正修學報 第二十六期 民國一百零二年
Journal of Cheng Shiu University Vol.26 pp209-224 (2013)


# 複數冪級數在微分問題上的應用

余啓輝

南榮技術學院管理與資訊系

## 摘 要

本篇論文主要是研究複數冪級數在四種函數微分問題上的應用。我們利用逐項微分定理可以求出這四種函數的任意階導函數，因此大大降低了求解它們高階微分值的困難度。此外，我們舉出四個函數實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數表示法的近似值。

**關鍵詞**：複數冪級數、逐項微分定理、Maple

# Application of Complex Power Series on the Differential Problems

Chii-Huei Yu

*Department of Management and Information, Nan Jeon Institute of Technology*

## Abstract

This paper mainly studies the application of complex power series to the differential problems of four types of functions. We can obtain any order derivatives of these four types of functions by using differentiation term by term theorem, and hence greatly reduce the difficulty of evaluating their higher order derivative values. In addition, we propose four functions to find their any order derivatives and some of their higher order derivative values practically, and the answers of these higher order derivative values are presented in infinite series forms. On the other hand, we employ the mathematical software Maple to calculate the approximations of these higher order derivative values and their infinite series forms.

**Keywords:** complex power series, differentiation term by term theorem, Maple

## 一、前言

在微積分課程裡，要求函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 $m$ 階微分值( $m$ -th order derivative value) $f^{(m)}(c)$ (其中 $m$ 爲正整數)，一般而言需要經過兩道手續，首先必須求出 $f(x)$ 的 $m$ 階導函數 $f^{(m)}(x)$ ，其次再代入 $x=c$ 才能得到。這兩道手續在求高階微分值(即 $m$ 比較大的情形)時會面臨計算越來越複雜的困境，所以要用手算的方式得到答案可以說是一件非常不容易的事情。有關微分問題的研究可以參考[1-6]，這些文獻提供了各種函數的導函數求解方法。針對以上提到的這一個難題，本篇論文提出了不同於[1-6]求解導函數的方法，我們主要是利用複數冪級數(complex power series)來研究以下四種函數的微分問題：

$$f(x)=\left(\sum_{j=0}^{k}\lambda_j(ax+b)^{\beta j}\right)\exp\left[(ax+b)^{\beta}\right] \tag{1}$$

$$g(x)=\left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j[\exp(rx+s)]^{j}\right]\exp[\exp(rx+s)] \tag{2}$$

$$h(x)=\left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\{\cos[j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\cdot\exp[\cos(px+q)] \tag{3}$$

以及

$$u(x)=\left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\{\sin[j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\cdot\exp[\cos(px+q)] \tag{4}$$

其中 $k$ 爲非負整數， $a,b,p,q,r,s,\beta,\lambda_j$ 爲實數，對所有 $j=0,...,k$ 且 $\beta>0$ , $\lambda_k\neq 0$ 。我們利用逐項微分定理(differentiation term by term theorem)可以求出這四種函數的任意階導函數，也就是本文四個主要的結果－定理 1、定理 2、定理 3 和定理 4，因此大大降低了求解這四種函數高階微分值的困難度。有關逐項微分定理和複數冪級數在其他方面的應用可以參考[7]。因此，我們認爲這四個函數的重要性在於提供求解函數任意階導函數的一些方法，而將來我們希望把這些方法應用到更一般函數的導函數求解問題上。另一方面，我們舉出四個函數實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數表示法的近似值。

## 二、主要的結果

以下我們先介紹本文中用到的符號、公式和性質：

符號：(i)函數 $f(x)$ 的 $m$ 階導函數記作 $f^{(m)}(x)$ ，其中 $m$ 爲正整數。

(ii)設 $t$ 為實數且 $k$ 為正整數，定義 $(t)_k = t(t-1)\cdots(t-k+1)$ ;而 $(t)_0 = 1$ 。

(iii)複數 $z = a + ib$ ，其中 $a,b$ 為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。

