $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(y,a)dy$ 在區間 $[a_1,a_2]$ 均勻收斂。則 $\int_c^\infty f(y,a)dy$ 在開區間 (a_1,a_2) 可以微分，且其微分 $\frac{d}{da}\int_c^\infty f(y,a)dy = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(y,a)dy$ 。

Leibniz 微分法則 (Apostol, 1975, p121)：

假設 $u(a)$ 和 $v(a)$ 都是對 a 可以 n 次微分的函數，則 $u(a)$ 和 $v(a)$ 兩個函數相乘的 n 次微分 $(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}u^{(m)}v^{(n-m)}$ ，其中 $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ ，對所有 $1 \le m \le n$ ，而 $\binom{n}{0} = 1$ 。

以下推導本文四個主要的結果，首先我們需要一個引理：

引理：設 n 爲正整數, y 爲實數且函數 $h(a) = \frac{1}{a^2 + y^2}$ 的定義域爲 $\{a \in R | a \ne 0\}$。則 $h(a)$ 的 n 階導函數

$$h^{(n)}(a) = (-1)^n n! a^n \cdot \frac{\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2}}{(a^2+y^2)^{n+1}} \tag{9}$$

證明: 當 $y=0$ 時，本引理顯然成立，所以可以假設 $y\neq 0$ 。因爲

$$h(a)=\frac{1}{a^2+y^2}=\frac{i}{2y}\left(\frac{1}{a+yi}-\frac{1}{a-yi}\right)$$

所以 $h(a)$ 的 n 階導函數

$$\begin{aligned}
h^{(n)}(a)&=\frac{(-1)^n n!\cdot i}{2y}\left(\frac{1}{(a+yi)^{n+1}}-\frac{1}{(a-yi)^{n+1}}\right)\\
&=\frac{(-1)^n n!\cdot i}{2y}\cdot\frac{(a-yi)^{n+1}-(a+yi)^{n+1}}{(a^2+y^2)^{n+1}}\\
&=\frac{(-1)^n n!\cdot i}{2y}\cdot\frac{\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m}a^{n-m+1}(-yi)^m-\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m}a^{n-m+1}(yi)^m}{(a^2+y^2)^{n+1}}\\
&=(-1)^n n!a^{n+1}\cdot\frac{\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m}\frac{[(-1)^m-1]\cdot i^{m+1}}{a^m}y^m}{2y(a^2+y^2)^{n+1}}\\
&=(-1)^n n!a^n\cdot\frac{\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}}{(a^2+y^2)^{n+1}}
\end{aligned}$$

■

以下是本文第一個主要的結果：

定理 1: 假設 n 爲任意非負整數且 $a>0$, $x\geq 0$ ，則瑕積分

$$\int_0^\infty\frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}\right)\cos xy}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi}{2a^{2n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}x^k\right)e^{-ax}\qquad(10)$$

證明： 由公式(1) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2a}e^{-ax}$ 得知本定理在 $n=0$ 時成立，因此可以假設 $n\geq 1$。利用參數微分法、Leibniz 微分法則以及引理，將公式(1)的等號兩邊同時對 a 做 n 次微分，我們得到瑕積分

$$
\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2}\right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2}\right)\cos xy}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy
$$

$$
=\frac{(-1)^n \pi}{2\cdot n!a^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{(n-k)}(e^{-ax})^{(k)}
$$

$$
=\frac{(-1)^n \pi}{2\cdot n!a^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n-k+1}}(-1)^k x^k e^{-ax}
$$

$$
=\frac{\pi}{2a^{2n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}x^k\right)e^{-ax} \qquad \blacksquare
$$

在定理 1 中代入 $x=0$，可以得到以下的結果：

推論 1: 設 n 爲任意非負整數且 $a>0$，則瑕積分

$$
\int_0^\infty \frac{\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2}\right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2}}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi}{2a^{2n+1}} \tag{11}
$$

附註 1：公式(1) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+y^2}dy = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}$ 等號左邊可以利用參數微分法對 a 做任意次微分的理由說明如下：

對所有正整數 n 和每個固定的實數 $x \geq 0$, $a_0 > 0$。設兩變數函數

$$f_n(y,a) = \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2}\right)\cos xy}{(a^2+y^2)^n}$$

則所有 $f_n(y,a)$ 在 $[0,\infty) \times \left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right]$ 爲連續函數。

只需證明: 對所有正整數 n ，$\int_0^\infty f_n(y,a)dy$ 在區間 $\left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right]$ 均勻收斂。