尤拉公式 (Euler's formula)： $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ， $y$ 為任意實數。

棣美弗公式 (DeMoivre's formula)： $(\cos y + i\sin y)^n = \cos ny + i\sin ny$ ，其中 $y$ 為任意實數且 $n$ 為任意非負整數。

泰勒級數展開式公式： $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ ，其中 $z$ 為複數。

Weierstrass M-test ([8, p223])：假設 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 為非負實數數列使得 $0 \le |g_n(x)| \le M_n$ ，對於 $n = 0, 1, 2\ldots$ 以及所有 $x \in S$ 。若 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ 在集合 $S$ 上均勻收斂(uniformly convergent)。

Ratio test ([9])：設 $a_n \ne 0$ ，對所有 $n \ge N$ ，其中 $N$ 為某一正整數。

(i) 若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ，則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收斂 (convergent)；

(ii) 若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ，則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 發散 (divergent)。

接著是本文用到的一個重要定理：

逐項微分定理 ([8, p230])：如果對所有非負整數 $n$ ，函數 $g_n : (c,d) \to R$ 滿足下列三個條件：(i)存在一點 $x_0 \in (c,d)$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_n(x)$ 在開區間 $(c,d)$ 都可以微分，(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x)$ 在 $(c,d)$ 上均勻收斂。則 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ 在開區間 $(c,d)$ 上均勻收斂而且可以微分，其微分 $\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x)$ 。

以下的引理是複數冪級數在本文所探討的微分問題上的應用：

引理 A: 假設 $k$ 為非負整數， $z$ 為複數且 $\lambda_j$ 為實數，對所有 $j = 0,\ldots,k$ 。則

$$\left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j z^j\right) e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \tag{5}$$

其中 $c_n = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j$ ，對所有非負整數 $n$ 。

證明: 因為 $z^j e^z = z^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

$$= z^j \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{(n-j)!} z^{n-j}$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{(n-j)!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n)_j}{n!} z^n \tag{6}$$

所以 $\left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j z^j\right) e^z = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n)_j}{n!} z^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \qquad \blacksquare$$

接著利用複數冪級數(即引理 A)推導本文四個主要的結果，首先是關於函數 $f(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j (ax+b)^{\beta j}\right) \exp\left[(ax+b)^{\beta}\right]$任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 1: 假設 $k$ 爲非負整數，$m$ 爲正整數且 $a,b,c,\beta$ 爲實數，$\beta > 0$，$\lambda_j$ 爲實數，對所有 $j = 0,\ldots,k$ 且 $\lambda_k \neq 0$。若函數

$$f(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j (ax+b)^{\beta j}\right) \exp\left[(ax+b)^{\beta}\right]$$

的定義域爲 $\{x \in R \mid (ax+b)^{\beta}$ 存在且不爲 $0\}$，則 $f(x)$ 的 $m$ 階導函數

$$f^{(m)}(x) = a^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot (\beta n)_m}{n!} \cdot (ax+b)^{\beta n - m} \tag{7}$$

對所有實數 $x$ 滿足 $(ax+b)^{\beta}$ 存在且不爲 $0$。其中 $c_n = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j$，對所有非負整數 $n$。

證明: 在引理 A 中令 $z = (ax+b)^{\beta}$，我們得到

$$f(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j (ax+b)^{\beta j}\right) \exp\left[(ax+b)^{\beta}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(ax+b)^{\beta n} \tag{8}$$

其中 $c_n = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j$ ，對每個非負整數 $n$ 。

利用逐項微分定理，可以得到 $f(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[(ax+b)^{\beta n}]$$

$$= a^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot (\beta n)_m}{n!} \cdot (ax+b)^{\beta n - m}$$