存在實數 $R_1 > 1$ 使得當 $y \geq R_1$ 時，

$$\left| \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2} \right| \leq M \cdot (a^2+y^2)^{n-1} \quad (\text{其中 } M > 0 \text{ 爲某一實數})$$

對所有 $a \in \left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right]$ (見以下附註 2 的說明)。

又因爲 $\int_0^\infty \frac{1}{a^2+y^2}dy$ 在區間 $\left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right]$ 均勻收斂 (見以下附註 3 的說明)。

因此對任意 $\varepsilon > 0$ ，存在實數 $R_2 > 0$ ，當 $t \geq R_2$ 時，$\left|\int_t^\infty \frac{1}{a^2+y^2}dy\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ ，對所有 $a \in \left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2}\right]$。

所以當 $t \geq R = \max\{R_1, R_2\}$ 時，

$$\left| \int_t^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1} \binom{n}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2} \right) \cos xy}{(a^2+y^2)^n} dy \right|$$

$$\leq \int_t^\infty \frac{\left| \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1} \binom{n}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2} \right|}{(a^2+y^2)^n} dy$$

$$\leq M \cdot \int_t^\infty \frac{(a^2+y^2)^{n-1}}{(a^2+y^2)^n} dy$$

$$= M \cdot \int_t^\infty \frac{1}{a^2+y^2} dy$$

$< \varepsilon$ ，對所有 $a \in \left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2} \right]$ 。

也就是說： $\int_0^\infty f_n(y,a)dy$ 在區間 $\left[\frac{a_0}{2}, \frac{3a_0}{2} \right]$ 均勻收斂。

附註 2：因為 $\left|\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}\right|$

$$\leq \sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\frac{\binom{n}{2p-1}}{(a_0/2)^{2p-2}}y^{2p-2} \quad (\text{假設 } y>1 \text{ 且 } a\in\left[\frac{a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right])$$

$$\leq N\cdot\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}y^{2p-2} \quad (\text{其中 } N=\max_{1\leq p\leq\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\left\{\frac{\binom{n}{2p-1}}{(a_0/2)^{2p-2}}\right\})$$

$$\leq N\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot y^{n-1} \quad (\text{因為 } y>1)$$

$$\leq M\cdot(a^2+y^2)^{n-1} \quad (\text{其中 } M=N\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor)$$

對所有 $a\in\left[\frac{a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right]$。

附註 3：對所有$a>0,t>0$，$\int_t^\infty \frac{1}{a^2+y^2}dy$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_t^N \frac{1}{a^2+y^2}dy$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{N}{a}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a}$$ 。

所以對任意$\varepsilon>0$，存在實數$R_3>0$使得當$t\ge R_3$時，$\left|\int_t^\infty \frac{1}{a^2+y^2}dy\right|<\varepsilon$，對所有$a\in \left[\frac{a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right]$。也就是說：$\int_0^\infty \frac{1}{a^2+y^2}dy$ 在區間$\left[\frac{a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right]$均勻收斂。

其次是本文第二個主要的結果：

定理 2: 設n爲任意非負整數且$a>0$，$x>0$，則瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-1}\right)\sin xy}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi}{2\cdot n!a^n}x^n e^{-ax} \tag{12}$$

證明： 由公式(2) $\int_0^\infty \frac{y\sin xy}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2}e^{-ax}$ 知道本定理在$n=0$時成立，因此可以假設$n\ge 1$。利用參數微分法、Leibniz 微分法則和引理，將公式(2)的等號兩邊同時對a做n次微分，我們得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-1}\right)\sin xy}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi}{2\cdot n!a^n}x^n e^{-ax}$$ ■

附註 4：公式(2) $\int_0^\infty \frac{y\sin xy}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2}e^{-ax}$ 等號左邊可以利用參數微分法對 a 做任意次微分的原因和附註 1 的說明是類似的。

接著推導本文第三個主要的結果：

定理 3: 設 n 爲任意非負整數且 $a>0$，則瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}\right)\sin y}{y(a^2+y^2)^{n+1}}dy=\frac{\pi(n+1)}{2a^{2n+2}}-\frac{\pi e^{-a}}{2a^{2n+2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)a^k}{k!}\right) \tag{13}$$

證明: 由上面公式(3) $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y(a^2+y^2)}dy=\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$ 知道本定理在 $n=0$ 時成立，所以可以假設 $n\geq 1$。同樣利用參數微分法、Leibniz 微分法則和引理，將公式(3)的等號兩邊同時對 a 做 n 次微分，可以得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}\right)\sin y}{y(a^2+y^2)^{n+1}}dy$$

$$=\frac{\pi}{2(-1)^n n!a^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a^2}\right)^{(n-k)}(1-e^{-a})^{(k)}$$

$$=\frac{\pi(n+1)}{2a^{2n+2}}(1-e^{-a})-\frac{\pi e^{-a}}{2a^{2n+2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)a^k}{k!}\right)$$

$$=\frac{\pi(n+1)}{2a^{2n+2}}-\frac{\pi e^{-a}}{2a^{2n+2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)a^k}{k!}\right)$$ ■

附註 5：公式(3) $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y(a^2+y^2)}dy = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$ 等號左邊可以利用參數微分法對 a 做任意次微分的理由和附註 1 的說明也是類似的。

最後推導本文第四個主要的結果：

定理 4: 設 n 爲任意正整數且 $a>0$，則瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2}\right)\ln y}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy = \frac{\pi}{2a^{2n+1}}\left(\ln a - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \qquad (14)$$

證明: 利用參數微分法、Leibniz 微分法則和引理，將公式(4) $\int_0^\infty \frac{\ln y}{a^2+y^2}dy = \frac{\pi}{2a}\ln a$ 的等號兩邊同時對 a 做 n 次微分，可以得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}} y^{2p-2}\right)\ln y}{(a^2+y^2)^{n+1}}dy$$

$$= \frac{\pi}{2(-1)^n n!\,a^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{(n-k)}(\ln a)^{(k)}$$

$$= \frac{\pi \ln a}{2a^{2n+1}} - \frac{\pi}{2a^{2n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$= \frac{\pi}{2a^{2n+1}}\left(\ln a - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$ ■

附註 6： 公式(4) $\int_0^{\infty}\frac{\ln y}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2a}\ln a$ 等號左邊可以利用參數微分法對 a 做任意次微分主要是因爲：

對每個固定的正整數 n 和每個固定的 $a_0>0$，

$$\left|\left(\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^{p+1}\binom{n+1}{2p-1}}{a^{2p-2}}y^{2p-2}\right)\ln y\right|$$

$$\leq\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\frac{\binom{n+1}{2p-1}}{(a_0/2)^{2p-2}}y^{2p-1}\quad (\text{假設 } y>1 \text{ 且 } a\in\left[\frac{a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right]\text{，此時 } \ln y<y)$$

$$\leq N_1\cdot\sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}y^{2p-1}\quad (\text{其中 } N_1=\max_{1\leq p\leq\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}\left\{\frac{\binom{n+1}{2p-1}}{(a_0/2)^{2p-2}}\right\})$$

$$\leq N_1\cdot\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor\cdot y^{n+1}\quad (\text{因爲 } y>1)$$

$$\leq M_1\cdot(a^2+y^2)^n\quad (\text{其中 } M_1=N_1\cdot\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor)$$

對所有 $a\in\left[\frac{a_0}{2},\frac{3a_0}{2}\right]$。其他的說明和附註 1 是類似的。

參、例子說明

以下針對本文所探討的四種推廣的瑕積分公式，舉出四個例子實際的利用本文四個主要的定理來求解。另一方面，我們利用 Maple 計算出這些瑕積分以及它們解的近似值：

例題 1: 由定理 1 得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(4-\frac{4}{9}y^2\right)\cos xy}{(9+y^2)^4}dy = \frac{\pi}{4374}\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3\right)e^{-3x} \tag{15}$$

對所有 $x \geq 0$ 。所以

$$\int_0^\infty \frac{\left(4-\frac{4}{9}y^2\right)\cos 2y}{(9+y^2)^4}dy = \frac{61\pi}{4374e^6} \tag{16}$$

接著我們利用 Maple 計算出 $\int_0^\infty \frac{\left(4-\frac{4}{9}y^2\right)\cos 2y}{(9+y^2)^4}dy$ 和 $\frac{61\pi}{4374e^6}$ 的近似值：

>evalf(int((4-4*y^2/9)*cos(2*y)/(9+y^2)^4,y=0..infinity),14);

0.0001086010535

>evalf(61*Pi/(4374*exp(6)),14);

0.00010860105334370

另一方面，由推論 1 我們得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{5-10y^2+y^4}{(1+y^2)^5}dy = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

同樣利用 Maple 算出 $\int_0^\infty \frac{5-10y^2+y^4}{(1+y^2)^5}dy$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 的近似值：

>evalf(int((5-10*y^2+y^4)/(1+y^2)^5,y=0..infinity),14);

1.5707963267949

>evalf(Pi/2,14);