對所有實數 $x$ 滿足 $(ax+b)^{\beta}$ 存在且不為 0 。 ■

附註 1：以下證明 $f(x)$ 的 $m$ 階導函數( $m = 0,1,2,\ldots$ )，均滿足逐項微分定理的三個條件：

設 $m$ 為任意固定的正整數。對於每個實數 $x_1$ 滿足 $(ax_1+b)^{\beta}$ 存在且不為 0 ，恆可以找到一個包含 $x_1$ 的開區間 $(c,d)$ 使得 $K \le \left|(ax+b)^{\beta}\right| \le K+1$ ，對所有 $x \in (c,d)$ 。(其中 $K$ 為某一正實數)

因此 $\left|(ax+b)^{-m}\right| \le K^{-m/\beta}$ (因為我們假設 $\beta > 0$ )；並且每個非負整數 $n$ ，$\left|(ax+b)^{\beta n}\right| \le (K+1)^n$ 對所有 $x \in (c,d)$ 。

所以

$$\left|\frac{c_n \cdot (\beta n)_m}{n!}(ax+b)^{\beta n - m}\right| \le \frac{\left|c_n (\beta n)_m\right|}{n!} \cdot K^{-m/\beta} \cdot (K+1)^n \tag{9}$$

對所有 $x \in (c,d)$ 和每個非負整數 $n$ 。

又因為 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|c_n (\beta n)_m\right|}{n!} \cdot K^{-m/\beta} \cdot (K+1)^n$ 收斂 (見以下附註 2 的說明)

所以利用 Weierstrass M-test，我們得知：

$a^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot (\beta n)_m}{n!} \cdot (ax+b)^{\beta n - m}$ 在開區間 $(c,d)$ 均勻收斂，也就是說 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[(ax+b)^{\beta n}]$ 在開區間 $(c,d)$ 均勻收斂。所以利用逐項微分定理，可以得到

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[(ax+b)^{\beta n}]$$

$$= a^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot (\beta n)_m}{n!} \cdot (ax+b)^{\beta n - m}$$

對所有 $x \in (c,d)$ 。

附註 2：設 $a_n = \dfrac{|c_n(\beta n)_m|}{n!} \cdot K^{-m/\beta} \cdot (K+1)^n$ ，因為

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = (K+1)\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left|\frac{c_{n+1}(\beta(n+1))_m}{c_n(\beta n)_m}\right|$$

$$= (K+1)\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\beta(n+1))_m}{(\beta n)_m}\right|$$

$$= 0 \qquad (\text{因為} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\beta(n+1))_m}{(\beta n)_m}\right| = 1 \ \text{(見以下附註 3 的說明)})$$

所以由 ratio test，我們得知 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{|c_n(\beta n)_m|}{n!}\cdot K^{-m/\beta}\cdot(K+1)^n$ 收斂。

附註 3：因為 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sum_{j=0}^{k}\lambda_j(n+1)_j}{\sum_{j=0}^{k}\lambda_j(n)_j}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_k(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)+\cdots}{\lambda_k n(n-1)\cdots(n-k+1)+\cdots}\right|$$

$$= 1 \qquad (\text{因為我們假設 } \lambda_k \neq 0)$$

另一方面， $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(\beta(n+1))_m}{(\beta n)_m}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(\beta n+\beta)(\beta n+\beta-1)\cdots(\beta n+\beta-m+1)}{(\beta n)(\beta n-1)\cdots(\beta n-m+1)}\right|$

$$= 1 \qquad (\text{因為我們假設 } \beta > 0)$$

接著我們利用複數冪級數推導本文第二個主要的結果，有關函數 $g(x) = \left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j[\exp\ j(rx+s)]\right]\exp\left[\exp(rx+s)\right]$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 2: 設 $k$ 為非負整數，$m$ 為正整數且 $r,s$ 為實數，而 $\lambda_j$ 為實數，對所有 $j=0,..,k$ 且 $\lambda_k \neq 0$ 。若函數

$$g(x) = \left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j[\exp\ j(rx+s)]\right]\exp[\exp(rx+s)]$$

的定義域為 $(-\infty,\infty)$ ，則 $g(x)$ 的 $m$ 階導函數

$$g^{(m)}(x) = r^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \exp[\,n(rx+s)] \tag{10}$$