1.5707963267949

例題 2:由定理 2 得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(6y-\frac{5}{4}y^3+\frac{3}{128}y^5\right)\sin xy}{(16+y^2)^6}dy = \frac{\pi}{245760}x^5e^{-4x} \tag{18}$$

對所有 $x>0$ 。所以

$$\int_0^\infty \frac{\left(6y-\frac{5}{4}y^3+\frac{3}{128}y^5\right)\sin 2y}{(16+y^2)^6}dy = \frac{\pi}{7680}e^{-8} \tag{19}$$

接著利用 Maple 計算出此瑕積分和 $\frac{\pi}{7680}e^{-8}$ 的近似值：

>evalf(int((6y-5/4*y^3+3/128*y^5)*sin(2*y)/(16+y^2)^6,y=0..infinity),18);

$$1.37224860333\cdot 10^{-7}$$

>evalf(Pi/7680*exp(-8),14);

$$1.3722486033496\cdot 10^{-7}$$

例題 3: 利用定理 3 我們得到瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{\left(5-\frac{5}{2}y^2+\frac{1}{16}y^4\right)\sin y}{y(4+y^2)^5}dy = \frac{5\pi}{2048}-\frac{67\pi e^{-2}}{6144} \tag{20}$$

我們用 Maple 算出此瑕積分和 $\frac{5\pi}{2048}-\frac{67\pi e^{-2}}{6144}$ 的近似值：

>evalf(int((5-5/2*y^2+1/16*y^4)*sin(y)/(y*(4+y^2)^5),y=0..infinity),18);

0.00303346542764896915

>evalf(5*Pi/2048-67*Pi*exp(-2)/6144,18);

0.00303346542764896882

例題 4: 由定理 4 可以求出瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{(7-140y^2+336y^4-64y^6)\ln y}{(1/4+y^2)^7}dy=-4096\pi\left(\ln 2+\frac{49}{20}\right) \tag{21}$$

同樣利用 Maple 算出此瑕積分和 $-4096\pi\left(\ln 2+\frac{49}{20}\right)$ 的近似值：

```
>evalf(int((7-140*y^2+336*y^4-64*y^6)*ln(y)/(1/4+y^2)^7,y=0..infinity),18);
```

$$-40445.9032231878474$$

```
>evalf(-4096*Pi*(ln(2)+49/20),18);
```

$$-40445.9032231878475$$

肆、結論

由以上的討論可以知道本文四個定理是求解我們所探討的瑕積分問題的主要理論依據，並且我們看到參數微分法和Leibniz微分法則在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位，事實上這兩個定理的應用非常廣泛，許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解，我們會陸續發表有關這方面的論文。另一方面，也可以看出Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用Maple來設計一些瑕積分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會繼續將觸角延伸到其他微積分和高等微積分的問題上，並且利用Maple作為輔助工具來解決這些問題。

參考文獻

一、中文文獻

1. 余啓輝 (2012a, 12 月)。與雙曲函數相關的瑕積分問題。慈惠學報第八期，192-203 頁。
2. 余啓輝 (2012b, 12 月)。四種瑕積分的冪級數解。嘉南學報第三十八期，242-249 頁。
3. 余啓輝 (2012c, 9 月)。一些積分的級數表示法。育達科大學報第 32 期，93-103

頁。

4. 高木貞治(原著)，葉能哲、賴漢卿(合譯) (1984)。高等微積分(解析概論)。台北市：文笙書局。
5. 賴漢卿 (1979)。應用數學(高等微積分、工程數學)。台北市：文笙書局。

二、英文文獻

1. Apostol, T. M. (1975). *Mathematical Analysis* (2nd ed.). Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.
2. Baxa, C. & Schoißengeier, J. (2002). Calculation of Improper Integrals Using (n α)-Sequences. *Monatshefte für Mathematik, 135*(4), pp. 265-277.
3. Derrick, W. R. (1973). *Introductory Complex Analysis and Applications*. New York：Academic Press, Inc.
4. Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2006). *A Course in Calculus and Real Analysis*. New York：Springer Co.
5. Gray, H. L., & Wang, S. (1992). A New Method for Approximating Improper Integrals. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *29*(1), pp. 271-283.
6. Haber, S. (1975). Adaptive Integration and Improper Integrals. *Mathematics of Computation*, *29*(131), pp. 806-809.
7. Lang, S. (1983). *Undergraduate Analysis*. New York：Springer-Verlag.
8. Ponnusamy, S. (2012). *Foundations of Mathematical Analysis*. New York：Springer Co.
9. Widder, D. V. (1961). *Advanced Calculus* (2nd ed.). Englewood Cliffs, N. J.：Prentice-Hall, Inc.