對所有實數 $x$ 。其中 $c_n = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j$ ，對所有非負整數 $n$ 。

證明: 在引理 A 中令 $z = \exp(rx+s)$ ，可以得到

$$g(x) = \left[ \sum_{j=0}^{k} \lambda_j [\exp\ j(rx+s)] \right] \exp[\exp(rx+s)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \exp[\,n(rx+s)] \tag{11}$$

其中 $c_n = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j$ ，對所有非負整數 $n$ 。

利用逐項微分定理，我們得到 $g(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$g^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \exp[\,n(rx+s)]$$

$$= r^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \exp[\,n(rx+s)]$$

對所有實數 $x$ ■

附註 4：以下證明 $g(x)$ 的 $m$ 階導函數( $m = 0,1,2,...$ )，均滿足逐項微分定理的三個條件：

設 $m$ 爲任意固定的正整數。對於每個實數 $x_1$ ，恆可以找到一個包含 $x_1$ 的開區間 $I$ 使得 $|rx+s| \le M$ ，對所有 $x \in I$ ，其中 $M$ 爲某一正實數。

因此 $\exp[\,n(rx+s)] \le \exp(nM)$ ，對所有 $x \in I$ 和每個非負整數 $n$ 。

所以

$$\left| \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \exp[\,n(rx+s)] \right| \le \frac{n^m |c_n|}{n!} \cdot \exp(nM) \tag{12}$$

對所有 $x \in I$ 和每個非負整數 $n$ 。

又因爲 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m |c_n|}{n!} \cdot \exp(nM)$ 收斂 (見以下附註 5 的說明)

所以利用 Weierstrass M-test，我們得知：

$r^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \exp[\,n(rx+s)]$ 在開區間 $I$ 均勻收斂，也就是說 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \exp[\,n(rx+s)]$ 在開區間 $I$ 均勻收斂。所以利用逐項微分定理，可以得到

$$g^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \exp[n(rx+s)]$$

$$= r^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \exp[n(rx+s)] \text{ ，}$$

對所有 $x \in I$ 。

附註 5：設 $b_n = \dfrac{n^m |c_n|}{n!} \cdot \exp(nM)$ ，因爲

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^m}{n^m}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\exp[(n+1)M]}{\exp(nM)} = 0$$

(因爲 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^m}{n^m}\right| = 1$ ， $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$ (因爲 $\lambda_k \neq 0$ ) 且 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\exp[(n+1)M]}{\exp(nM)} = \exp M$ )

所以由 ratio test，我們得知 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^m |c_n|}{n!} \cdot \exp(nM)$ 收斂。

以下利用複數冪級數求出函數 $h(x) = \left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \{\cos[j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right] \exp[\cos(px+q)]$ 的任意階導函數：

定理 3: 設 $k$ 爲非負整數， $m$ 爲正整數且 $p, q, \lambda_j$ 爲實數，對所有 $j = 0,..,k$ 且 $\lambda_k \neq 0$ 。若函數

$$h(x) = \left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \{\cos[j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right] \exp[\cos(px+q)]$$

的定義域爲 $(-\infty,\infty)$ ，則 $h(x)$ 的 $m$ 階導函數

$$h^{(m)}(x) = p^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \cos\left[n(px+q) + \frac{m\pi}{2}\right] \tag{13}$$

對所有實數 $x$ 。其中 $c_n = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (n)_j$ ，對所有非負整數 $n$ 。

證明: 在引理 A 中令 $z = \exp[i(px+q)]$ (其中 $i = \sqrt{-1}$ )，我們得到

$$\left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j [\exp i(px+q)]^j\right] \exp\{\exp[i(px+q)]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \exp[i(px+q)]^n$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j [\exp ij(px+q)]\right] \exp\{\exp[i(px+q)]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \exp[in(px+q)]$$

(利用棣美弗公式)

$$\Rightarrow \left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \exp\{i[j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\exp[\cos(px+q)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}[\cos n(px+q) + i\sin n(px+q)] \tag{14}$$

利用(14)式等號兩邊的實數部分相等以及尤拉公式，我們得到

$$h(x) = \left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \{\cos[j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\exp[\cos(px+q)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}[\cos n(px+q)] \tag{15}$$

所以由逐項微分定理，我們可以求出 $h(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$h^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[\cos n(px+q)]$$

$$= p^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \cos\left[n(px+q) + \frac{m\pi}{2}\right],$$

對所有實數 $x$ ■

附註 6：以下證明 $h(x)$ 的 $m$ 階導函數( $m = 0,1,2,...$ )，均滿足逐項微分定理的三個條件：

設 $m$ 爲任意固定的正整數。對於每個實數 $x_1$ 以及包含 $x_1$ 的任意開區間 $I_1$，我們恆有 $\left|\cos\left[n(px+q)+\frac{m\pi}{2}\right]\right| \le 1$，對所有 $x \in I_1$ 和每個非負整數 $n$。

所以利用 Weierstrass M-test，我們得知：

$p^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \cos\left[n(px+q)+\frac{m\pi}{2}\right]$ 在開區間 $I_1$ 均勻收斂，也就是說 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[\cos n(px+q)]$ 在開區間 $I_1$ 均勻收斂。所以利用逐項微分定理，可以得到

$$h^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[\cos n(px+q)]$$

$$= p^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot n^m}{n!} \cdot \cos\left[n(px+q) + \frac{m\pi}{2}\right]$$

對所有 $x \in I_1$。

最後利用複數冪級數推導本文第四個主要的結果，我們求出函數 $u(x)=\left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\{\sin[\,j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\exp[\cos(px+q)]$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 4: 和定理 3 相同的假設並且函數

$$u(x)=\left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\{\sin[\,j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\exp[\cos(px+q)]$$

的定義域爲 $(-\infty,\infty)$，則 $u(x)$ 的 $m$ 階導函數

$$u^{(m)}(x) = p^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\cdot n^m}{n!}\cdot\sin\left[n(px+q)+\frac{m\pi}{2}\right] \tag{16}$$

對所有實數 $x$。其中 $c_n=\sum_{j=0}^{k}\lambda_j(n)_j$，對所有非負整數 $n$。

證明: 利用(14)式等號兩邊的虛數部分相等以及尤拉公式，我們得到

$$u(x)=\left[\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\{\sin[\,j(px+q)+\sin(px+q)]\}\right]\exp[\cos(px+q)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}[\sin\,n(px+q)] \tag{17}$$

因此由逐項微分定理，我們得到 $u(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$u^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}\cdot\frac{d^m}{dx^m}[\sin\,n(px+q)]$$

$$=p^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\cdot n^m}{n!}\cdot\sin\left[n(px+q)+\frac{m\pi}{2}\right],$$

對所有實數 $x$ ■

附註 7： $u(x)$ 的 $m$ 階導函數( $m=0,1,2,\ldots$ )，均滿足逐項微分定理的三個條件，其原因和附註 6 的說明是類似的。

## 三、例子說明

接著針對本文所探討的四種函數的微分問題，舉出四個例子實際的利用定理 1、定理 2、定理 3 和定理 4 求出這些函數的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面，我們利用 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數表示法的近似值。

例題 1: 設函數

$$f(x)=\left(4+6(3x-2)^{\frac{5}{4}}-2(3x-2)^{\frac{5}{2}}\right)\exp\left[(3x-2)^{\frac{5}{4}}\right] \tag{18}$$

的定義域為 $\left\{x\in R \middle| x>\frac{2}{3}\right\}$ 。利用定理 1 我們得到 $f(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2n^2+8n+4)\cdot 3^m\cdot\left(\frac{5n}{4}\right)_m}{n!}\cdot(3x-2)^{\frac{5n}{4}-m} \tag{19}$$

對所有實數 $x>\frac{2}{3}$ 。

所以我們可以求出 $f(x)$ 在 $x=2$ 的 13 階微分值

$$f^{(13)}(2)=3^{13}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2n^2+8n+4)\cdot\left(\frac{5n}{4}\right)_{13}}{n!}\cdot 4^{\frac{5n}{4}-13} \tag{20}$$

以下我們利用 Maple 算出 $f^{(13)}(2)$ 和它的無窮級數表示法的近似值：

```
>f:=x->(4+6*(3*x-2)^(5/4)-2*(3*x-2)^(5/2))*exp((3*x-2)^(5/4));
```

$$f:=x\rightarrow\left(4+6\,(3\,x-2)^{5/4}-2\,(3\,x-2)^{5/2}\right)\,\mathrm{e}^{(3\,x-2)^{5/4}}$$

```
>evalf((D@@13)(f)(2),20);
```

$$-1.9745876861289251748\cdot 10^{15}$$

```
>evalf(3^13*sum(1/n!*(-2*n^2+8*n+4)*product(5*n/4-j,j=0..12)*4^(5*n/4-13),n=0..infinity),20);
```

$$-1.9745876861289251747\cdot 10^{15}$$

例題 2: 設函數

$$g(x)=\left[5-2\exp(-4x+3)-7\exp(-8x+6)\right]\cdot\exp[\exp(-4x+3)] \tag{21}$$

的定義域為 $(-\infty,\infty)$ ，利用定理 2 我們得到 $g(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$g^{(m)}(x)=(-4)^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-7n^2+5n+5)\cdot n^m}{n!}\cdot\exp[\,n(-4x+3)] \tag{22}$$

對所有實數 $x$ 。

因此我們得到 $g(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 的 9 階微分值

$$g^{(9)}\left(\frac{3}{2}\right)=(-4)^9\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-7n^2+5n+5)\cdot n^9}{n!}\cdot\exp(-3n) \tag{23}$$

接著我們利用 Maple 計算出 $g^{(9)}\left(\frac{3}{2}\right)$ 和它的無窮級數表示法的近似值：

>g:=x->(5-2*exp(-4*x+3)-7*exp(-8*x+6))*exp(exp(-4*x+3));

$$g := x \to \left(5 - 2\,e^{-4x+3} - 7\,e^{-8x+6}\right)\ e^{e^{-4x+3}}$$

>evalf((D@@9)(g)(3/2),20);

$$8.4192940176402640739 \cdot 10^{6}$$

>evalf((-4)^9*sum(1/n!*(-7*n^2+5*n+5)*n^9*exp(-3*n),n=0..infinity),20);

$$8.4192940176402640748 \cdot 10^{6}$$

例題 3: 函數

$$h(x) = \left\{3\cos\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right] - 2\cos\left[\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}\exp\left[\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \tag{24}$$

的定義域為 $(-\infty,\infty)$ 。利用定理 3，我們得到 $h(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$h^{(m)}(x) = 4^{m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2n)\cdot n^{m}}{n!} \cdot \cos\left[n\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{m\pi}{2}\right] \tag{25}$$

對所有實數 $x$ 。

因此 $h(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 的 8 階微分值

$$h^{(8)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4^{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2n)\cdot n^{8}}{n!} \cdot \cos\frac{n\pi}{2} \tag{26}$$

同樣我們利用 Maple 算出 $h^{(8)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 和它的無窮級數表示法的近似值：

>h:=x->(3*cos(sin(4*x-Pi/6))-2*cos(4*x-Pi/6+sin(4*x-Pi/6)))*exp(cos(4*x-Pi/6));

$$h := x \to \left(3\cos\left(\sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right)\right) - 2\cos\left(4x - \frac{1}{6}\pi + \sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)\right)\ e^{\cos\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right)}$$

>evalf((D@@8)(h)(Pi/6),20);

$$1.6453382064465001342 \cdot 10^{8}$$

>evalf(4^8*sum(1/n!*(3-2*n)*n^8*cos(n*Pi/2),n=0..infinity),20);

$$1.6453382064465001342 \cdot 10^{8}$$

例題 4: 函數

$$u(x)=\left\{7\sin\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]+5\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}\exp\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (27)$$

的定義域為 $(-\infty,\infty)$。由定理 4，我們得到 $u(x)$ 的任意 $m$ 階導函數

$$u^{(m)}(x) = 2^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(7+5n)\cdot n^m}{n!}\cdot\sin\left[n\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{m\pi}{2}\right] \qquad (28)$$

對所有實數 $x$。

所以我們得到 $u(x)$ 在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 的 12 階微分值

$$u^{(12)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(7+5n)\cdot n^{12}}{n!}\cdot\sin\frac{7n\pi}{4} \qquad (29)$$

以下我們利用 Maple 算出 $u^{(12)}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 和它的無窮級數表示法的近似值：

```
>u:=x->(7*sin(sin(2*x+Pi/4))+5*sin(2*x+Pi/4+sin(2*x+Pi/4)))*exp(cos(2*x+Pi/4));
```

$$u := x \to \left(7\sin\left(\sin\left(2x+\frac{1}{4}\pi\right)\right)+5\sin\left(2x+\frac{1}{4}\pi+\sin\left(2x+\frac{1}{4}\pi\right)\right)\right)e^{\cos\left(2x+\frac{1}{4}\pi\right)}$$

```
>evalf((D@@12)(u)(3*Pi/4),20);
```

$$7.8036876320799855678\cdot 10^{11}$$

```
>evalf(2^12*sum(1/n!*(7+5*n)*n^12*sin(7*n*Pi/4),n=0..infinity),20);
```

$$7.8036876320799855682\cdot 10^{11}$$

## 四、結論

由上面的討論可以知道複數冪級數是建構本文四個主要定理的理論依據，並且我們看到逐項微分定理在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位，事實上這個定理的應用十分廣泛，許多困難的問題利用它都可以迎刃而解，我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，也可以看出Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用Maple來設計一些函數的微分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會將觸角延伸到其他微積分和工程數學的問題上，並且利用Maple為輔助工具來解決這些問題。此外，有關函數的泰勒級數展開式和高階微分值的求解這兩個問題是息息相關的，而泰勒級數展開式可以應用在微分方程式的求解以及函數的逼近理論。所以研究本文這四個函數的高階微分值求法將來也可能應用在微分方程式或其他工程上的問題，這是我們下一個要研究的主題。

## 參考文獻


1. 高木貞治 (原著)，葉能哲、賴漢卿 (合譯)，「高等微積分(解析概論)」，文笙書局，台北市，第二章，1984。
2. Grossman, S. I.,"Calculus," 5th ed., Saunders College Publishing, London, chap. 2, 1992.
3. Larson, R., Hostetler, R. P., and Edwards, B. H.,"Calculus with analytic geometry," 8th ed., Houghton Mifflin, Boston, chap. 2, 2006.
4. Azarian, M. K.,"There may be more than one way to find the derivative of a function," *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, vol. 5, no. 1, pp. 13-15, 1993.
5. Euler, R.,"A note on Taylor's series for sin(ax+b) and cos(ax+b)," *The College Mathematics Journal*, vol. 28, no. 4, pp. 297-298, 1997.
6. Marshall, A.,"Math bite: once in a while, differentiation is multiplicative," *Mathematics Magazine*, p302, 2000.
7. Yu, C. -H.,"Partial derivatives of some types of two-variables functions," *Pure and Applied Mathematics Journal* , vol. 2(2), pp. 56-61, 2013.
8. Apostol, T. M.,"Mathematical analysis," 2nd ed., Addison-Wesley, Boston, 1975.
9. Edwards, C. H. Jr., and Penney, D. E.,"Calculus and analytic geometry," 2nd ed., Prentice-Hall, New Jersey, p613, 1986.